

अध्याय-16 त्रिविमीय आकृतियों का द्विविमीय निरूपण

16.1 भूमिका

अपने दैनिक जीवन में प्रत्येक हम अपने वस्तुओं के विभिन्न आकारों की वस्तुओं को देखते हैं, जैसे— गेंद, गायबिर, क ड्रिल, पुरतक, गिलर, शंखु इतए। इन सभी वस्तुओं में एक समान्य बत है कि प्रत्येक वस्तु की कुछ लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई या गहराई अवश्य होती है।

इसी कारण ये सभी स्थान घेरते हैं और इनकी तीन गिराँ हैं। इसीलिए ये त्रिविमीय आकार (Three Dimensional Shapes) या 3-D कहलते हैं।

क्या आप द्विविमीय आकृतियों के बारे में जानते हैं?

इसी प्रकार एक कगज पर खींची जा सकने वाली आकृतियाँ (जिनकी कवल लम्बाई और चौड़ाई होती है) को द्विविमीय (Two Dimensional) आकृतियों कहलत हैं। जैसे— वर्ग, आयत, त्रिभुज इतए।

स्वयं करके देखिए

द्विविमीय आकृतियों का उसके नामों के साथ मिलान कीलए।



(a) वर्ग



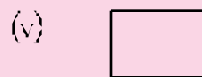
(b) आयत



(c) वृत्त

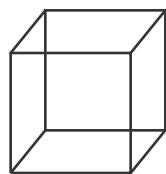


(d) चतुर्भुज

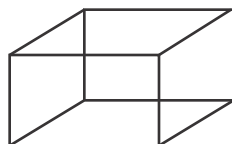


(e) त्रिभुज

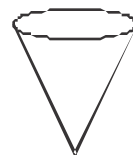
नीचे कुछ त्रिभुजिक वक्रों की आकृतियाँ दर्शाएँ—



घन



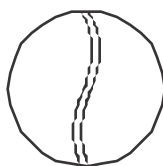
घनाभ



शंकु



बेलन



गोला

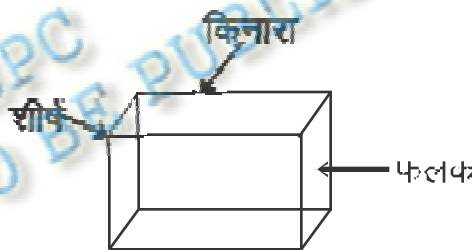


पिरामिड

आकृति-16.1

16.2 फलक, किनारे और शीर्ष

यहाँ एक घनाभ दिखाया गया है। घनाभ के ढाँच का बनाव वाले 12 रखाखंड उसके किनारे (Edges) कहलाते हैं। घनाभ के 8 कोने उसके शीर्ष (Vertices) हैं। 6 सपाट आयताकार पृष्ठ जो घनाभ को खोल या खोला है, उसके फलक (Faces) कहलाते हैं।



आकृति-16.2

रवयं करके देखिए

निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए—

वस्तु आकृति (Solid Shape)	घन (Cube)	घनाभ (Cuboid)	बेलन (Cylinder)	शंकु (Cone)	गोला (Sphere)	पिरामिड (Prism)
फलक (Faces)	6	6	3	2	1	5
किनारे (Edges)	12	-	2	1	-	-
शीर्ष (Vertices)	-	8	-	1	-	-

यहाँ पर हम देख सकते हैं कि द्विचित्रीय आकृतियों के रूप में त्रिविमीय अकारों के फलकों की पहचान की जा सकती है।

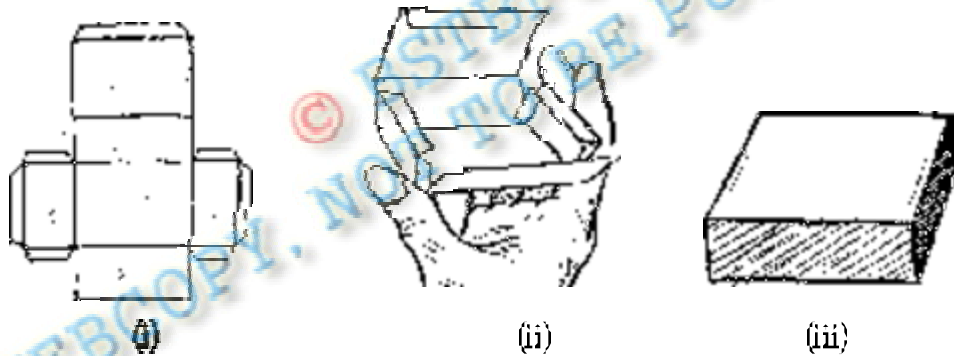
उदाहरण के लिए एक घन के फलकों की आकृति वर्गाकार है जबकि बेलन के सापाट फलक वृत्तकार है।

अब हम यह देखने का प्रयत्न करेंगे कि कितना प्रकार कुछ 3-D आकारों के 2-D आकृतियों के चित्रीय रूप में (अर्थात् कागज पर) निरूपित किया जा सकता है।

ऐसा करने के लिए हम त्रिविमीय वस्तुओं से निकटतम रूप से परिवर्तित करना चाहेंगे। आइए, इन वस्तुओं को उनसे बनाने का प्रयास करें, जिनके जाल (Net) जड़लाते हैं।

16.3 3-D आकार बनाने के लिए जाल (नेट)

एक बॉक्स लीजिए। इसके कुछ किनारों के अनुविशाल कटकर समान (समत) बना लीजिए। अब आपके पास इस बॉक्स का जाल है। जाल 2-D में एक प्रकार का ऐसा ढाँचा होता है जिसमें फड़ पर परिणामस्वरूप एक 3-D आकार प्राप्त हो जाता है।

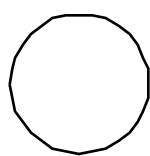
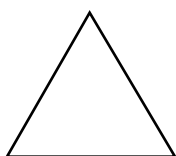
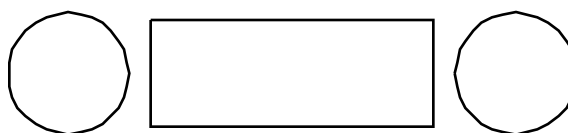


आकृति-16.3

घन का जाल- इस प्रकार हम एक घन का जाल बनाना चाहें तो हमें निम्न आकृति प्राप्त होगी।

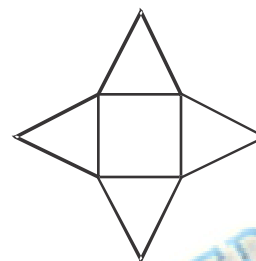
	पीछे का फलक	
बाईं ओर का फलक	पेदे का फलक	दाईं तरफ का फलक
	सामने का फलक	
	ऊपर का फलक	

बेलन का जाल— निम्न आकृति बेलन का जाल बनाती है—



शंकु का जाल— निम्न आकृति शंकु का जाल बनाती है।

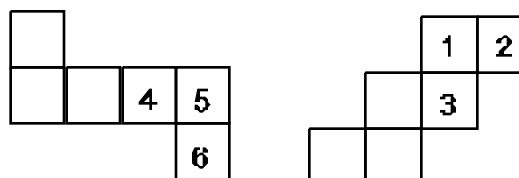
पिरामिड का जाल— निम्न आकृति पिरामिड का जाल बनाती है। इस पिरामिड का आधार एक वर्ग है तथा चार भुजाओं पर त्रिभुज बने हुए हैं। क्या आप दिए हुए जाल से इस पिरामिड को बना सकते हैं?



आकृति-16.4

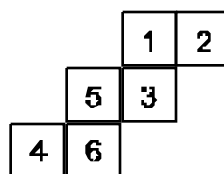
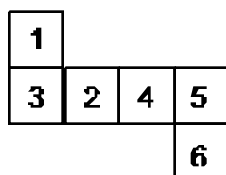
इस प्रकार हमने देखा कि निम्न-निम्न आकृतियों के लिए निम्न-निम्न जाल होते हैं। हमने यह भी सीखा कि इन जालों को सपर्युक्त प्रकार से मोड़कर और चिपकाकर वस्तुओं का सही त्रिदिवीय आकृति प्राप्त कर सकते हैं। (आकृति-16.4)

उदाहरण-1. पास (Dice) ऐसे घन होते हैं, जिनके प्रत्येक फलक पर बिन्दु (Dots) अंकित होते हैं। एक पास के सम्मुख फलकों पर अंकित बिन्दुओं की संख्याओं का योग सदैव 7 होता है। यहाँ पासे (घनों) को बनाने के लिए दो जाल दिए जा रहे हैं। प्रत्येक वर्ग में लिखी संख्या उस बक्से के बिन्दुओं का दर्शाती है।

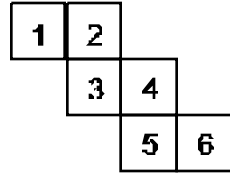


याद रखते हुए कि पास के सम्मुख फलकों की संख्याओं का योग सदैव 7 होता है, शीला स्थानों पर उपर्युक्त संख्याएँ लिखिए।

हल :



उदाहरण-2.

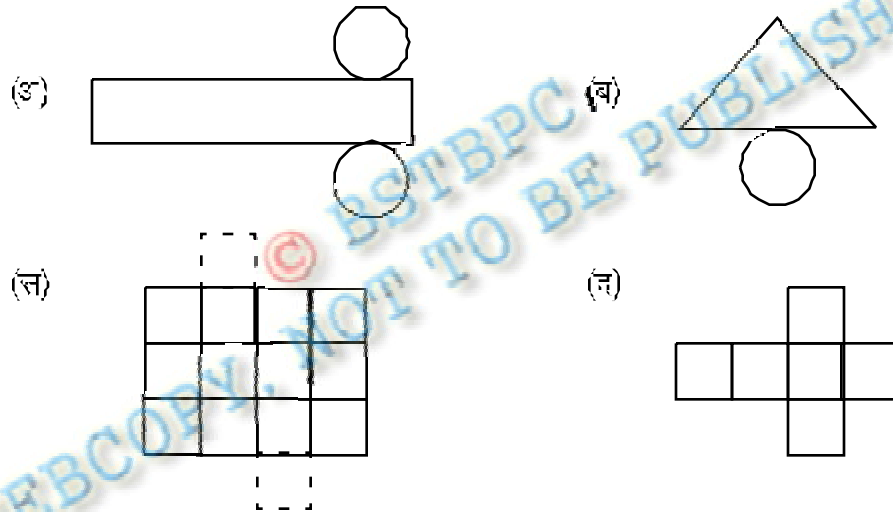


क्या यह पत्र के लिए एक जाल हो सकता है? अपने उत्तर को स्पष्ट कीजिए।

हल : नहीं, क्योंकि पत्र के एक जोड़ के विपरीत फलक 1 एवं 4 होंगे जिनका योग 7 नहीं आता है। इसी प्रकार विपरीत फलक के दूसरे जोड़ 3 एवं 6 होंगे जिनका भी योग 7 नहीं है। अतः यह पत्र के लिए जाल नहीं हो सकता।

प्रश्नावली - 16.1

1. इन ठोस आकृतियों को पहचानें जिनके जाल नीचे दिए गए हैं-

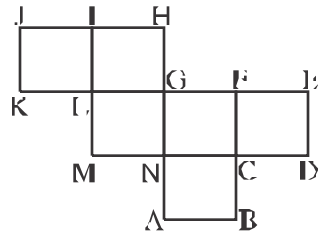


2. पासे के लिए एक जाल खींचिए और प्रत्येक फलक पर संख्या लिखिए।

3. अगर एक घन बनाने के लिए नीचे दिए गए जाल को मोड़ा जाए तो-

(अ) कौन-सा किनारा JK से मिलेगा?

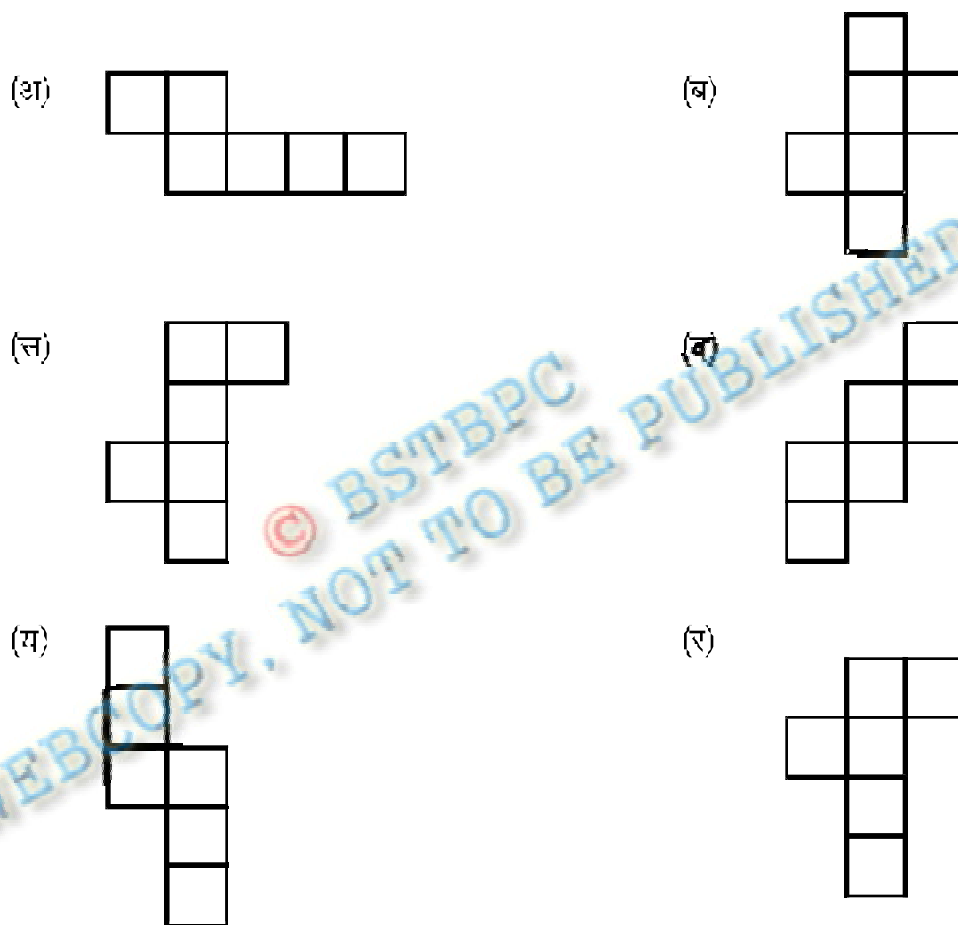
(ब) कौन-सा किनारा LM से मिलेगा?



4. दिए गए चित्र एक पासे का जाल दिखाते हैं। फलों पर चिह्नित x , y और z का संख्यात्मक मान क्या होगा?

x			
y	1	3	z
5			

5. उन जालों को पहचानिए जिनका उपयोग एक घन बनाने के लिए किया जा सकता है?

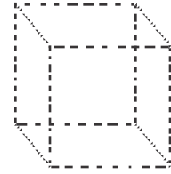


16.4 एक सपाट पृष्ठ पर ठोसों को खींचना

जब आप सपाट पृष्ठ (अर्थात् कतल) पर एक ठोस आकार का खींचते हैं, तो प्रतिबिम्बों को कुछ दिकृत (देढ़ा) कर दिया जाता है, ताकि ये त्रिभुजिय दिखाई दें। यह एक दृष्टिभ्रम है। यहाँ दो तकनीकों द्वारा जोरा आकारों का विनमन प्रदर्शित किया जा रहा है।

16.4.1 तिर्यक या अनियमित चित्र

यहाँ एक घन का चित्र दिया है (आकृति 16.5)। जब इसी सामने को देखा जाए तो इससे यह स्पष्ट पता चलता है कि एक घन केरा दिखाया है। आप इसका फलक को देख नहीं पाते हैं। खींचे गए इस चित्र में लांबई बराबर नहीं है, जबकि घन में यह बराबर होना चाहिए। फिर भी आप यह पहचान कर लेते हैं कि यह एक घन है। किसी ओर से ऐसा चित्र एक तिर्यक (अनियमित) चित्र (Oblique Sketch) कहलाता है।



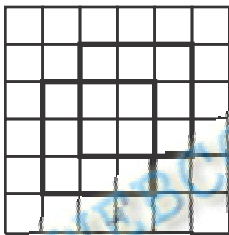
आकृति-16.5

आप ऐसे चित्र किस प्रकार खींच सकते हैं।

आइए ऐसी चित्र खींचने की तकनीक को सीखने का प्रयत्न करें।

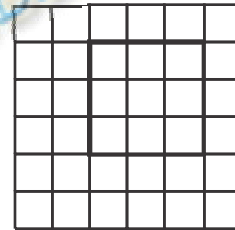
इसके लिए आपको एक वर्गीकृत (रखाकित या बिंदुकित) कागज की आवश्यकता है। प्रारम्भ में इस प्रकार के कागज पर चित्र खींचने का अभ्यास करने के बाद, आप बिना इस प्रकार के कागज की सहायता के सादे कागज पर ये चित्र सरलता से खींच सकते हैं।

आइए एक $3 \times 3 \times 3$ आकार के घन (एक ऐसा घन जिसका प्रत्येक किनारा 3 इकाई है) का एक तिर्यक चित्र खींचने का प्रयत्न करें।



चरण-2

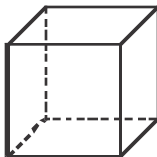
सामने का फलक खींचिए



चरण-1

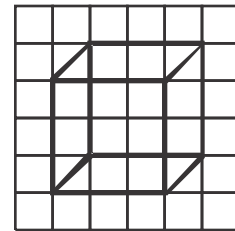
सामने के फलक का समुख फलक खींचिए। फलकों के माप बराबर होने चाहिए। यद्यपि यह चित्र चरण-1 के चित्र को ही कुछ छिसककर बनाया गया है।

संगत कानों को मिलाइए



चरण-4

छिपे हुए किनारों के लिए चित्र को बिंदुकित रेखाओं का प्रयत्न करते हुए गुना खींचिए (यह एक परस्पर या परिणती है) अब अन्तिम चित्र तैयार है।



चरण-3

(आकृति-16.6)

उपर्युक्त शिथिल चित्र में, क्या आप निम्नलिखित बातों को देख रहे हैं?

1. सानन के फलक और उसके सम्मुख फलक के माप सानन हैं।
2. सन के किनारे जो बराबर होते हैं, चित्र में भी बराबर-बराबर प्रतीत होते हैं यद्यपि इनको बराबर नहीं लिखा गया है।

सिम्पणी— आप ऐसा चित्र भी खींच सकते हैं, जिनमें माप (या नापन) दिए हुए उस के रूप के अनुसार (अनुकूल) ही हो। ऐसा करण के लिए हमें एक ऐसे कागज की आवश्यकता होगी, जिस समदूरीक शीट (Isometric Sheet) अर्थात् सानन दूरियों वाली शीट कहते हैं।

16.4.2 समदूरीक चित्र

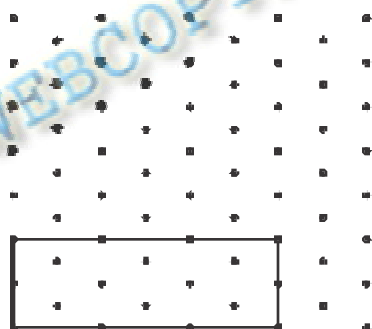
क्या आप एक समदूरीक बिंदुकिता शीट देखी है? एक बिंदुकिता शीट नीचे दी जा रही है।

यह समदूरीक बिंदुकिता शीट में पूरे कागज (ज्यादा स्वच्छ यह शीट) बिंदुकिता रेखाओं से बने छोटे-छोटे समबाहु त्रिभुजों में बँट जाता है। ऐसे चित्र खींचने के लिए जिनके माप दिए हुए ठोस की माप के अनुसार हो, हम इन बिंदुकिता समदूरीक शीटों का प्रयोग कर सकते हैं।



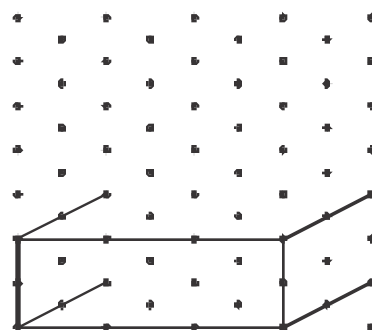
आकृति-16.7

आइए, हम एक समदूरीक शीट पर एक घन बनाने का प्रयत्न करते हैं जिसकी लम्बाई 4 सेमी., चौड़ाई 2 सेमी., एवं ऊँचाई 2 सेमी. है।



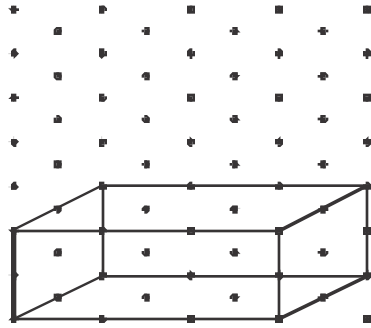
चरणी-1

सानने वाले फलक दर्शाने के लिए 4x2 मापों का एक आयत खींचिए।

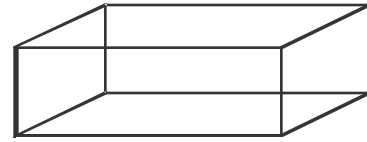


चरणी-2

आयत के दाहिने कोने से लम्बाई 2 इकाई वाले 4 रेख खंड खींचिए।



चरण-3



चरण-4

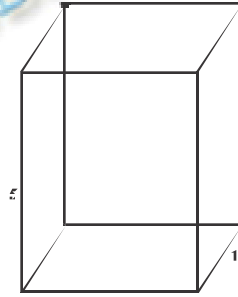
सुमेलेक कोनों लो उपयुक्त रेख खंडों यह घनाभ का एक समदूरीक चित्र है।
रो मिले इर।

आकृति-16.8

ध्यान दीजिए कि समदूरीक चित्र में मापन तीक (सुथार्थ में) जोय की दी हुई गणों के होते हैं जबकि तिर्यक चित्र की स्थिति में ऐसा नहीं होया है।

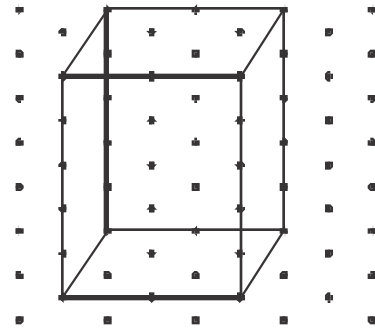
उदाहरण-3.

यहां केरी घनाभ का एक तिर्यक चित्र दिया गया है। आकृति 16.9 (i)। इस चित्र स मिलान करने वाला एक समदूरीक चित्र खींचिए।



आकृति-16.9 (i)

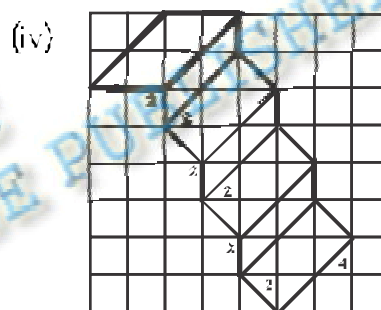
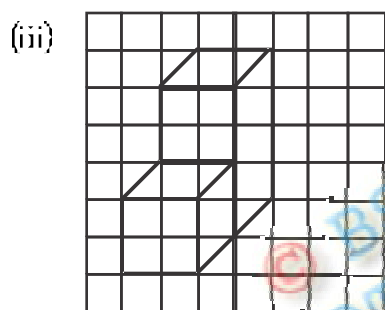
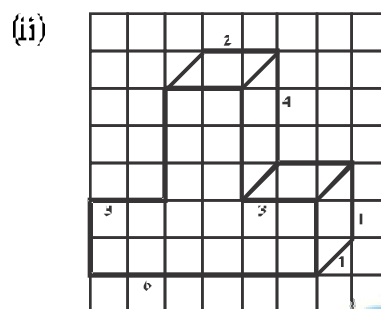
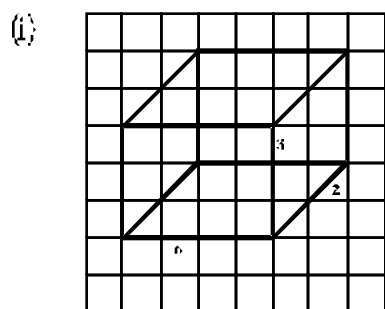
हल : इसक हल आकृति 16.9 (ii) में चित्र खींचकर दर्शाए गया है। ध्यान दीजिए कि किस प्रकार गणों के अनुसार चित्र खींचा गया है।



आकृति-16.9 (ii)

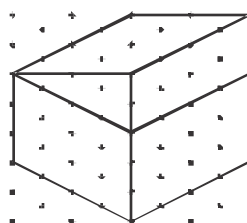
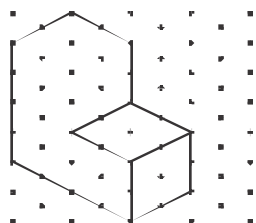
प्रश्नावली — 16.2

1. एक समदूरीक बिंदुकित कागज का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित आकृतियों में से प्रत्येक का एक समदूरीक चित्र खींचिए—



आकृति—16.10 [(i)-(iv)]

2. किसी घनाभ की विमाएँ 6 सेमी., 4 सेमी. और 3 सेमी. हैं। इस घनाभ के तीन भिन्न-भिन्न समदूरीक चित्र खींचिए।
3. 3 सेमी. किनारों वाले तीन घनों को परस्पर सटाकर रखते हुए एक घनाभ बनाया गया है। इस घनाभ का एक तिर्यक् अथवा एक समदूरीक चित्र खींचिए।
4. निम्नलिखित समदूरीक आकारों में से प्रत्येक के लिए एक तिर्यक् चित्र खींचिए—



6. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए—

- (1) एक रेख्य चित्र और (2) एक सान्द्रिक चित्र खींचिए।
(अ) 6 सेमी., 7 सेमी. और 3 सेमी. विनाशों वाला एक घनाभ
(ब) 5 सेमी. फिनारे जल एक घन।

16.5 किसी ठोस के विभिन्न भागों को देखना।

आइए अब इस पर चर्चा करें कि एक 3-D वस्तु को किस प्रकार विभिन्न दृष्टियों से देखा जा सकता है।

16.5.1 किसी वस्तु को देखने की एक विधि है उसे काटना या उसके पतले टुकड़े करना।

याँ एक लवंगू (Pumpkin) दिया हुआ है।

आप चाकू से इसका कुछ टुकड़े कीजिए।

ऊर्ध्वाधर रूप से काटने पर आपके टुकड़े प्राप्त

हो सकते हैं, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।

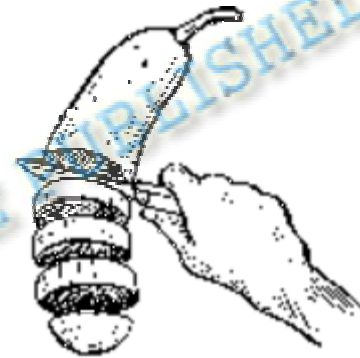
याँ किए गए टुकड़े का प्रत्येक फलक एक वृत्त है।

हम इस जलक के कपड़े की एक अनुप्रस्थ-काट (Cross Section) कहते हैं। वस्तुतः इस स्थिति में, अनुप्रस्थ-काट लगभग एक वृत्त है। यदि आपका काटना या काटने ऊर्ध्वाधर

नहीं होगा तो आपको एक भिन्न अनुप्रस्थ-काट प्राप्त हो सकती है। इसके बारे में सोचिए

एक रसोई खेल— क्या आपने अन्य सब्जियों का अनुप्रस्थ-काट का आकारों पर ध्यान दिया है,

जब उन्हें रसोई में पकाने के लिए काटा जाता है? विभिन्न टुकड़ों का देखिए तथा सब्जियों के काटने से प्राप्त अनुप्रस्थ-काट के आकारों से परिचित हो जाएँ।

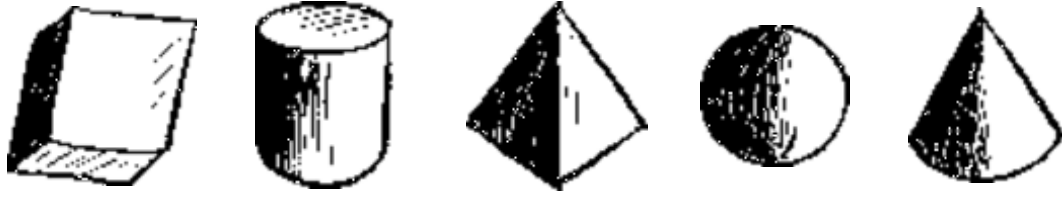


आकृति-16.11

स्वयं कीजिए

निम्नलिखित भासों के मॉडलों के गॉडल (Models) बनाइए तथा इनको ऊर्ध्वाधर या क्षैतिज रूप से काटिए।

अपने दूर प्राप्त अनुप्रस्थ-काट के रफ (Rough) चित्र डींयिए। जहाँ भी संभव हो, इनके नाम भी लिखिए।



आकृति-16.12

स्वयं करके देखिए

ऊपर के कौन-सा अनुप्रस्थ-काट प्राप्त होता है जब आप निम्नलिखित वस्तुओं को (i) कर्तबधर रूप से और (ii) क्षैतिज रूप से काटते हैं?

- | | |
|-----------------|-------------------------|
| (क) एक पारा | (ब) एक गिलार |
| (स) एक चैद | (द) एक तल्लाई का डिब्बा |
| (ड) एक नश बॉकरा | (ड) एक बेलनाकार पाइप |

16.52 छाया खेल गिधि

छाया की सहायता से द्विविमीय वस्तुओं को द्विविमीय आकारों के रूप में दखा जा सकता है।

क्या आपने कभी एक छाया खेल देखा है? यह एक प्रकार का मगरंजन है जिसमें सूर्यप्रष्ट वारा आकृतियों को एक प्रकाशमय श्रोत के सामने रखकर उनके गतिमान प्रतिबिम्बों के प्रा उत्पन्न किए जाते हैं। इन्हें गणित की अवधारणाओं का कुछ अप्रत्यक्ष रूप से प्रयोग होता है।

एक शंकु के ठीक सामने एक टॉर्च का प्रकाश जालिए। यह पर्दे पर किस प्रकार का छाया नशांता है? (आकृति-16.13)



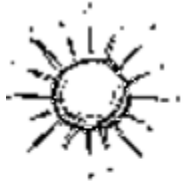
आकृति-16.13

ठोस त्रिभुज वाला है। इसकी छाया की कितनी चिमाईं हैं?

यदि आप इस खल में शंकु के स्थान पर एक चैद के टॉर्च के सामने रखें, तो आपको फिरा प्रकार की छाया प्राप्त होगी?

रवयं कीजिए

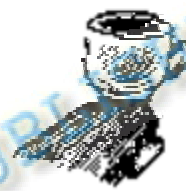
चट के एक वृत्ताकार प्याले को छुले में सूटं की रोशनी में कैसे दिन विभिन्न समयों में सुबह, शाम एवं दोपहर एवं शाम रूड जात है। सूर्य की स्थितियों और प्रेक्षर के समयों के अनुसार छाड डों का अध्ययन कीजिए।



सुबह



दोपहर

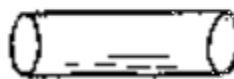


शाम

आकृति-16.14

प्रश्नावली - 16.4

1. निम्नलिखित ढोंडों के डीक कपर एक जलता हुआ बल्ब रखा गया है। प्रत्येक स्थिति में प्राप्त छाया के आकार का नाम बताइए। इस छाया का एक रफ चित्र बनाने का प्रयास कीजिए। (पहले प्रयोग करें और फिर उत्तर दें)



2. आप अपने परिवेश से एक ठोस का नाम बताएँ जो निम्नलिखित छाया का आकार बनाता है।

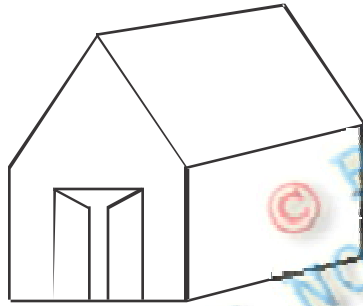
- (क) वर्ग (ख) त्रिभुज (ग) घूर्ण (घ) आयत

3. जाँच कीजिए कि क्या ये कथन सत्य हैं?

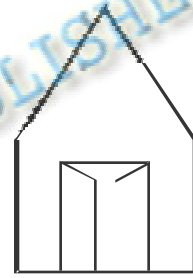
- (क) एक घन एक आयत के आकार की छाया दे सकता है।
 (ख) एक घन एक वर्ग के आकार की छाया दे सकता है।

16.5.3 विशेष कोणों से देखने की विधि

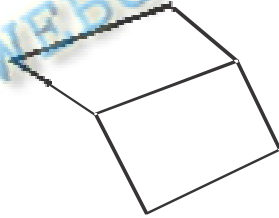
एक तीसरी विधि यह है कि कोई भी व्यक्ति किसी वस्तु को उसके सामने से या उसकी ओर (पार्श्व) से या उसके ऊपर से देख सकता है। प्रत्येक बार उसे एक निम्न दृश्य मिलेगा (आकृति-16.14)



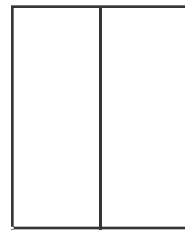
घवन



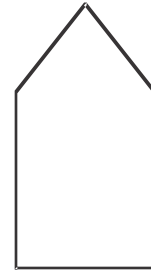
सामने से दृश्य



पार्श्व दृश्य



ऊपर का दृश्य



पीछे क दृश्य

आकृति-16.15

आप इन्हें धनों को जोड़ने से बनी आकृतियों के लिए भी कर सकते हैं।



आकृति-16.16

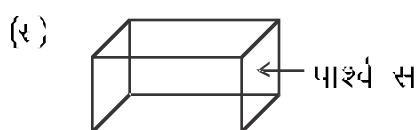
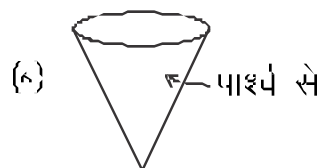
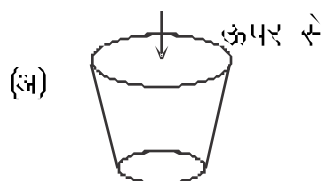
धनों को एक साथ रखकर रोसा बनाइए और फिर उन्हें विभिन्न दिशाओं से देखकर उनके ऊपर बताए अनुसार चित्र बनाने का प्रयत्न कीजिए।

प्रश्नावली - 16.5

- प्रत्येक रोस के लिए तीन दृश्य (1), (2) और (3) दिए गए हैं। प्रत्येक रोस के लिए संगत ऊपर के (Top), सामने के (Front) और पार्श्व दृश्यों (Side) को पहचान कीजिए।

रोसा	उसके दृश्य		
	(1)	(2)	(3)

2. नीचे दिए गए प्रत्येक ठोस का, तीर द्वारा सूचित दिशा से उसे देखने पर वह कैसा दिखेगा, एक दृश्य खींचिए।



हमने सीखा

1. गूदा, कर्, 3-दृश, वस्तुपुंज और निम्न समतल आकृतियों के उदाहरण हैं तथा घन, घनाभ, गोल, बेलन, शंकु और पिरामिड ठोस आकारों के उदाहरण हैं।
2. समतल आकृतियों की दो विमाएँ (संक्षिप्त में 2-D) होती हैं तथा ठोस आकारों की तीन विमाएँ (संक्षिप्त में 3-D) होती हैं।
3. ठोस आकारों के कोण उसके शीर्ष, उसके ढाँचे के रेखाखंड, उसके किनारे (या कोर) तथा उसके सपाट पृष्ठ इसके फलक कहलाते हैं।
4. ठोस का एक जाल दो विमाओं में एक एक ढाँचा (एक रूपरेखा) है जिसे मोड़कर वह ठोस प्राप्त हो जाता है। एक ही ठोस के अनेक प्रकार के जाल हो सकते हैं।
5. चारपिंडीक रूप से ठोस के कोरों को सपाट पृष्ठों (जैसे कागज) पर खींचा जा सकता है। हम इसे 3-D ठोस को 2-D निरूपण करते हैं।
6. एक ठोस के दो प्रकार के चित्र बनाना संभव है—
 - (अ) एक परिष्कृत चित्र, जिसमें लम्बे इयॉ समानुपाती नहीं होती हैं। फिर भी यह ठोस के हर न सभी महत्वपूर्ण जानकारी प्रदान कर देता है।
 - (ब) एक समदूरीक चित्र का एक समदूरीक बिन्दुकेत कगल पर खींचा जाता है। किसी ठोस के एक समदूरीक चित्र में लम्बे इयॉ को समानुपाती रख जाते हैं।

7. ओस आकारों का चित्रण एक बहुत ही उपयोगी कौशल है। आपको ओस आकारों के लिये हुए कृमि दिए जा रहे हैं।
8. एक ओस के विभिन्न भागों को अनेक विधियों से देखा जा सकता है।
- (अ) एक विधि यह है कि दिए हुए आकार को काट लिया जाता है। इससे ही ओस का एक अनुप्रस्थ-काट प्राप्त हो जाती है।
- (ब) दूसरी विधि यह है कि एक 3-D आकार की एक ठोस वस्तु को 2-D के रूप में लसकी छाया देखी जाय।
- (स) तीसरी विधि यह है कि ठोस आकार को विभिन्न कर्ण से देखा जाय।



© BSTBPC
WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED