

अध्याय-1

पूर्णांक की समझ

1.1 भूमिका

हम पूर्ण संख्याओं एवं पूर्णाकों से परिचित हैं। इस अध्याय में पूर्णाकों, उनके गुणों एवं संक्रियाओं के बारे में और अधिक चर्चा करेंगे पर इससे पहले हम पूर्ण संख्या एवं पूर्णाकों की पुनरावृत्ति कर लेंगे।

1.2 पुनरावलोकन

पिछले कक्ष में हमने सीखा:

- यदि गूणितल से एक पहाड़ की ऊँचाई 560 मीटर है। यदि कुर्र की गहराई 65 मीटर है तो गहाड़ की ऊँचाई का +560 मीटर तथा कुर्र की ऊँचाई (गहराई) को -65 मीटर द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। क्योंकि यदि ऊँचाई का धनपूर्णांक से व्यक्त करते हैं तो गहराई को ऋण पूर्णांक से व्यक्त करेंगे।
- लाभ को धन पूर्णांक से तथा हानि को ऋण पूर्णांक से ब्रफट कर सकते हैं।
- '0' से ऊपर के ताप को धनात्मक तथा '0' से नीचे के ताप को ऋणात्मक रूप में व्यक्त करते हैं।

यहाँ विभिन्न राशियों की सूची दी गई है, जिन्हें धन पूर्णाकों से दर्शाते हैं, तो इनके निपरीत ऋण-रूँ राशियाँ होंगी जिन्हें ऋण पूर्णाकों में व्यक्त कर सकते हैं?

| क्र.सं. | धन पूर्णाकों में व्यक्त होनेवाली राशियाँ | ऋण पूर्णाकों में व्यक्त होनेवाली राशियाँ |
|---------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| 1. | समुद्र तल से ऊँचाई | |
| 2. | आबादी में वृद्धि | |
| 3. | औसत से अधिक वर्षा | |

| | | |
|----|--------------------------------|--|
| 4. | 0°C से ऊपर के ताप | |
| 5. | किसी स्थान से दायीं ओर की दूरी | |
| 6. | लाभ | |
| 7. | नूला वृद्धि | |
| 8. | जान डन | |
| 9. | औसत से अधिक उपज | |



हम जानते हैं—

... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, आदि पूर्णांक हैं जिनमें 1, 2, 3, 4, 5, आदि धन पूर्णांक हैं तथा -1, -2, -3, -4, -5, आदि ऋण पूर्णांक हैं।

1. '0' (शून्य) न तो धन पूर्णांक है न ऋण पूर्णांक है।
2. '0' के बाद की संख्याएँ बढ़त क्रम में हैं।
3. '0' के पूर्व की संख्याएँ बढ़ते क्रम में हैं।
4. संख्या-रेखा पर बाएँ से दायें की संख्याएँ बढ़ी होती हैं।
5. संख्या-रेखा पर दायें से बाएँ की संख्याएँ छोटी होती हैं।
6. शून्य प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा तथा प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक से छोटा होता है।
7. धनात्मक पूर्णाकों में यदि $a > b$ तो ऋणात्मक पूर्णाकों में $-a < -b$ जैसे $8 > 4$ तो $-8 < -4$ ।
8. किसी पूर्णांक के विपरीत चिह्न के पूर्णांक का उसका **योगात्मक प्रतिलोम** या **योग्य प्रतिलोम (Additive inverse)** कहते हैं, जैसे 5 का योगात्मक प्रतिलोम -5 है तथा -8 का योग्य प्रतिलोम 8 है। दो योगात्मक प्रतिलोमों का योग शून्य होता है। जैसे $-5 + (-5) = 0$, $-5 + 5 = 0$; इस आधार पर यदि दो पूर्णाकों का योग शून्य होता है तो व एक दूसरे का योगात्मक प्रतिलोम कहलते हैं।

स्वयं करके देखिए

| | | | | | | | |
|----------------|------------------|-------------------|-----|----|-----|----|----|
| पूर्णांक | 8 | -5 | -12 | 15 | -20 | 16 | 18 |
| योग्य प्रतिलोम | -8 | +5 | | | | | |
| फल | $(8) + (-8) = 0$ | $(-5) + (+5) = 0$ | | | | | |

हम अपनी पिछली कक्षा में पूर्णाकों के योग एवं व्यवकलन के बारे में अध्ययन कर चुके हैं कि किसी संख्या रेखा पर जब हम—

- (i) एक धनात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं, तो दाईं ओर चलते हैं।
- (ii) एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं, तो बाईं ओर चलते हैं।
- (iii) एक धनात्मक पूर्णांक को घटाते हैं, तो बाईं ओर चलते हैं।
- (iv) एक ऋणात्मक पूर्णांक को घटाते हैं, तो दाईं ओर चलते हैं।

बताइए कि निम्नलिखित कथन सही हैं अथवा गलत। जे कथन गलत है उनको सही कीजिए—

- (i) जब दो धनात्मक पूर्णाकों को जोड़ा जाता है, तो हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
- (ii) जब दो ऋणात्मक पूर्णाकों को जोड़ा जाता है, तो हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
- (iii) जब एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ा जाता है, तो हमें हमेशा एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
- (iv) $-4 + (-8) + (12) + (-18) + (5) = -13$
- (v) $(-10) + 3 = 10 - 3$
- (vi) $8 + (-7) - (-4) = 8 + 7 - 4$

अपने उत्तरों की तुलना निम्नलिखित उत्तरों के साथ कीजिए—

- (i) सही है। उदाहरणतः:

| | |
|---------------------|------------------------------|
| (a) $56 + 73 = 129$ | (b) $113 - 82 = 195$ |
| (c) $15 + 25 = 40$ | (d) $20 + 30 + 15 = 65$ आदि। |

अतः धनात्मक पूर्णाकों का योगफल एक धनात्मक पूर्णांक होती है। ऐसे 5 और उदाहरण दीजिए।

(ii) गलत है क्योंकि $(-5) + (-8) = -13$, जो कि धनात्मक पूर्णांक नहीं है।

$$(-18) + (-7) + (-5) = -30$$

अतः ऋणात्मक पूर्णाकों का योगफल एक ऋणात्मक पूर्णांक होती है। इस कथन के पक्ष में पाँच और उदाहरण दीजिए।

(ऋणात्मक पूर्णाकों का योगफल में पूर्णाकों के विशुद्ध मान को जोड़कर योगफल के पहले (-) चिह्न लगा दते हैं।)

स्वयं करके देखिए

$$-8 + (12) =$$

$$25 + (-75) =$$

$$-28 + (-52) =$$

$$50 + 88 =$$

$$-20 + (-15) + 50 =$$

$$-12 + (-4) - (-10) + 15 + 18 =$$

(iii) गलत, क्योंकि $(-8) + (20) = 12$, यह एक ऋणात्मक पूर्णांक नहीं है।

$$(15) + (-50) = -35$$

अतः जब एक धनात्मक और एक ऋणात्मक अथवा एक ऋणात्मक और एक धनात्मक पूर्णांक का जोड़ जाता है तो संख्या का घटा दत्त है और बड़े पूर्णांक का चिह्न उस अन्तर के पहले रख दिया जाता है। बड़े पूर्णांक का निर्णय दोनों पूर्णाकों के चिह्नों की अवहेलना करके हुए लिया जाता है। जैसा कि ऊपर के उदाहरण से स्पष्ट है।

(iv) सही है, $-1 + (-8) + (12) + (-18) + (5)$ को सरल इस प्रकार किया जाता है।

$$-1 + (-8) + (12) - (-18) + (5) \text{ या } -30 + 17 = -13$$

अतः दो अधिक ऋणात्मक और धनात्मक का योगफल इस करने के लिए धनात्मक संख्याओं का योगफल एक साथ और ऋणात्मक संख्याओं का योगफल एक साथ ज्ञात करने का बाद पुनः सन्तुल्य अन्तर नियम (iii) के अनुसार प्राप्त कर लते हैं। अतः पूर्णाकों का योगफल एक पूर्णांक होता है।



$7 \neq 7$, असत्य



$8 + (-7) = 1$, असत्य

अतः असत्य

असत्य

1.3 पूर्णाकों के जोड़ व घटाव के गुण

1.3.1 ;lx dsvarxh l or xqk ;k l ojd xqk

इस शीर्षक के अन्तर्गत हमें दो पूर्ण संख्याओं का योग पुनः एक पूर्ण संख्या ही होती है। उदाहरणतः $5 + 8 = 13$ है, जो कि एक पूर्ण संख्या है। हम जानते हैं कि यह गुण, पूर्ण संख्याओं के योग का संबद्ध गुण या संवरक गुण कहलाता है।

आइए देखें कि क्या यह गुण पूर्णाकों के लिए भी सत्य है अथवा नहीं। पूर्णाकों के कुछ गुण आगे दिए जा रहे हैं। आगे दो हुई सारणी का देखिए और इसे पूरा कीजिए—

कथन

- (i) $8 + 4 = \square \square$
 (ii) $(-3) + 5 = \text{-----}$
 (iii) $(25) + 8 = \text{-----}$
 (iv) $19 - (-25) = -6$
 (v) $5 + (-3) = \text{-----}$
 (vi) $(-20) + 0 = \text{-----}$
 (vii) $(-7) + (-8) = \text{-----}$

प्रेक्षण

- परिणाम एक पूर्णांक है।

 परिणाम एक पूर्णांक है।

क्या दो पूर्णाकों का योग हमेशा एक पूर्णांक होता है? क्या आपको पूर्णाकों का कोई ऐसी युग्म मिला जिसका योग पूर्णांक नहीं है? इस प्रकार पूर्णांक का योग एक पूर्णांक होता है, इसलिए इन कहते हैं कि पूर्णांक, योग के अंतर्गत संवृत (closed) होता है।

व्यापक रूप में, केन्हीं दो पूर्णाकों a तथा b के लिए $a + b$ एक पूर्णांक होता है।

1.3.2 क्रम विनिमेय गुणधर्म

$(-3) + (-5) = -8$ पुनः $(-5) + (-3) = -8$

तो हम पाते हैं कि $(-3) + (-5) = (-5) + (-3)$

अतः दो पूर्णांक संख्याओं का योगफल एवं उनके उल्टे क्रम का योगफल समान होते हैं। इस गुण को **क्रम विनिमेय गुण (commutative property)** कहते हैं। आप अन्य पूर्णाकों के साथ ऐसा करके देखिए। क्या आपको ऐसे पूर्णांक मिले जो क्रम विनिमेय नियम का पालन नहीं करता? व्यापक रूप में a और b दो पूर्णांक हैं त $a + b = b + a$, वह क्रम विनिमेय गुण है।

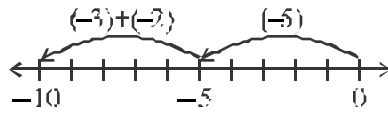
1.3.3 साहचर्य गुण (सहचरी)

निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए:

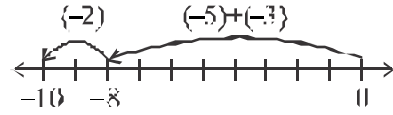
पूर्णाकों -3 , -2 एवं -5 का लीजिए।

$(-5) + [(-3) + (-2)]$ और $[(-5) + (-3)] + (-2)$ पर ध्यान दीजिए।

प्रथम योग में (-3) और (-2) को मिलाकर एक समूह बनाया गया है और दूसरे योग में (-5) एवं (-3) को मिलाकर एक समूह बनाया गया है। इन इसकी जाँच करेंगे कि इनका क्या परिणाम प्राप्त होते हैं?



$$(-5) + [(-3) + (-2)]$$



$$[(-2) + (-5)] + (-3)$$

इन दोनों ही स्थितियों में हमें -10 प्राप्त होता है।

अर्थात्, $(-5) + [(-3) + (-2)] = [(-5) + (-2)] + (-3)$

इसी प्रकार, $1, -3,$ और -7 को लें जिए।

$$(-3) + [1 + (-7)] = -3 + \text{-----} + \text{-----}$$

$$[(-3) + 1] + (-7) = -2 + \text{-----} + \text{-----}$$

क्यों $(-3) + [1 + (-7)]$ एवं $[(-3) + 1] + (-7)$ का हल समान है?

इस प्रकार के मॉडल और उदाहरण लें कि आप ऐसा कोई उदाहरण नहीं पाएंगे जिसके लिए इस तरह के केंच गिना है। यह चरिता है कि पूर्णाकों के लिए योग सहायी (associative) होता है। व्यापक रूप में,

पूर्णाकों a, b और c के लिए हम कह सकते हैं कि $a + (b + c) = (a + b) + c$

☒☒☒ ; क; rRI ed

निम्न पर विचार करें—

(i) $(-5) + 0 = -5$

पुनः $0 + (-5) = -5$

→ $(-5) + 0 = 0 + (-5) = -5$

(ii) $2 + 0 = 2$

पुनः $0 + 2 = 2$

$0 + 2 = 2 + 0$

अतः हम कह सकते हैं कि किसी पूर्णांक a के लिए

$$a + 0 = a \quad \text{एवं} \quad 0 + a = a$$

तब 0 (शून्य) जोड़ के लिए '0' (शून्य) ; क; rRI ed (Additive identity) कहलाता है।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित के सामने उसके उचित गुणों को लिखें-

| | | |
|----|---------------------------------------|--|
| 1. | $5 + (-2) - -2 + 5$ | |
| 2. | $(-2) - 5 + (-4) = -2 + \{5 + (-4)\}$ | |
| 3. | $-25 + 0 - -25$ | |
| 4. | $-12 + (-5) - -17$ | |

1.4 पूर्णाकों का व्यवकलन (Subtraction) : देखिए और समझिए

(i) $12 - 20 = -8$

(ii) $8 - (-5) = 8 + 5 = 13$

(iii) $-5 - (-4) = -5 + 4 = -1$

(iv) $-10 - (-4) = -10 + 4 = -14$

स्वयं करके देखिए

$-5 - (-50) =$ $20 - (-45) =$ $-55 - (+75) =$ $-60 - (-4) =$

1.5 पूर्णाकों का गुण (व्यवकलन के लिए)

(a) $-10 - (-5) = -15$

(b) $6 - (-10) = 6 + 10 = 16$

जब दो पूर्णाकों का अंतर एक पूर्णाक संख्या होती है, इसे घटाने का **संवरक गुण (closure property)** कहते हैं। आप रुक-रुक कर देखिए क्या कोई ऐसा पूर्णाक भी मिले किन्तु अंतर एक पूर्णाक न हो? व्यापक रूप में a और b दो पूर्णाक संख्याएँ हैं तो $a - b$ भी एक पूर्णाक संख्या होगी।

स्वयं करके देखिए

4, 12, 20, 28, _____, _____, _____

8, 6, 4, _____, _____, _____, _____

-8, -12, _____, -20, _____, _____

-15, -10, -5, _____, _____, _____

ऐसे कुछ और pattern बनाइए और स्वयं य अपने मित्रों से कराइए।

प्रश्नावली- 1.1

1. निम्नलिखित के बीच की सभी पूर्णांक लिखिए।

- (a) -5 और 5 (b) -2 और 8
(c) -6 और -2 (d) -4 और -10

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक में बड़े पूर्णांक पर घेरा (○) लगाएँ।

- (a) -20, 4 (b) -15, -8 (c) 0, -5
(d) -20, -7 (e) 25, -2 (f) -20, -18

3. रिक्त स्थानों में उचित चिह्न (>, < और =) को भरिए।

- (a) $-6 \square -8$ (b) $4 \square 0$ (c) $-15 \square 2$
(d) $-50 \square -54 + 4$ (e) $25 \square 25$ (f) $4 - 15 \square 2 - 20$

4. नीचे दिए गए पूर्णाकों को बढ़ते क्रम में लिखिए।

- (a) -8, 12, -5, 15, 20, -2 (b) 5, 0, -2, -4, -15, 8

5. नीचे दिए गए पूर्णाकों की अगली पूर्णांक बताइए।

- (a) -18 (b) 15 (c) -20
(d) 18 (e) -5

6. नीचे दिए गए पूर्णाकों के पहले का पूर्णांक बताइए।

- (a) 25 (b) -59 (c) -55
(d) -26 (e) +100

7. रिक्त स्थान भरिए-

(i) $(-5) + (2) = \dots\dots\dots$ (ii) $(2) + (-5) = \dots\dots\dots$

क्या $(-5) + (2) = 2 + (-5)$ है? $\dots\dots\dots$

कुछ अन्य पूर्णांक संख्याएं लेकर सारणी को पूरा कीजिए व जाँचिए—

| | a | b | a-b | b+a | क्या (a+b)=(b-a) है? | a-b | b-a | क्या (a-b)=(b-a) है? |
|-------|----|---|-------------|---------------|----------------------|-----------------|-----------------|----------------------|
| (i) | -6 | 3 | -6-3 =-3 | 3+(-6) =-3 | | (-6)-(3) =-9 | (3)-(-6) = 9 | |
| (ii) | | | | | | | | |
| (iii) | | | | | | | | |

8. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

- (i) $(-a) + (6) - (6) - (\quad)$
 (ii) $-8 + \dots - 0$
 (iii) $(2) + [9 - (-6)] - [2 + 9] + (\dots)$
 (iv) $15 + \dots = 15$

9. निम्नलिखित को जाँचिए।

- (a) -15 में -18 को (b) -20 में 17 को
 (c) $+24$ में -16 को (d) -8 में 5 का

10. निम्नलिखित को घटाइए।

- (a) -15 में से -5 को (b) 25 में से -75 को
 (c) -8 में से -16 को (d) -20 में से -18 को

11. निम्नलिखित गुणों का एक-एक उदाहरण दीजिए।

- (a) कन विनिम्बेय नियम (गुण) (b) सहचर्य गुण
 (c) स्वरक नियम (d) योज्य तत्समक

12. ऐसा पूर्णांक युग्म लिखिए जिसका -

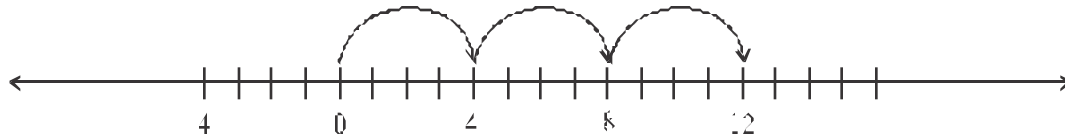
- (a) योग -8 (b) अन्तर -18 है (c) योग 0 है।
 (संकेत (a) क लिर (i) $-5 + (-3) = -8$ (ii) $-1 + (-7) = -8$)

1.6 पूर्णाकों का गुणा (Multiplication of integers)

धन पूर्णाकों का गुणा—

हम जानते हैं 4×3 यानी 4 तीन बार अर्थात् $4 + 4 + 4 = 12$

इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार निरूपित कर सकते हैं—

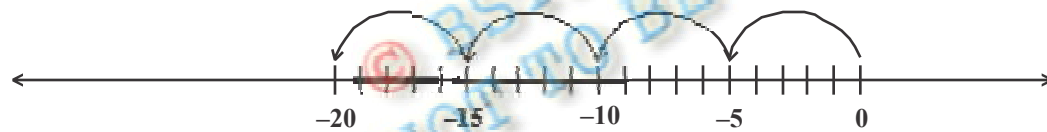


संख्या रेखा से स्पष्ट है $\rightarrow 4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$ अतः $3 \times 4 = 12$

धन पूर्णांक का ऋण पूर्णांक से गुणा—

जैसे $4 \times (-5)$ का अर्थ है: -5 को चार बार जोड़ना।

अतः प्रकार $(-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -20$ है, संख्या रेखा द्वारा इसे इस प्रकार निरूपित कर सकते हैं—



संख्या रेखा से स्पष्ट है $\rightarrow (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = 4 \times (-5) = -20$

स्पष्ट है कि—

(i) दो धन पूर्णाकों का गुणनफल धनात्मक होता है।

जैसे कि $+a$ और $-b$ दो धन पूर्णांक हैं।

$$\therefore (-a) \times (+b) = +ab$$

(ii) एक धन पूर्णांक को दूसरे ऋण पूर्णांक से गुणा करने से प्राप्त गुणनफल ऋणात्मक होता है।

जैसे कि $+a$ और $-b$ दो पूर्णांक हैं।

$$\therefore (-a) \times (-b) = -ab$$

स्वयं करके देखिए

$$5 \times (-6) =$$

$$4 \times (-2) =$$

$$3 \times (-4) =$$

$$5 \times (-2) =$$

$$2 \times 7 =$$

आइए निम्न पैटर्न पर विचार करें:

$$\begin{aligned} 5 \times 4 &= 20 \downarrow \\ 5 \times 3 &= 15 \\ 5 \times 2 &= 10 \\ 5 \times 1 &= 5 \\ 5 \times 0 &= 0 \\ 5 \times (-1) &=? \end{aligned}$$

बगल की रसी में गुणनफल के पैटर्न को देखने से पता चलता है कि ऊपर से नीचे की ओर संख्या क्रमशः 5 कम होती जाती है। अतः $5 \times (-1) = -5$

इसी प्रकार से इनके लिए दो पैटर्न बनाइए—

- (i) 4×3 से शुरू कीजिए।
 (ii) 7×3 से शुरू कीजिए।

अतः एक धन पूर्णांक व एक ऋण पूर्णांक का गुणा करने पर **सदैव एक ऋण पूर्णांक** प्राप्त होता है।

दो ऋण पूर्णांक का गुणा

युग: निम्न पैटर्न पर विचार करें—

$$\begin{aligned} 5 \times (-1) &= -5 \downarrow \\ 4 \times (-1) &= -4 \\ 3 \times (-1) &= -3 \\ 2 \times (-1) &= -2 \\ 1 \times (-1) &= -1 \\ 0 \times (-1) &= 0 \\ (-1) \times (-1) &=? \end{aligned}$$

बगल की सारणी में गुणनफल के पैटर्न को देखने से पता चलता है कि ऊपर से नीचे की ओर संख्या का मान क्रमशः 1 (एक) अधिक होता जाता है। अतः $-1 \times (-1) = +1$ इस पैटर्न को आगे बढ़ाइए।

| |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(+a) \times (+b) = +ab$ $(-a) \times (-b) = +ab$ $(-a) \times (+b) = -ab$ $(+a) \times (-b) = -ab$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

ऐसे और पैटर्न बनाएँ— (i) -5×3 से शुरू करें (ii) -3×4 से शुरू करें

अतः जब दो ऋण पूर्णांकों को गुणा किया जाता है तो सदैव एक धन पूर्णांक प्राप्त होता है।

निम्न उदाहरण को पढ़ें और समझें-

- (i) $(+5) \times (+4) = +20$ या $5 \times 4 = 20$
 (ii) $(-5) \times (+4) = -20$ या $-5 \times 4 = -20$
 (iii) $(+8) \times (-2) = -16$ या $8 \times (-2) = -16$
 (iv) $-10 \times (-5) = +50$ या $-10 \times (-5) = 50$

रवयं करके देखिए

- (i) $-8 \times (-20) =$ (ii) $-5 \times (-15) =$ (iii) $-10 \times 40 =$
 (iv) $-30 \times 20 =$ (v) $18 \times 4 =$ (vi) $16 \times (-5) =$

प्रयत्न कीजिए : प्रत्येक पंक्ति में सप्तम और दशम स्तंभ से गुणा कीजिए व पढ़िए-

| x | -9 | -8 | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 9 | -81 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

1.7 तीन अथवा अधिक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल : आइए गिन लिखित उदाहरणों को देखें—

- (a) $(-2) \times (-4) = 8$
 (b) $(-2) \times (-4) \times (-5) = [(-2) \times (-4)] \times (-5) = 8 \times (-5) = -40$
 (c) $(-3) \times (-4) \times (-6) \times (-8) = [(-3) \times (-4)] \times [(-6) \times (-8)] = 12 \times 48 = 576$
 (d) $(-4) \times (-5) \times (-2) \times (-6) \times (-3) = [(-4) \times (-5)] \times [(-2) \times (-6)] \times (-3) = 20 \times 12 \times (-3) = 240 \times (-3) = -720$

उपर्युक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि—

- (a) पहले दो पूर्णांकों का गुणनफल प्राप्त करते हैं। फिर प्राप्त गुणनफल को अन्य पूर्णांक से गुणा करते हैं।
 (b) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।
 (c) तीन ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक होता है।
 (d) चार ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।

अतः प्रेक्षणों से स्पष्ट होता है कि यदि ऋणात्मक पूर्णांक को सम बार गुणा किया जाय तो गुणनफल धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है, जबकि ऋणात्मक पूर्णांक को विषम बार गुणा किया जाय तो गुणनफल ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

आप भी पाँच ऋणात्मक पूर्णांक लेकर गुणनफल की जाँच कीजिए, क्या गुणनफल ऋणात्मक प्राप्त होता है?

1.8 पूर्णांकों के गुणन संक्रिया के गुण

I. गुणन के लिए संवरक

निम्न पर विचार करें—

$$4 \times 2 = 8$$

$$-5 \times -3 = 15$$

$$-2 \times 4 = -8$$

$$3 \times -6 = -18$$

इन उदाहरणों से स्पष्ट है कि दो पूर्णाकों का गुणनफल एक पूर्णांक ही हो सकता है। अतः पूर्णांक गुणा के लिए स्वरूप होता है। माना कि a और b दो पूर्णांक हैं तथा उसका गुणनफल 'c' है तो c भी एक पूर्णांक होगा, क्या आप एक कड़ी का पूर्णांक सच सकते हैं जिनका गुणनफल पूर्णांक न हो?

II. गुणन की क्रमविनिमेयता

इस तथ्य पर विचार करें-

| | | |
|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $-8 \times 2 = -16$ | इसी प्रकार $5 \times \square = 20$ | $-2 \times 3 = -6$ |
| $2 \times \square = -16$ | $4 \times \square = 20$ | $3 \times \square = -6$ |
| $\rightarrow \square \times 2 = 2 \times \square$ | $\rightarrow 5 \times \square = 4 \times \square$ | $\rightarrow -2 \times 3 = 3 \times -2$ |

उपरोक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि दो पूर्णाकों के गुणन में पहले पूर्णांक को दूसरे से गुणा करें और दूसरे को पहले से, गुणनफल बराबर होते हैं। अतः पूर्णाकों का गुणन क्रम विनिमेय गुण का पालन करता है। यदि a और b दो पूर्णांक हैं तो $a \times b = b \times a$ भी सत्य है।

III. गुणन साहचर्य गुण

निम्न पर विचार करें-

| | | |
|-----------------------|-------------------------|-------------------------|
| $2 \times 3 \times 4$ | $(2 \times 3) \times 4$ | $2 \times (3 \times 4)$ |
| | $= 6 \times 4$ | $= 2 \times 12$ |
| | $= 24$ | $= 24$ |

अतः $(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$

इसी प्रकार-

| | | |
|------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $-4 \times 5 \times 6$ | $(-4 \times 5) \times 6$ | $-4 \times (5 \times 6)$ |
| | $= -20 \times 6$ | $= -4 \times 30$ |
| | $= -120$ | $= -120$ |

अतः $(-4 \times 5) \times 6 = -4 \times (5 \times 6)$

नीचे दिए गए तीन पूर्णाकों का इसी प्रकार समूह बदलकर गुणन कीजिए।

(i) $3 \times -2 \times 4$, (ii) $-3 \times -5 \times 7$

क्या इनका गुणनफल समूह बदलने से बदला?

व्यापक रूप में किन्हीं तीन पूर्णांक a, b, c के लिए—

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

a, b, c में प्रत्येक के लिए एक मान ले लें और इस गुण का सत्यापन करें।

अतः पूर्ण संख्याओं की तरह तीन पूर्णांकों का गुणनफल उनके राशुह बनाने पर निर्भर नहीं करता है। अर्थात् पहली का दूसरी के साथ गुण करने की रीत से पूर्णांक के साथ गुणा करें या दूसरे व तीसरे पूर्णांक को गुणा कर पहले पूर्णांक के साथ उनके गुणनफल को गुणा करें, गुणनफल समान आता है। यह पूर्णांकों के लिए गुणन का **साहचर्य गुण** कहलाता है।

व्यापक रूप में, मान कि a, b और c तीन पूर्णांक हैं तो $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

भी सत्य है।

IV. वितरण नियम

निम्न पर विचार करें—

$$\begin{aligned} 4 \times (5 + 8) &= 4 \times 5 + 4 \times 8 \\ -4 \times 13 &= 20 + 32 \\ -52 &= 52 \end{aligned}$$

अतः $4 \times (5 + 8) = 4 \times 5 + 4 \times 8$

$$\begin{aligned} \text{इसी प्रकार, } 4 \times (-5 + 7) &= 4 \times (-5) + 4 \times 7 \\ -4 \times 2 &= -20 - 28 \\ -8 &= 8 \end{aligned}$$

अतः $4 \times (-5 + 7) = 4 \times (-5) + 4 \times 7$

$$\begin{aligned} \text{इसी प्रकार, } 4 \times [5 + (-7)] &= 4 \times 5 + 4 \times (-7) \\ 4 \times (5 - 7) &= 20 - 28 \\ -4 \times (-2) &= -20 - 28 \\ -8 &= -8 \end{aligned}$$

अतः $4 \times [5 + (-7)] = 4 \times 5 + 4 \times (-7)$

उपर्युक्त तथ्यों से स्पष्ट है कि दो या अधिक पूर्णांकों के योग में किसी अन्य पूर्णांक से गुणा किया जाय तो गुणनफल वही आता है, जो गुणक के पूर्णांकों में अलग-अलग गुणा करने से प्राप्त गुणनफलों का योग होता है।

अतः इस गुण को **वितरण नियम (distributive law)** कहते हैं। माना कि x और y दो

पूर्णांक है, जिसके योगफल $(x+y)$ है, इसके योगफल में a पूर्णांक से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल वही आता है जहाँ पूर्णांक a को x और y के साथ अलग-अलग गुणा कर जोड़ने पर आता है— $a(x+y) = ax + ay$

V. गुणन के लिए तत्समक अवयव

निम्न पर गौर करें—

$$4 \times 1 = 4$$

$$-2 \times 1 = -2$$

$$(-3) \times 1 = \dots\dots\dots$$

$$(4) \times 1 = \dots\dots\dots$$

$$25 \times 1 = \dots\dots\dots$$

$$-32 \times 1 = \dots\dots\dots$$

उपरोक्त सारणी से हम जात हैं कि किसी पूर्णांक को एक से गुणा करने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है। अतः पूर्णाकों में गुणन के लिए तत्समक अवयव 1 है।

VI. निम्न को समझें—

$$5 \times (-1) = -5$$

$$-5 \times (-1) = +5$$

$$-1 \times (-5) = +5$$

$$-1 \times 5 = -5$$

इस प्रकार किसी पूर्णांक में -1 से गुणा करने पर गुणनफल विपरीत चिह्न का वही पूर्णांक प्राप्त होता है, अर्थात् योगात्मक प्रतिलोम प्राप्त होता है। यदि a कोई पूर्णांक हो, तो $a \times -1 = -a$ तथा $-a \times -1 = a$

VII. निम्न को समझें—

$$2 \times 0 = 0$$

$$-4 \times 0 = 0$$

$$25 \times 0 = \dots\dots\dots$$

$$37 \times 0 = \dots\dots\dots$$

$$125 \times 0 = \dots\dots\dots$$

$$229 \times 0 = \dots\dots\dots$$

अतः किसी पूर्णांक में शून्य से गुणा करने पर गुणनफल शून्य प्राप्त होता है। मान कि a एक पूर्णांक है, तो $a \times 0 = 0$

VIII. निम्न को समझें—

$$8 > 5$$

$$\text{या, } 8 \times 2 > 5 \times 2$$

$$\text{युत: } 8 > 5$$

$$8 \times -2 < 5 \times -2$$

यदि a, b तथा c ऐसी पूर्णांक हैं जिनके $a > b$ तो

(i) $a \times c > b \times c$ यदि $c =$ धनपूर्णांक हो,

(ii) $a \times c < b \times c$ यदि $c =$ ऋणपूर्णांक हो

IX. (i) $2 \times 3 \times 4 = (2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4) = (4 \times 2) \times 3$

(ii) $(-2) \times (-3) \times (-4) = [(-2) \times (-3)] \times (-4) = (-2) \times [(-3) \times (-4)] = [(-2) \times (-4)] \times (-3)$

अतः तीन पूर्णांकों का गुणा करने में किन्हीं दो पूर्णांकों के गुणनफल में शेष तीसरे पूर्णांक के गुणा करने से अंतिम गुणनफल वही रहता है।

स्वयं करके देखिए

निम्न गुणों के सामने प्रत्येक का एक उचित उदाहरण दें (गुणा के लिए)

| गुण | गुणा के अन्तर्गत | उदाहरण |
|-----------------|------------------|--------|
| संघर्ष गुण | | |
| वितरण गुण | | |
| संघर्ष गुण | | |
| क्रम विनिमय गुण | | |
| व्यसमक गुण | | |

1.9 गुणा को आसान बनाने का तरीका

$20 \times 78 \times 5$ को हल करने के लिए हम इसे दो तरीके से कर सकते हैं—

$$= (20 \times 78) \times 5 = 1560 \times 5 = 7800$$

अथवा, $(20 \times 5) \times 78$

$$= 100 \times 78 = 7800$$

कौन-सी विधि आसान है?

स्पष्ट है कि दूसरी विधि आसान है, क्योंकि 20 को 5 से गुणा करने पर 100 प्राप्त होता है, जिसे 78 से गुणा करना आसान है। ध्यान दें कि दूसरी विधि में पूर्णांकों की क्रमविनिमयता और सहचरिता के गुणों का उपयोग किया।

उदाहरण-1.

(i) 28×12

$$\begin{aligned} 28 \times 12 &= 28 \times (10 + 2) \\ &= 28 \times 10 + 28 \times 2 \\ &= 280 + 56 = 336 \end{aligned}$$

(ii) -8×48

$$\begin{aligned} -8 \times 48 &= -8 \times (50 - 2) \\ &= -8 \times 50 + [(-8) \times (-2)] \\ &= -400 - 16 = -384 \end{aligned}$$

(iii) $(-25) \times (-98)$

$$\begin{aligned} &= -25 \times (-100 + 2) \\ &= (-25) \times (-100) + (-25) \times 2 \\ &= 2500 - 50 = 2450 \end{aligned}$$

(iv) $54 \times (-8) + (-54) \times 2$

$$\begin{aligned} &= -54 \times 8 + (-54) \times 2 \\ &= -54 \times (8 + 2) = -54 \times 10 \\ &= -540 \end{aligned}$$

उपरोक्त उदाहरणों को देखने से पता चलता है कि गुणा के नियमों/गुणों का उपयोग कर गुणनफल को आसानी से प्राप्त किया जा सकता है।

स्वयं करके देखिए

गुणा के नियमों द्वारा निम्नलिखित को सरल करें-

(a) $-50 \times 48 \times 2$

(b) 850×48

(c) -75×52

(d) $-38 \times 2 - 38 \times 8$

शब्द समस्याएँ

उदाहरण-2. दो पूर्णाकों का गुणनफल -30 है यदि उनमें से एक पूर्णांक 15 है तो दूसरी पूर्णांक ज्ञात करें।

हल : यहाँ, एक पूर्णांक $= 15$

$$\text{गुणनफल} = -30$$

$$\therefore \text{एक पूर्णांक} \times \text{दूसरा पूर्णांक} = \text{गुणनफल}$$

$$\therefore 15 \times \text{दूसरा पूर्णांक} = -30$$

$$\therefore \text{दूसरा पूर्णांक} = \frac{-30}{15} = -2 \text{ उत्तर।}$$

प्रश्नावली-1.2

1. गुणा कीजिए-

- | | |
|---------------------------------------------------|------------------------------------|
| (a) $225 \times (-4)$ | (b) $(-405) \times (-5)$ |
| (c) $(-80) \times (-50)$ | (d) $(-11) \times 15$ |
| (e) $(-3) \times 35 \times (-10)$ | (f) $(-25) \times 0$ |
| (g) $(-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4)$ | (h) $(-2) \times (-2) \times (-2)$ |
| (i) $(-20) \times (-15) \times (-25) \times (-5)$ | (j) $-50 \times 5 \times (-20)$ |

2. निम्नलिखित में सत्य और असत्य को चुनें-

- | | |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (i) $18 \times (-2) - (-2) \times 18$ | (ii) $-38 \times 1 - 38$ |
| (iii) $(-20) \times (-5) - (-5) \times (-20)$ | (iv) $43 \times 0 - 43$ |
| (v) $1 \times -425 = -425$ | (vi) $-1 \times 25 = -25$ |
| (vii) $[(-2) \times (-12)] \times -24 - (-2) \times [(-12) \times (-24)]$ | |
| (viii) $(-5) \times (2 + 3) = (-5) \times 2 + (-5) \times 3$ | |

3. निम्नलिखित के सामने उसके उचित गुण को लिखिए-

- | | |
|------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (i) $-25 \times (8 + 2) = (-25) \times 8 + (-25) \times 2$ | |
| (ii) $(-8) \times (-1) = (-8) \times (-1)$ | (iv) $-2 \times -10 = 20$ |
| (iii) $(20 \times 30) \times 10 = 20 \times (30 \times 10)$ | (v) $-5 \times 1 = -5$ |

4. सत्यापित करें-

- | |
|-------------------------------------------------------------|
| (i) $42 \times (-5) = -5 \times 42$ |
| (ii) $25 \times (28 + 2) = 25 \times 28 + 25 \times 2$ |
| (iii) $(50 \times 60) \times 70 = 50 \times (60 \times 70)$ |
| (iv) $(-24) \times (5 \times 2) = (-24 \times 5) \times 2$ |

5. किस पूर्णांक में (-1) का गुणा करने पर गुणनफल निम्न प्राप्त होते हैं-

- | | | | | |
|--------|----------|---------|--------|---------|
| (i) 20 | (ii) -15 | (iii) 0 | (iv) 1 | (v) -50 |
|--------|----------|---------|--------|---------|

6. $-1 \times 0 = 0$ के आधार पर सत्यापित कीजिए कि दो ऋण पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक पूर्णांक होता है।

$$\text{(उदाहरण)} \quad -4 \times (2 - 2) = 0 \text{ या } -4 \times [2 + (-2)] = -4 \times 2 + (-4) \times (-2) = -8 + (-4) \times (-2)$$

इसका मान शून्य राभी होगा जब $(-4) \times (-2) = -8$

∴ दा ढ्रणात्मक पूर्णाकों का गुणनफल धन पूर्णाक होता है।

7. सरल कीजिए (विभिन्न गुणों का उपयोग करते हुए)

- (i) $(-7) \times 5 + (-7) \times 11$ (ii) $675 \times (-5) - 5 \times (-675)$
 (iii) $8 \times (50 - 4)$ (iv) $5 \times 27 \times (-4)$
 (v) 987×98 (vi) $-57 \times (-19) + 57$

8. निम्नलिखित सारणी को पूरा करें-

| x | 0 | -1 | -2 | -3 | 4 | 6 |
|----|---|----|----|----|---|---|
| -2 | | | | | | |
| -3 | | | | | | |
| -4 | | | | | | |
| -1 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |

9. निम्नलिखित में से कौन सत्य है और कौन असत्य?

- (i) -20 का योग्य प्रतिरोम **20** है। ()
 (ii) किसी पूर्णाक का योग्य प्रतिलोम प्राप्त करने के लिए उसमें शून्य से गुणा करते हैं। ()
 (iii) **5 ढ्रण पूर्णाकों** का गुणनफल धन पूर्णाक होता है। ()
 (iv) **चार ढ्रण पूर्णाकों** का गुणनफल धन पूर्णाक होता है। ()
 (v) $-4 \times 1 = -4$ ()
 (vi) $-5 \times 0 = 0$ ()

10. निम्नलिखित में पूर्णाकों के गुण में सही कथनों के आगे सही का निशान लगाएँ तथा गलत कथनों को ठीक करके लिखें।

- (i) $(-2) \times (-3) = -6$ () (ii) $(-4) \times (18) = 152$ ()
 (iii) $(-2) \times (-2) = 14$ () (iv) $(-3) \times (14) = -12$ ()

11. किसी हेरीकरण (हंडा) प्रक्रिया में, कमरे के तापमान को 40°C से 5°C प्रति घंटे की दर से कम करने की आवश्यकता है। इस प्रक्रिया के शुरू होने के 10 मिनट बाद कमरे का तापमान क्या होगा?
12. दस प्रश्नोंवाले एक कक्षा टेस्ट में प्रत्येक सही उत्तर के लिए 5 अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (-2) अंक दिए जाते हैं एवं प्रयत्न नहीं किये गये प्रश्नों के लिए शून्य दिया जाता है।
- (i) मोहन दस प्रश्नों का सही और छह प्रश्नों का गलत उत्तर देता है, उसको द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं?
- (ii) रेशम के पाँच उत्तर सही हैं और पाँच उत्तर गलत हैं, उसे के द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं?
- (iii) हीना ने कुल सात प्रश्न डल किए हैं, उनमें सातों के उत्तर सही हैं और पाँच के उत्तर गलत हैं तो, उसको द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं?
13. एक सीमेंट कंपनी का सफेद सीमेंट बेचने पर 8 रुपये प्रति बोरी की दर से लाभ होता है और स्लेटी (Grey) रंग की सीमेंट बेचने पर 5 रुपये प्रति बोरी की दर से हानि होती है।
- (a) किसी नहीने ने यह कंपनी सफेद सीमेंट की 3000 बोरियों और स्लेटी सीमेंट की 5000 बोरियाँ बेची हैं। उसका लाभ अथवा हानि क्या है?
- (b) यदि बेची गई सफेद सीमेंट की बोरियों की संख्या 6400 है तो, कंपनी को स्लेटी सीमेंट की कितनी बोरियाँ बेचनी चाहिए, ताकि उसे ना तो लाभ हो और ना हानि?
14. एक विद्युत कम्पनी प्रत्येक रंगीन टीव्ही पर 80 रुपये का लाभ कमाता है और प्रत्येक रेफ्रिजरेटर पर 60 रुपये का हानि हाता है।
- (a) कम्पनी 5000 रंगीन टीव्ही और 4000 रेफ्रिजरेटर एक महीने में बचता है। तो कम्पनी को केरना लाभ या हानि कर है?
- (b) कम्पनी द्वारा 1300 रेफ्रिजरेटर बेचने पर कम्पनी केराना रंगीन टीव्ही बेचे कि उसे न लाभ हो और न हानि?

1.10 पूर्णाकों में भाग संक्रिया (Division Operation in Integers)

हम जानते हैं कि भाग, गुणा की विपरीत प्रक्रिया है, जैसे $4 \times 7 = 28$ है, इसलिए $28 \div 4 = 7$ तथा $28 \div 7 = 4$ है।

इसी प्रकार $5 \times 4 = 20$ और $20 \div 5 = 4$ एवं $20 \div 4 = 5$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि पूर्ण संख्याओं के प्रत्येक गुणन कथन के लिए दो विभाजन या भाग, कथन होते हैं।

क्या आप पूर्णाकों के लिए गुणन कथन एवं संगत भाग कथनों को लिख सकते हैं?

निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए।

| गुणन कथन | संगत भाग कथन | |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| | I | II |
| $2 \times (-6) = (-12)$ | $(-12) \div (-6) = 2$ | $(-12) \div 2 = (-6)$ |
| $(-4) \times 5 = (-20)$ | $(-20) \div (5) = (-4)$ | $(-20) \div (-4) = 5$ |
| $(-8) \times (9) = 72$ | $72 \div \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ | $72 \div \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ |
| $(-3) \times (7) = \underline{\hspace{1cm}}$ | $\underline{\hspace{1cm}} \div (-3) = \underline{\hspace{1cm}}$ | $\underline{\hspace{1cm}}$ |
| $(-8) \times 4 = \underline{\hspace{1cm}}$ | $\underline{\hspace{1cm}}$ | $\underline{\hspace{1cm}}$ |
| $5 \times (-9) = \underline{\hspace{1cm}}$ | $\underline{\hspace{1cm}}$ | $\underline{\hspace{1cm}}$ |
| $(-10) \times (-5) = \underline{\hspace{1cm}}$ | $\underline{\hspace{1cm}}$ | $\underline{\hspace{1cm}}$ |

सम्यक्ता से हम देखते हैं कि—

$$(-12) \div 2 = (-6)$$

$$(-20) \div (5) = (-4)$$

$$(-32) \div 4 = -8$$

$$(-15) \div 5 = -9$$

हम देखते हैं कि जब हम एक ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में प्राप्त करते हैं और इसके पश्चात् भागफल से कटले ऋण चिह्न (-) रख देते हैं। इस प्रकार, हम एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त करते हैं।

हम यह भी देखते हैं कि—

$$72 \div (-8) = -9$$

$$\text{और } 50 \div (-10) = -5$$

$$72 \div (-9) = -8$$

$$50 \div (-5) = -10$$

इस प्रकार, हम यह कह सकते हैं कि जब हम एक धनात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और उसके पश्चात् ऋणात्मक लक्षण चिह्न (-) रख देते हैं। इस प्रकार, हमें एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

व्यापक रूप में,

$$(+a) \div (+b) = +\frac{a}{b}, \quad (-a) \div (-b) = +\frac{a}{b}, \quad (+a) \div (-b) = -\frac{a}{b}, \quad (-a) \div (+b) = -\frac{a}{b}$$

स्वयं कीजिए

- | | | | | | |
|-----|----------------|-----|----------------|-----|----------------|
| (a) | $-50 \div 10$ | (b) | $-56 \div 7$ | (c) | $85 \div (-5)$ |
| (d) | $90 \div (-3)$ | (e) | $-100 \div 20$ | | |

उदाहरण-3. किसी टेस्ट में प्रत्येक सही उत्तर के लिए +6 अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (-2) अंक दिए जाते हैं। (i) रखा ने सभी प्रश्नों के उत्तर दिए और 36 अंक प्राप्त किए जबकि उसने 12 उत्तर सही पाए। (ii) पंजन ने भी कुछ प्रश्नों के उत्तर दिए और उसने -12 अंक प्राप्त किए, जबकि उसके पास सही उत्तर सही पाए गये। प्रत्येक ने कितने प्रश्नों के उत्तर गलत दिए?

- हल :** (i) एक सही उत्तर के लिए दिये गये अंक = 6
 अतः 12 सही उत्तरों के लिए दिये गये अंक = $6 \times 12 = 72$
 रखा के द्वारा प्राप्त किये गये अंक = 36
 गलत उत्तरों के लिए प्राप्त अंक = $36 - 72 = -36$
 (-2) अंक मिलता है एक गलत उत्तर पर
इसलिए (-36) अंक मिलना $-36 \div (-2) = 18$ गलत उत्तरों पर
 \therefore गलत उत्तरों की संख्या = 18
- (ii) पंजन सही उत्तरों के लिए दिये गये अंक = $5 \times 6 = 30$
 पंजन द्वारा प्राप्त किये गये अंक = -12
 गलत उत्तरों के लिए प्राप्त अंक = $-12 - 30 = -42$
 \therefore -2 अंक मिलता है एक गलत उत्तर पर
 \therefore -42 अंक मिलना $-42 \div (-2) = 21$ गलत उत्तर पर
 \therefore गलत उत्तरों की संख्या = 21

1.11 भाग संक्रिया के गुण (Properties of Division Operation)

निम्नलिखित पर विचार करें-

I. $-6 \div (-2) = 3$, पूर्णांक संख्या है $6 \div (-2) = -3$ एक पूर्णांक है
 परन्तु $-2 \div (-6) = \frac{-2}{-6}$, पूर्णांक संख्या नहीं है।

उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट है कि केवल दो पूर्णाकों का भागफल एक पूर्णांक होगा या नहीं भी।

II. $-12 \div (-4) = 3$ $-4 \div (-12) = \frac{-4}{-12}$

$\therefore -12 \div (-4) \neq -4 \div (-12)$

अतः \mathbb{Z} में क्रम विनिमेय गुण नहीं है।

III. $-4 \div 0 =$ अपरिभाषित $5 \div 0 =$ अपरिभाषित

अतः किसी भी पूर्णांक को शून्य से भाग करना अर्थहीन है। परन्तु $0 \div (-4) = 0$;
 $0 \div 5 = 0$

अतः शून्य में किसी भी पूर्णांक (शून्य को छोड़कर) से भाग करने पर भागफल शून्य होता है।

इसे एक उदाहरण लेकर समझा जा सकता है, जैसे $-0 \div 4 = ?$

हम जानते हैं, $0 = \frac{0}{4} = \frac{1-1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

IV. निम्नलिखित के साधें-

$-10 \div 1 = -10$

$+5 \div 1 = 5$

यह दर्शाता है कि किसी भी पूर्णांक में 1 से भाग देने पर भागफल वही पूर्णांक प्राप्त होता है। अतः पूर्णांक में भाग के लिए तत्समक अवयव 1 है। माना कि पूर्णांक a है, तो $a \div 1 = a$ क्या (-1) से भाग देने पर भी वही पूर्णांक प्राप्त होगा?

V. $(-4) \div (-1) = 4$

$-4 \div (-1) = 4$

अतः किसी भी पूर्णांक में (-1) से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त नहीं होता है।

- V. क्या हम कह सकते हैं $[(-8) \div (-4)] \div (-2)$ एवं $(-8) \div [(-4) \div (-2)]$ बराबर हैं? हम जानते हैं कि $[(-8) \div (-4)] \div (-2) = 2 \div (-2) = -1$
 और $(-8) \div [(-4) \div (-2)] = (-8) \div 2 = -4$
 अतः $[(-8) \div (-4)] \div (-2) \neq (-8) \div [(-4) \div (-2)]$
 क्या आप कह सकते हैं कि पूर्णाकों के लिए मन् साहचर्य है? नहीं।
 अपनी आर स पाँच अन्य उदाहरण लेकर इस सत्यापित कीजिए।

स्वयं करके देखिए

क्या मन् में संघटक, तत्समक, क्रम विनिमय साहचर्य नियम लागू है? एक-एक उदाहरण द्वारा समझाएँ।

प्रश्नावली- 1.3

1. हल कीजिए-

- (i) $(-40) \div 5$ (ii) $(-450) \div 3$ (iii) $(-45) \div (-5)$
 (iv) $(-56) \div (-4)$ (v) $25 \div 5$ (vi) $(-128) \div (-16)$
 (vii) $0 \div 50$ (viii) $50 \div 0$ (ix) $(-80) \div (-80)$

2. निम्नलिखित गुणा की क्रिया को भाग की दो प्रक्रिया में बदलिए-

- (i) $5 \times 8 = 40$ (ii) $-4 \times (-6) = 24$
 (iii) $-12 \times 9 = -108$ (iv) $-7 \times (-12) = 84$
 (v) $-10 \times 8 = -80$

3. खाली जगह में उपयुक्त पूर्णांक भरिए-

- (i) $\square \div (-8) = (-12)$ (ii) $\square \div 8 = (-9)$
 (iii) $24 \div \square = -4$ (iv) $-80 \div \square = 10$
 (v) $-48 \div 6 = \square$

4. निम्नलिखित में कौन सत्य तथा कौन असत्य है। हल कीजिए व बताइए।

- (i) $-4 \div 2 = 2 \div (-4)$ (ii) $(-2 \div 4) \div 6 = -2 \div (4 \div 6)$
 (iii) $-25 : 0 = 0$ (iv) $0 : 5 = 0$
 (v) $-125 : 1 = -125$ (vi) $-45 : (-45) = 1$

5. दोपहर 12 बजे तापमान शून्य से 10°C ऊपर था। यदि यह आधे रत तक 2°C प्रति घंटे की दर से कम होता है, तो फिर रात में तापमान शून्य से 8°C नीचे होगा? रात के 12 बजे तापमान क्या होगा?
6. एक लिफ्ट (lift) किसी खन कूपक में 6m प्रति मिनट की दर से नीचे जाता है। यदि नीचे जाना शुरू तब से 10m ऊपर से शुरू होता है, तो -350m पहुँचान में कितना समय लगेगा?

1.12 कई रांकियाओं युक्त व्यंजकों का सरलीकरण

उदाहरण-4. $8 + 20 \div 25$ का $\frac{1}{5} \times 10 - 4$

हल : $8 + 20 \div 25$ का $\frac{1}{5} \times 10 - 4$
 $= 8 + 20 \div 5 \times 10 - 4$
 $= 8 + 4 \times 10 - 4$
 $= 8 + 40 - 4$
 $= 44$

कार्य विधि-

- सबसे पहले "का" को हल करते हैं।
- क्रमबद्ध : फिर \times की क्रिया करते हैं।
- $+$ तथा $-$ की क्रिया में पहले धनात्मक संख्या के एक साथ और ऋणात्मक संख्या के एक साथ जोड़कर हटा देते हैं और फिर बड़ी संख्या वाली जगह देते हैं। (चिह्न रहित बड़ी संख्या)

उदाहरण-5. 240 का $\frac{5}{6}$

हल : 240 का $\frac{5}{6} = 40 \times 5$
 (अर्थ है 40 का 5 गुणा)
 अर्थात् $40 \times 5 = 200$.

उदाहरण-6. $350 \div \frac{7}{5}$

हल : $350 \div \frac{7}{5} = \overset{50}{350} \times \frac{5}{7} = 50 \times 5 = 250$

याद रखें

कई सांकेतिकों के सरलीकरण का क्रम

के लिए इन्हें याद रखें -

पहले 'का' कर, पीछे (+) भाग।

उस गुण अब जोड़-घटाव।।

कार्य विधि-

भाग के गुण में बदलकर भाग के अंदर आने वाली संख्या (भिन्न) को उलट देते हैं, फिर गुणा की क्रिया करते हैं। गुण की क्रिया में अंश और हर को किसी उभयनिष्ठ संख्या, जिससे अंश और हर पूरी तरह विभक्तित हत हो, उस संख्या से भाग देकर उस संख्या के ऊपर या नीचे नगण्य को लिखते हैं, जैसा कि उदाहरण से स्पष्ट है।

1.13 कोष्ठकों का प्रयोग (Use of brackets) : आइए निम्न उदाहरण पर विचार करें-

उदाहरण-7. कुछ टॉपियों को 5 लड़के और 3 लड़कियों में बराबर-बराबर इस प्रकार बाँटना है कि प्रत्येक को 10 टॉपी मिले तो ब्याँ कुल कितनी टॉपियाँ हैं?

हल : हर का हल दो लड़कों ने दो भिन्न तरीकों से निकाला-

| | | | |
|----------|-------------------------------|----------|-----------------------|
| कुल टॉपी | $= 5 \times 10 + 3 \times 10$ | कुल टॉपी | $= 10 \times (5 + 3)$ |
| | $= 50 + 30$ | | $= 10 \times 8$ |
| | $= 80$ | | $= 80$ |

अतः उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट होता है कि समस्याओं को हल करण में कोष्ठक का उपयोग किया जाता है, जिससे समस्या का समाधान करना आसान हो जाता है।

कोष्ठक (Brackets) निम्न प्रकार के हैं-

- (i) **रेखा कोष्ठक (line bracket) :** इसे सरल रेखा द्वारा व्यंजक के ऊपर लगाते हैं, जिसका हल पहले करना है। जैसे $- 3 + 4 - 2 + (2 - 3 + 4)$ में $2 - 3$ का पहले हल करना है।
- (ii) **छोटा कोष्ठक (Small bracket या Parenthesis) :** इसका चिह्न "()" जैसी $- 2 + 3 \times (4 - 2)$ इन्हें $4 - 2$ को पहले हल करना है।
- (iii) **मँझला कोष्ठक (Curly bracket या Braces) :** इसका चिह्न "{ }" है।
- (iv) **बड़ा कोष्ठक (Big bracket या Square bracket) :** इसका चिह्न "[]" है। कोष्ठकों के तोड़ने अर्थात् व्यंजकों के सरलीकरण का काम इस प्रकार है-पहले

रेखा-कोष्ठक, तब छोटा कोष्ठक, पुनः मंडल कोष्ठक और अंत में बड़े कोष्ठक को तोड़ते हैं। अर्थात् कोष्ठक के अन्दर के व्यंजकों को सरलीकरण करते हैं।

निम्नलिखित उदाहरण पर गौर करें-

उदाहरण-8. $(14 \div 7) \times [8 + \{3 - \overline{8-2}\}] - (5-2)$

हल : $(14 \div 7) \times [8 + \{3 + \overline{8-2}\}] - (5-2)$

$$\begin{aligned} &= \left(14 \times \frac{1}{7}\right) \times [8 + \{3 + 6\}] - 3 \\ &= 2 \times [8 + 9] - 3 \\ &= 2 \times 17 - 3 \\ &= 34 - 3 = 31 \end{aligned}$$

उपर्युक्त उदाहरण के हल से स्पष्ट होता है कि-

- (i) सबसे पहले रेखा कोष्ठक के भीतर की संक्रिया करत हैं।
- (ii) उसके बाद छोटा कोष्ठक का
- (iii) तत्पश्चात मंडल कोष्ठक का और
- (iv) अंत में बड़ा कोष्ठक के भीतर की संक्रिया करते हैं।

हमें कोष्ठक का तोड़ते या हटाते समय निम्नलिखित तथ्यों पर ध्यान देना चाहिए-

- (i) यदि किसी कोष्ठक के पहले संख्यांक है तो इसका अर्थ है कि कोष्ठक के भीतर की प्रत्येक संख्या से गुण करना।
- (ii) यदि कोष्ठक के पहले चिह्न (-) चिह्न है तो कोष्ठक के भीतर के प्रत्येक संख्या (पद) का चिह्न बदल जाता है। (सिक्त + और - चिह्न) [जैसे : $-(8-2) = -8-2$]
- (iii) यदि कोष्ठक के बहर धन (+) चिह्न है तो कोष्ठक के भीतर के प्रत्येक संख्या (पद) का चिह्न में कोई परिवर्तन नहीं होता है।
- (iv) कोष्ठक के बहर यदि कोई चिह्न न हो तो गुणा का चिह्न (x) समझा जात है।
- (v) यदि एक ही कोष्ठक के अन्दर कोई विज्ञेय संख्या (पद) हो तो संक्रिया में इस क्रम ("का", \div , \times , $+$, $-$) का पालन करें।

इसे सहायता से याद रखने के लिए BODMAS के अक्षरों का क्रम याद रखें। अर्थात्

| | | |
|---|---|----------------------|
| B | → | Bracket (कोष्ठक) |
| O | → | Of (का) |
| D | → | Division (भाग) |
| M | → | Multiplication (गुण) |
| A | → | Addition (जोड़) |
| S | → | Subtraction (घटाव) |

कोष्ठक लगाने का नियम-

- (i) यदि कोष्ठक के अंदर ऋण (-) चिह्न रखते हैं तो कोष्ठक के भीतर **हले जानेवाले** प्रत्येक संख्या (पद) का चिह्न (+ और -) बदलकर रखते हैं। जैसे : $-12+4-2-5 = -(12-4+2+5)$
- (ii) यदि कोष्ठक के बाहर धन (+) चिह्न रखते हैं तो कोष्ठक के भीतर **हले जानेवाले** किसी भी संख्या (पद) का चिह्न **नहीं बदलता है**। जैसे : $-12+4-2-5 = +(-12+4-2+5)$

उदाहरण-9. मनीष अपने पिता से 50 रुपये माता से 30 रुपये लेकर बाजार गया। इन रुपयों में से 50 रुपये का खसने कपड़ा खरीदा। बचे हुए धन के 5वें भाग से एक पुस्तक खरीदा। **उक्त विवरण को कोष्ठकों की सहायता से गणितीय रूप में लिखिए तथा बताइए कि मनीष ने कितने रुपये की पुस्तक खरीदी?**

हल : $[(50+30)-50] \div 5$ (उक्त विवरण को गणितीय रूप में)

$$= [90-50] \div 5$$

$$= 40 \div 5$$

$$= 40 \times \frac{1}{5} = 8$$

अतः मनीष = 8 रुपये की पुस्तक खरीदी।

प्रश्नावली-1.4

1. सरल कीजिए-

$$(i) 20 \text{ का } \frac{1}{4} \quad (ii) \frac{250}{9} \text{ का } \frac{3}{50} \quad (iii) 2\frac{1}{2} \div \frac{20}{8}$$

$$(iv) \frac{12}{7} \div \frac{9}{35} \quad (v) \frac{75}{18} \times \frac{60}{36}$$

$$(vi) 20 \text{ का } \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + 10 - 15 \quad (vii) 20 - (8 + 5)$$

$$(viii) 16 \div (15 - 8 - 3) + 4 \quad (ix) 14 \div \{3 \text{ का } 2 - (5 - 6)\} + 9$$

$$(x) (30 - 5 \times 6 + 2) \div 2$$

2. कोष्ठकों का प्रयोग कर निम्नलिखित प्रश्नों को गणितीय रूप दीजिए-

(i) 5 और 15 के योग में 18 से भाग देना।

(ii) 69 में 4 और 6 के गुणनफल से 1 कम का भाग देना।

(iii) राहुल ने अपनी 24 पेंसिलों में से 4 को अपने पास रखकर शेष को अपने 5 साथियों में बराबर-बराबर बाँट दिया। प्रत्येक साथी को कितनी पेंसिलें मिलीं ?

(iv) 25 तथा 5 के योग से 1 अधिक का 124 में भाग देना।

(v) 2 तथा 4 के गुणनफल से 2 कम का 9 से गुण कर गुणनफल में 6 से भाग देना।

3. सरल कीजिए-

$$(i) 50 + \{15 - 5 + (8 - 2)\} \quad (ii) 8 [6 + 2 \{5 - 4(5 - 8)\}]$$

$$(iii) 12 \div \overline{6 - 2} + 10 \quad (iv) 15 + [2 - 3 - \{2(5 - 4 + 1)\}]$$

$$(v) 103 - [144 \div (12 \times 12) + 5 + 12 \div \overline{6 - 2} + 10]$$

$$(vi) 5 [5 - \{5 - (5 - 5 - 5)\}]$$

$$(vii) 15 - (-3)(4 - 4) \div \{5 - (-6) \times (-3)\}$$

$$(viii) (-6) + (-6) \div 2 - \{(-5) \times (-1) - 2(4 - 2)\}$$

$$(ix) 25 + \left[20 - \left\{ 2 - \left(20 \div \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} - 8 \right] \right) \right\} \right]$$

हमने सीखा

1. पूर्णांक संख्याएँ – जब पूर्ण संख्या के परिवार में ऋणात्मक संख्या शामिल हो जाती है तो इस संख्या परिवार को पूर्णांक संख्याएँ कहते हैं। जैसे :- -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,
2. दो विपरीत पूर्णों को दर्शाने के लिए पूर्णांक का उपयोग किया जाता है, जैसे— ऊँचाई—गहराई, लाभ—हानि, ठण्डा—गर्म आदि।
3. ता धनात्मक पूर्णाकों को जोड़ने पर ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है तथा दो ऋणात्मक पूर्णाकों को जोड़ने पर ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है। यदि दो पूर्णांक विपरीत चिह्न के हों तो घट जतरो हैं तथा जिसका परिमाण बड़ा होता है उसका चिह्न बढ़ जाता है।
4. जब हमने जोड़ एवं घटा द्वारा संतुष्ट होनेवाले पूर्णों का अध्ययन किया है।
 - (अ) पूर्णांक जोड़ एवं घटा दोनों के लिए संवरक है। अर्थात् $a + b$ और $a - b$ दोनों पूर्ण पूर्णांक होते हैं, जहाँ a और b कोई भी पूर्णांक हैं।
 - (ब) पूर्णाकों के लिए योग क्रम विनिमेय है, अर्थात् सभी पूर्णाकों a तथा b के लिए $a + b = b + a$, परन्तु घटाव के लिए नहीं है अर्थात् $a - b \neq b - a$
 - (स) पूर्णाकों के लिए योग साहचर्य है, अर्थात् सभी पूर्णाकों a, b तथा c के लिए $(a + b) + c = a + (b + c)$ होता है। परन्तु घटाव के लिए साहचर्य नहीं है अर्थात् $(a - b) - c \neq a - (b - c)$
 - (द) शून्य एक अंतर्गत पूर्णांक शून्य तत्समक है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक a के लिए $a + 0 = 0 + a = a$ और $a - 0 = a$ है।
5. एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है, जबकि दो ऋणात्मक पूर्णाकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।
उदाहरण: $-2 \times 7 = -14$ और $-3 \times -8 = 24$ है।
6. एक से अधिक ऋण पूर्णाकों के गुणन की दशा में यदि ऋणात्मक पूर्णाकों की संख्या सम होने पर उनका गुणनफल धनात्मक होता है जबकि यह संख्या विषम होने पर उनका गुणनफल ऋणात्मक होता है।
7. पूर्णांक गुणन के अंतर्गत कुछ गुणों को दर्शाते हैं।
 - (अ) गुणन के अंतर्गत पूर्णांक संवृत होते हैं, अर्थात् किन्हीं दो पूर्णाकों a तथा b के लिए $a \times b$ एक पूर्णांक होता है।

- (ब) पूर्णांकों के लिए गुणन क्रम विनिमेय होता है, अर्थात् किन्हें दो पूर्णांक a तथा b के लिए $a \times b = b \times a$ होता है।
- (स) गुणन क अंतर्गत पूर्णांक 1, तत्समक है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक a के लिए $1 \times a = a \times 1 = a$ होता है।
- (द) पूर्णांक के लिए गुणन साहचर्य होता है, अर्थात् किन्हें तीन पूर्णांक a, b तथा c के लिए $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ होता है।
8. यन् एवं गुणन के अंतर्गत पूर्णांक चतुरस्र गुण का नालन करत है। अर्थात् किन्हें तीन पूर्णांक a, b तथा c के लिए $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ होता है।
9. ये एवं गुणन के अंतर्गत क्रम विनिमेय, साहचर्य और चतुरस्रता के गुण इनके परिवर्तन को आसान बनाते हैं।
10. (अ) किन्हें दो पूर्णांक का भागफल एक पूर्णांक हो सी सकता है और नहीं भी।
- (ब) जब एक धनात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है तो प्राप्त भागफल धनात्मक होता है।
- (स) जब एक धनात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है या जब एक ऋणात्मक पूर्णांक को एक धनात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है, तो प्राप्त भागफल एक ऋणात्मक होता है।
- (द) एक ऋणात्मक पूर्णांक को दूसरे ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देने पर प्राप्त भागफल एक धनात्मक होता है।
11. (अ) भाग में क्रम विनिमेय गुण नहीं होता है।
- (ब) शून्य में किसी भी पूर्णांक (शून्य क छोड़कर) से भाग देने पर भागफल शून्य होता है तथा किसी भी पूर्णांक को शून्य से भाग देने अर्थहीन है। अपरिभाज्य है।
- (स) किसी भी पूर्णांक में 1 से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है। जैसे $5 \div 1 = 5, 4 \div 1 = 4$ अर्थात् $a \div 1 = a$ जहाँ a कोई एक पूर्णांक है।
- (द) किसी भी पूर्णांक में (-1) से भाग करने पर वही पूर्णांक प्राप्त नहीं होता है। जैसे: $5 \div (-1) = -5$, तथा $6 \div (-1) = -6$
- (स) पूर्णांक भाग क लिए सहचर्य गुण प्रदर्शित नहीं करते हैं।

