9I5PYE

# अध्याय – 9
# सर्वसमिकाएं
# IDENTITIES

## सर्वसमिकाएं (Identities)

दो द्विपदीय व्यंजकों के गुणा से सम्बन्धित अभ्यास का हल करते हुए फातिमा ने सोचा कि अगर दोनों द्विपदीय व्यंजक के प्रथम एवं द्वितीय पद अलग अलग न हो कर एक ही हों तब क्या होगा? क्या उन्हें गुणा करने पर कोई नया परिणाम प्राप्त होगा ? जैसे यदि x+y का गुणा x +y के साथ किया जाए–

$$(x+y)(x+y) = x(x+y) + y(x+y) = x^2+xy+yx+y^2$$
$$= x^2+xy+xy+y^2 \qquad (\because xy = yx)$$
$$= x^2+2xy+y^2$$

फातिमा को गुणा करते देख अनु ने भी ऐसा ही गुणा किया–

$$(r+s)(r+s) = r(r+s)+s(r+s) = r^2+rs+sr+s^2$$
$$= r^2+rs+rs+s^2 \qquad (\because rs = sr)$$
$$= r^2+2rs+s^2$$

फातिमा और अनु के परिणाम कुछ मिलते–जुलते हैं। आप भी नीचे दिए गए द्विपदों का गुणा कर देखिए कि क्या आप को भी ऐसे ही परिणाम मिलते हैं ?

(1) $(p+q)\ (p+q) =$

(2) $(u+r)\ (u+r) =$

(3) $(m+n)\ (m+n) =$

(4) $(r+w)\ (r+w) =$

दो समान द्विपदीय व्यंजकों के गुणा से आप किस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं? लिखिए।

आप ने देखा कि दो समान द्विपदों का गुणा करने पर प्राप्त गुणन फल = (प्रथम पद)$^2$+2 (प्रथम पद) (द्वितीय पद) + (द्वितीय पद)$^2$ होता है। $(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

अर्थात् $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

अतः यह विशेष गुणन सम्बन्ध a एवं b के प्रत्येक मान के लिए सत्य है। इसे सर्वसमिका कहते हैं।

**सर्वसमिका–1** $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

अर्थात्

**[(प्रथम पद) + (द्वितीय पद)]$^2$ = (प्रथम पद)$^2$ + 2 (प्रथम पद) (द्वितीय पद) + (द्वितीय पद)$^2$**

इसे निम्न प्रकार से भी समझा जा सकता है–

| × | a | b |
|---|---|---|
| a | $a^2$ | ab |
| b | ab | $b^2$ |

$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

a एवं b की जगह भिन्न–भिन्न संख्याओं को ले कर नियम की सत्यता की जांच कीजिए।

**उदाहरण 1.** $(3x + 4y)^2$ को सर्वसमिका की सहायता से हल कीजिए।

**हल** हम जानते हैं कि $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(3x + 4y)^2$ की तुलना $(a+b)^2$ से करने पर $a = 3x,\ b = 4y$

अतः $(3x + 4y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$

$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

**उदाहरण 2.** $(2a + 3)^2$ को सर्वसमिका की सहायता से हल कीजिए।

**हल** हम जानते हैं कि $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(2a+3)^2$ से तुलना करने पर $x = 2a,\ y = 3$

$(2a + 3)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3) + (3)^2$

$= 4a^2 + 12a + 9$

**उदाहरण 3.** $\left(\frac{1}{2}p + 2q\right)^2$ को सर्वसमिका की सहायता से हल कीजिए।

**हल** $\left(\frac{1}{2}p + 2q\right)^2$ की तुलना $(a + b)^2$ से करने पर $a = \frac{1}{2}p,\ b = 2q$

$$\left(\frac{1}{2}p + 2q\right)^2 = \left(\frac{1}{2}p\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\not{2}}p\right)(\not{2}q) + (2q)^2 \qquad \left[(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}p^2 + 2pq + 4q^2$$

**उदाहरण 4.** $101^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

**हलः** यहां $101^2 = (100+1)^2$

अब $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ से तुलना करने पर

$a = 100$ एवं $b = 1$

अतः $101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 2(100)(1) + 1^2$

$= 10000 + 200 + 1$

$= 10201$

अब यदि a + b के स्थान पर a–b लिया जाये तो क्या होगा?

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

$= a(a-b) - b(a-b)$
$= a^2 - ab - ba + b^2$
$= a^2 - 2ab + b^2$ ($\therefore ab = ba$)

सारणी द्वारा

| × | a | −b |
|---|---|---|
| a | $a^2$ | −ab |
| −b | −ba | $(-b)^2$ |

सर्वसमिका–2 **$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$**

अर्थात् [(प्रथम पद) – (द्वितीय पद)]$^2$ = (प्रथम पद)$^2$ – 2 (प्रथम पद) (द्वितीय पद) + (द्वितीय पद)$^2$

क्या (a–b) के स्थान पर (p–q) या (r–s) या कोई और इसी प्रकार के द्विपदीय व्यंजक लेने पर भी ऊपर की सर्वसमिका सत्य होगी? जाँच कीजिए।

**उदाहरण 5.** $(3x-8y)^2$ सर्वसमिका की सहायता से हल कीजिए।

**हलः** हम जानते हैं कि $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(3x-8y)^2$ की तुलना $(a-b)^2$ से करने पर

$a = 3x,\ b = 8y$

$(3x-8y)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(8y) + (8y)^2$
$= 9x^2 - 48xy + 64y^2$

**उदाहरण 6.** $\left(x-\frac{2}{5}\right)^2$ को सर्वसमिका की सहायता से हल कीजिए।

**हलः** $\left(x-\frac{2}{5}\right)^2$ की तुलना $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ से करने पर

$a = x,\ b = \frac{2}{5}$

$$\left(x-\frac{2}{5}\right)^2 = (x)^2 - 2(x)\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$= x^2 - \frac{4x}{5} + \frac{4}{25}$$

**उदाहरण 7.** $(2x-3y)^2$ को सर्वसमिका की सहायता से हल कीजिए।
तथा $x = 4$ एवं $y = 2$ के लिए उत्तर की जाँच भी कीजिए।

**हलः** $(2x-3y)^2$ की तुलना $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ से करने पर

$a = 2x,\ b = 3y$

$(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2$
$= 4x^2 - 12xy + 9y^2$

**जाँच –**

बायाँ पक्ष $(2x - 3y)^2 = (2 \times 4 - 3 \times 2)^2 = (8 - 6)^2 = (2)^2 = 4$

दायाँ पक्ष $4x^2 - 12xy + 9y^2 = 4(4)^2 - 12(4)(2) + 9(2)^2$

$= 64 - 96 + 36 = 100 - 96 = 4$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

**उदाहरण 8.** सर्वसमिका के उपयोग से $98^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

**हल:–** यहाँ $98^2 = (100–2)^2$

अब $(a–b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ से तुलना करने पर $a = 100, b= 2$

$98^2 = (100–2)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$

$= 10000 - 400 + 4$

$= 9604$

**सर्वसमिका–3** $\boxed{(a+b)(a–b) = a^2–b^2}$

दो द्विपदीय व्यंजकों के प्रथम व द्वितीय व्यंजकों में यदि समान प्रथम पद समान चिन्ह के हों तथा समान द्वितीय पद विपरीत चिन्ह के हों तो क्या होगा? जैसे यदि $(a + b)$ का गुणा $(a - b)$ के साथ किया जाए।

$(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$

$= a^2 - ab + ab - b^2 \qquad (\because ab = ba)$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

अर्थात् **(प्रथम पद + द्वितीय पद) (प्रथम पद – द्वितीय पद) = (प्रथम पद)² – (द्वितीय पद)²**

सारणी द्वारा:–

| × | a | b |
|---|---|---|
| a | $a^2$ | ab |
| –b | –ab | $-b^2$ |

$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

अब $(p + q)$ को $(p - q)$ से, $(R + S)$ को $(R - S)$ से गुणा किया जाए तो क्या परिणाम ऊपर जैसे ही आएँगे? जाँच कीजिए–

**उदाहरण 9.** $(7x + 2y) \times (7x - 2y)$ को सर्वसमिका की सहायता से हल कीजिए।

**हल:** $(7x+2y)(7x–2y)$ की तुलना $(a+b)(a–b) = a^2–b^2$ से करने पर $a = 7x, b = 2y$

अतः $(7x + 2y)(7x–2y) = (7x)^2 - (2y)^2$

$= 49x^2 - 4y^2$

**उदाहरण 10.** $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)$ को सर्वसमिका की सहायता से हल कीजिए।

**हल** $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)$ की तुलना $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ से करने पर $a = \frac{x}{3}$, $b = \frac{y}{5}$

$$\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right) = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2$$

$$= \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25}$$

**उदाहरण 11.** सर्वसमिका के प्रयोग से $52\times48$ का मान ज्ञात कीजिए

**हल:** $52\times48 = (50+2)(50-2)$

अब $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ से तुलना करने पर $a = 50, b = 2$

$(50+2)(50-2) = 50^2 - 2^2$

$= 2500 - 4$

$= 2496$

## प्रश्नावली 9.1

1. उपयुक्त सर्वसमिका के प्रयोग से गुणनफल ज्ञात कीजिए –

   (i) $(2a + 3)(2a + 3)$ (ii) $\left(\frac{2}{5}m+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{5}m+\frac{3}{4}\right)$

2. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर गुणनफल ज्ञात कीजिए–

   (i) $(x - 5)(x - 5)$ (ii) $\left(\frac{3}{2}x-\frac{4}{5}y\right)\left(\frac{3}{2}x-\frac{4}{5}y\right)$

   (iii) $\left(2a-\frac{1}{2}\right)\left(2a-\frac{1}{2}\right)$ (iv) $(x^2 - y^2)(x^2 - y^2)$

3. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर मान निकालिए –

   (i) $(4x + 5)(4x - 5)$ (ii) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)$

   (iii) $(-a^2 + b^2)(a^2 + b^2)$ (iv) $(x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$

4. सर्वसमिका का प्रयोग कर हल कीजिए –

   (i) $(2a + 5)^2$ (ii) $\left(\frac{2}{3}m^2+\frac{5}{6}n^2\right)^2$

   (iii) $(-8x^3 + 5y^3)^2$

5 उपयुक्त सर्वसमिका का उपयोग कर मान ज्ञात कीजिएः–

(i) $(41)^2$ (ii) $(69)^2$

(iii) $(97)^2$ (iv) $(84)^2$

6. उपयुक्त सर्वसमिका का उपयोग कर मान ज्ञात कीजिए।

(i) $105 \times 95$ (ii) $92 \times 88$

(iii) $503 \times 497$

7. $x$ का मान ज्ञात कीजिए यदि

(i) $6x = (28)^2 - (22)^2$ (iii) $19x = 3^2 - 16^2$

(ii) $3x = (17)^2 - (14)^2$ (iv) $43x = 28^2 - 15^2$

8. $(3x - 5y)^2$ को हल कीजिए तथा $x = 4$ एवं $y = 2$ के लिए उत्तर की जाँच कीजिए।

9. $\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)^2$ को हल कीजिए तथा $x = 9$ एवं $y = 12$ के लिए उत्तर की जाँच कीजिए।

## इन्हें भी देखें

1. $(7-5) \times (7-5) = 2\times2 = 4$

   $(5-7) \times (5-7) = (-2) \times (-2) = 4$

2. $(8-4) \times (8-4) = 4\times4 = 4 \times 4 = 16$

   $(4-8) \times (4-8) = -4 \times -4 = 16$

$(x-y)\,(x-y) = (y-x)\,(y-x)$ है। इस प्रकार कोई भी दो संख्याए लेकर जांच करें कि क्या $(x-y)^2 = (y-x)^2$ है?

## सर्वसमिकाओं (Identities) का उपयोग कर गुणनखण्डन करना

बीजीय व्यंजकों के गुणनफल के अध्याय में आपने सर्व समिकाओं के बारे में पढ़ा है। सर्वसमिकाएं ऐसे कथन होते हैं जो प्रत्येक चरांक के लिए सत्य होते हैं। आप गुणनखण्डन करने के लिए सर्वसमिकाओं का भी प्रयोग कर सकते हैं।

(I) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$= (a + b)\,(a + b)$

(II) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$= (a - b)\,(a - b)$

(III) $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$

आईए, देखें इन सर्वसमिकाओं का गुणनखण्डन करने के लिए किस प्रकार उपयोग किया जाता है।

**उदाहरण 7.** $9x^2 + 24xy + 16y^2$ का गुणनखण्डन कीजिए।

**हल :** यहाँ प्रथम पद एवं तृतीय पद क्रमशः $3x$ एवं $4y$ के वर्ग हैं एवं मध्य पद $3x$ एवं $4y$ के गुणनफल के दुगुने के बराबर है।

अतः $9x^2 + 24xy + 16y^2$

$= (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$

$= (3x + 4y)^2$ (सर्वसमिका I $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ के प्रयोग से)

$= (3x + 4y)(3x + 4y)$

**उदाहरण 8.** $p^2 - 4pq + 4q^2$ का गुणनखण्डन कीजिए।

**हल :** यहाँ प्रथम एवं तृतीय पद क्रमशः p एवं 2 q के वर्ग हैं और मध्य पद ऋणात्मक है व p एवं 2q के गुणनफल के दुगुने के बराबर है।

अतः $p^2 - 4pq + 4q^2$

$= (p)^2 - 2(p)(2q) + (2q)^2$ (सर्वसमिका II $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ के प्रयोग से)

$= (p - 2q)^2$

$= (p-2q)(p-2q)$

**उदाहरण 9.** $16m^2 - 25n^2$ का गुणनखण्डन कीजिए।

हल : यहाँ प्रथम पद 4m तथा द्वितीय पद 5n का वर्ग है एवं इनके बीच ऋण चिन्ह है।

अतः $16m^2 - 25n^2$

$= (4m)^2 - (5n)^2$

$= (4m + 5n)(4m - 5n)$ (सर्वसमिका III $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ के प्रयोग से)

सर्वसमिका III का प्रयोग उस स्थिति में करते हैं जब व्यंजक के दो पद हो तथा दोनों पद पूर्ण वर्ग के रूप में हो व उनके मध्य ऋण चिन्ह हो।

**उदाहरण 10.** $(4x - 3y)^2 - 100$ का गुणनखण्डन कीजिए।

**हल :** यहाँ प्रथम पद $(4x - 3y)$ का वर्ग है तथा द्वितीय पद 10 का वर्ग है।

अतः $(4x - 3y)^2 - 100$

$= (4x - 3y)^2 - (10)^2$

$= (4x - 3y + 10)(4x - 3y - 10)$ (सर्वसमिका III $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ के प्रयोग से)

## प्रश्नावली 9.2

प्रश्न 1 सर्वसमिकाओं का उपयोग कर गुणनखण्डन कीजिए :–

(a) $4x^2 + 20xy + 25y^2$ (b) $25a^2 + 70ab + 49b^2$

(c) $9x^2 + 6x + 1$ (d) $1 + 18a + 81a^2$

(e) $p^2 + p + \frac{1}{4}$ (f) $36a^2 + 132ab + 121b^2$

प्रश्न 2 सर्वसमिकाओं का उपयोग कर गुणनखण्डन कीजिए :–

(a) $a^2 - 10ab + 25b^2$ (b) $16x^2 - 104x + 169$

(c) $121x^2 - 88xy + 16y^2$ (d) $x^2 - 30x + 225$

(e) $36a^2 - 12a + 1$

प्रश्न 3 सर्वसमिकाओं का उपयोग कर गुणनखण्डन कीजिए :–

(a) $25a^2 - 49b^2$ (b) $9x^2 - 121y^2$

(c) $64a^2 - 1$ (d) $1 - 16b^2$

(e) $\frac{16}{25}k^2 / \frac{4}{9}n^2$

प्रश्न 4 सर्वसमिकाओं का उपयोग कर गुणनखण्डन ज्ञात कीजिए :–

(a) $(x + 4y)^2 - 49$ (b) $100 - (2a + 3b)^2$

(c) $(4x^2 + 20xy + 25y^2) - 36$ (d) $9x^2 - (4x - 5y)^2$

(e) $x^2y^2 - 16$

प्रश्न 5 निम्नलिखित में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए : –

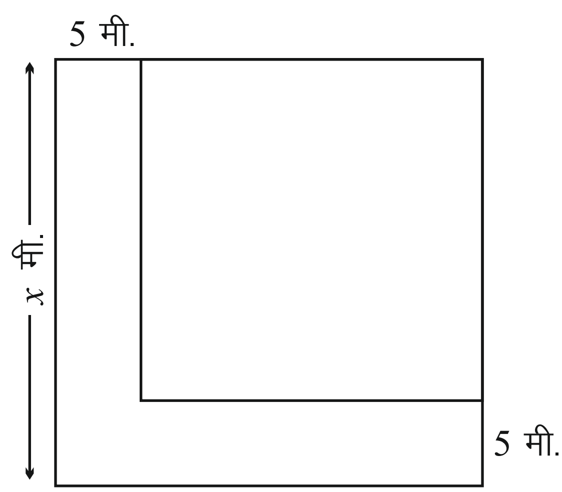
(a) $x^2 - 25y^2 = (x + 5y)$ (----------)

(b) $x^2 + 6x + 9 = (x +$ ---) (--- $+ 3)$

(c) $4x^2 - 28x + 49 = (2x -$ ---) $(2x -$ ---)

(d) $(a + b)^2 - 4 = (a + b + 2)$ (----------)

प्रश्न 6. राम के पास $x$ मीटर भुजा की वर्गाकार जमीन है। उसने स्कूल के रास्ते के लिए लंबाई और चौड़ाई के समांतर 5–5 मीटर जगह छोड़ दी। अब राम के पास बची जमीन का क्षेत्रफल कितना है ?



प्रश्न 7. एक मंदिर में जितनी मूर्तियाँ थी, पुजारी उतने ही फूल प्रत्येक मूर्ति पर चढ़ाता था। उस मंदिर में 2 मूर्तियाँ और स्थापित की गईं। मंदिर का पुजारी अभी भी प्रत्येक मूर्ति पर उतने ही फूल चढ़ाता है जितनी मंदिर में मूर्तियाँ है, परन्तु अब उसे पहले की तुलना में 24 फूल अधिक लाने पड़ते हैं। बताइए कि मंदिर में पहले कितनी मूर्तियाँ थीं?

प्रश्न 8. एक आयताकार खेत का क्षेत्रफल $(x^2-25)$ वर्गमीटर है। यदि इस खेत की लंबाई $(x+5)$ मीटर है तो खेत की चौड़ाई कितनी होगी?

प्रश्न 9. एक आयताकार आइने की चौड़ाई और लंबाई फीट में नापने पर दो क्रमागत संख्याएँ प्राप्त होती हैं। इन संख्याओं के वर्गों का अंतर 05 है। आइने की लंबाई और चौड़ाई बताइए।

## हमने सीखा

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(iii) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

(iv) बीजीय व्यंजकों के गुणनखंडन में सर्वसमिकाओं का प्रयोग आवश्यकतानुसार करते हैं।

9IEL12