अध्याय-16

त्रिविमीय आकृतियों का द्विविमीय निरूपण

G3N9X8

16.1 भूमिका

अपने दैनिक जीवन में प्रायः हम अपने चारों तरफ विभिन्न आकारों की वस्तुओं को देखते हैं, जैसे– गेंदे, माचिस का डिब्बा, पुस्तकें, गिलास, शंकु इत्यादि। इन सभी वस्तुओं में एक सामान्य बात तो है कि प्रत्येक वस्तु की कुछ लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई या गहराई अवश्य होती है।

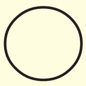
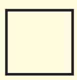
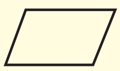
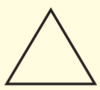
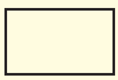
इसी कारण ये सभी स्थान घेरते हैं और इनकी तीन विमाएँ हैं। इसीलिए ये त्रिविमीय आकार (Three Dimensional Shapes) या 3-D कहलाते हैं।

क्या आप द्विविमीय आकृतियों के बारे में जानते हैं?

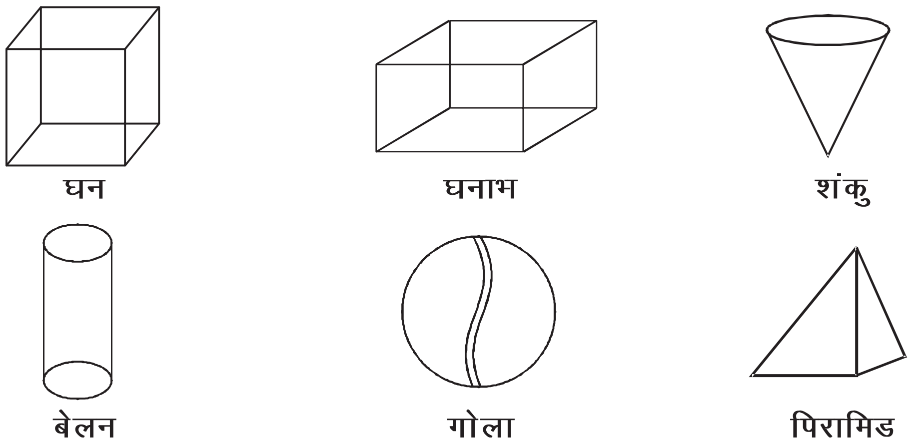
इसी प्रकार एक कागज पर खींची जा सकने वाली आकृतियाँ (जिनकी केवल लम्बाई और चौड़ाई होती है) को द्विविमीय (Two Dimensional) आकृतियाँ कहते हैं। जैसे– वर्ग, आयत, वृत्त, त्रिभुज इत्यादि।

स्वयं करके देखिए

द्विविमीय आकृतियों का उसके नामों के साथ मिलान कीजिए।

(i)		(a)	वर्ग
(ii)		(b)	आयत
(iii)		(c)	वृत्त
(iv)		(d)	चतुर्भुज
(v)		(e)	त्रिभुज

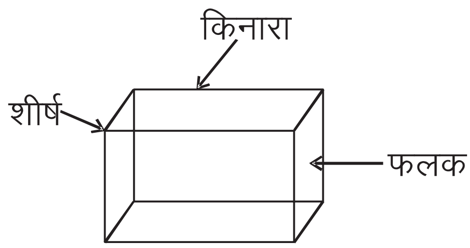
नीचे कुछ त्रिविमीय चित्रों की आकृति पर गौर करें–



आकृति–16.1

16.2 फलक, किनारे और शीर्ष

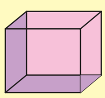
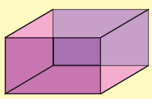
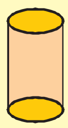
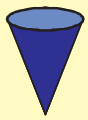
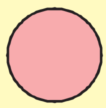
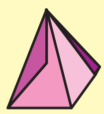
यहाँ एक घनाभ दिखाया गया है। घनाभ के ढाँचे को बनाने वाले 12 रेखाखंड उसके किनारे (Edges) कहलाते हैं। घनाभ के 8 कोने उसके शीर्ष (Vertices) हैं। 6 सपाट आयताकार पृष्ठ जो घनाभ की खाल या त्वचा है, उसके फलक (Faces) कहलाते हैं।



आकृति–16.2

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए–

ठोस आकृति (Solid Shape)	घन (Cube) 	घनाभ (Cubiod) 	बेलन (Cylinder) 	शंकु (Cone) 	गोला (Sphere) 	पिरामिड (Prism) 
फलक (Faces)	6	6	3	2	1	5
किनारे (Edges)	12	-	2	1	-	-
शीर्ष (Vertices)	-	8	-	1	-	-

यहाँ पर हम देख सकते हैं कि द्विविमीय आकृतियों के रूप में त्रिविमीय आकारों के फलकों की पहचान की जा सकती है।

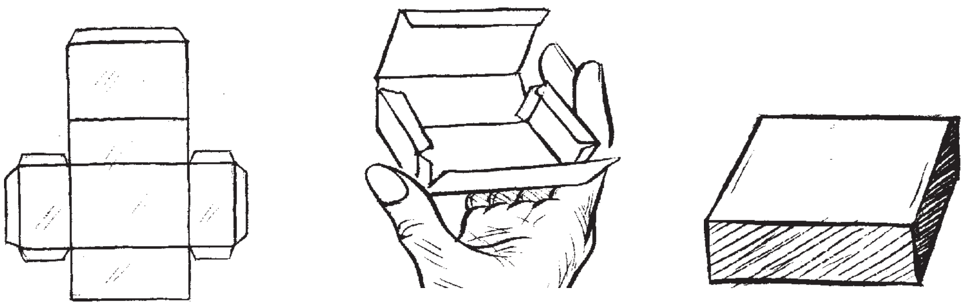
उदाहरण के लिए एक घन के फलक की आकृति वर्गाकार है जबकि बेलन के सपाट फलक वृत्ताकार है।

अब हम यह देखने का प्रयत्न करेंगे कि किस प्रकार कुछ 3–D आकारों को 2–D आकृतियों के चित्रीय रूप में (अर्थात् कागज पर) निरूपित किया जा सकता है।

ऐसा करने के लिए हम त्रिविमीय वस्तुओं से निकटतम रूप से परिचित होना चाहेंगे। आइए, इन वस्तुओं को उनसे बनाने का प्रयास करें, जो इनके जाल (Net) कहलाते हैं।

16.3 3-D आकार बनाने के लिए जाल (नेट)

एक बॉक्स लीजिए। इसके कुछ किनारों के अनुदिश काट कर सपाट (Flat) बना लीजिए। अब आपके पास इस बॉक्स का जाल है। जाल 2–D में एक प्रकार का ऐसा ढाँचा होता है जिसे मोड़ने पर परिणामस्वरूप एक 3–D आकार प्राप्त हो जाता है।



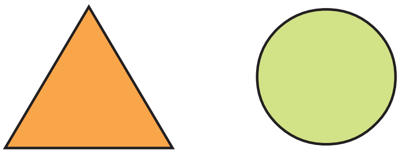
(i) (ii) (iii)

आकृति–16.3

घन का जाल– इस प्रकार हम एक घन का जाल बनाना चाहें तो हमें निम्न आकृति प्राप्त होगी।

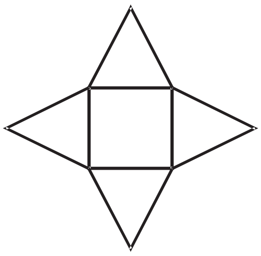
	पीछे का फलक	
बाईं ओर का फलक	पेंदे का फलक	दाईं तरफ का फलक
	सामने का फलक	
	ऊपर का फलक	

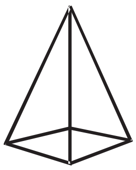
बेलन का जाल– निम्न आकृति बेलन का जाल बनाती है–



शंकु का जाल– निम्न आकृति शंकु का जाल बनाती हैं।

पिरामिड का जाल– निम्न आकृति पिरामिड का जाल बनाती है। इस पिरामिड का आधार एक वर्ग है तथा चार भुजाओं पर त्रिभुज बने हुए हैं। क्या आप दिए हुए जाल से इस पिरामिड को बना सकते हैं?

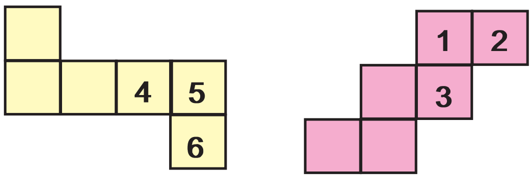




आकृति–16.4

इस प्रकार हमने देखा कि भिन्न–भिन्न आकारों के लिए, भिन्न–भिन्न जाल होते हैं। हमने यह भी सीखा कि इन जालों को उपर्युक्त प्रकार से मोड़कर और चिपकाकर वस्तुओं का सही त्रिविमीय आकृति प्राप्त कर सकते हैं। (आकृति–16.4)

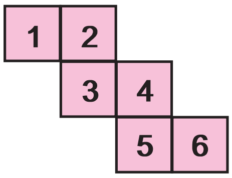
उदाहरण–1. पासे (Dice) ऐसे घन होते हैं, जिनके प्रत्येक फलक पर बिन्दु (Dots) अंकित होते हैं। एक पासे के सम्मुख फलकों पर अंकित बिन्दुओं की संख्याओं का योग सदैव 7 होता है। यहाँ पासे (घनों) को बनाने के लिए दो जाल दिए जा रहे हैं। प्रत्येक वर्ग में लिखी संख्या उस बक्से के बिन्दुओं को दर्शाती है।



यह याद रखते हुए कि पासे के सम्मुख फलकों की संख्याओं का योग सदैव 7 होता है, रिक्त स्थानों पर उपर्युक्त संख्याएँ लिखिए।

हल :

उदाहरण–2.



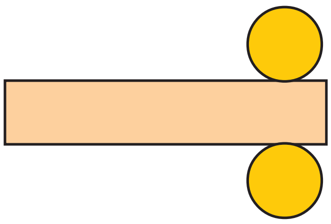
क्या यह पासे के लिए एक जाल हो सकता है? अपने उत्तर को स्पष्ट कीजिए।

हल : नहीं, क्योंकि पासे के एक जोड़े के विपरीत फलक 1 एवं 4 होंगे जिनका योग 7 नहीं आता है। इसी प्रकार विपरीत फलक के दूसरे जोड़े 3 एवं 6 होंगे जिनका भी योग 7 नहीं है। अतः यह पासे के लिए जाल नहीं हो सकता।

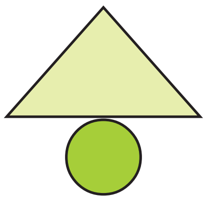
प्रश्नावली – 16.1

1. **उन ठोस आकृतियों को पहचानें जिनके जाल नीचे दिए गए हैं–**

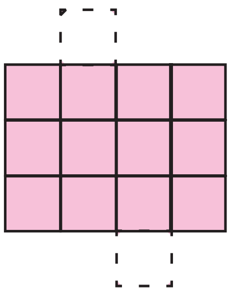
(अ)



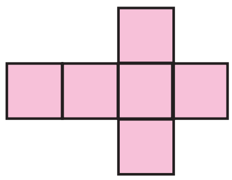
(ब)



(स)



(द)

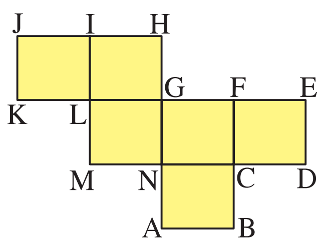


2. पासे के लिए एक जाल खींचिए और प्रत्येक फलक पर संख्या लिखिए।

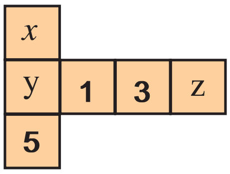
3. अगर एक घन बनाने के लिए नीचे दिए गए जाल को मोड़ा जाए तो–

(अ) कौन-सा किनारा JK से मिलेगा?

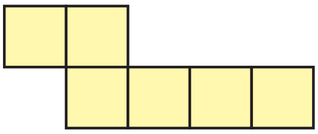
(ब) कौन-सा किनारा LM से मिलेगा?

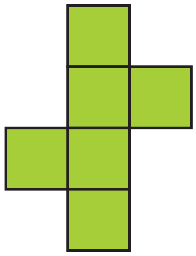


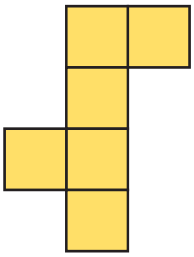
4. दिए गए चित्र एक पासे का जाल दिखाते हैं। फलकों पर चिह्नित x, y और z का संख्यात्मक मान क्या होगा?

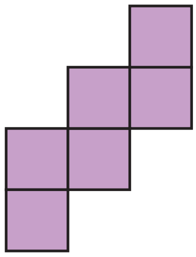


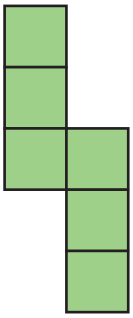
5. उन जालों को पहचानिए जिनका उपयोग एक घन बनाने के लिए किया जा सकता है?

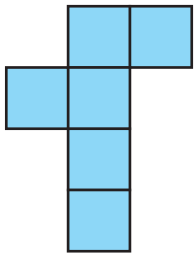
(अ)


(ब)


(स)


(द)


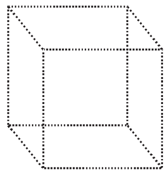
(य)


(र)


16.4 एक सपाट पृष्ठ पर ठोसों को खींचना

जब आप सपाट पृष्ठ (अर्थात् कागज) पर एक ठोस आकार को खींचते हैं, तो प्रतिबिम्बों को कुछ विकृत (टेढ़ा) कर दिया जाता है, ताकि ये त्रिविमीय दिखाई दें। यह एक दृष्टिभ्रम है। यहाँ दो तकनीकों द्वारा ठोस आकारों का चित्रण प्रदर्शित किया जा रहा है।

16.4.1 तिर्यक या अनियमित चित्र



आकृति–16.5

यहाँ एक घन का चित्र दिया है (आकृति 16.5)। जब इसे सामने से देखा जाए तो इससे यह स्पष्ट पता चलता है कि एक घन कैसा दिखता है। आप इसके फलकों को देख नहीं पाते हैं। खींचे गए इस चित्र में लम्बाई बराबर नहीं है, जबकि घन में यह बराबर होनी चाहिए। फिर भी आप यह पहचान कर लेते हैं कि यह एक घन है। किसी ठोस का ऐसा चित्र एक तिर्यक (या अनियमित) चित्र (Oblique Sketch) कहलाता है।

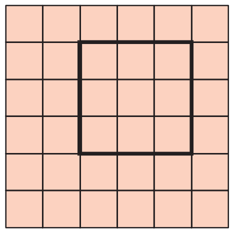
आप ऐसे चित्र किस प्रकार खींच सकते हैं।

आइए ऐसे चित्र खींचने की तकनीक को सीखने का प्रयत्न करें।

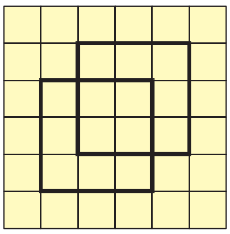
इसके लिए आपको एक वर्गांकित (रेखांकित या बिंदुकित) कागज की आवश्यकता है। प्रारम्भ में इस प्रकार के कागज पर चित्र खींचने का अभ्यास करने के बाद, आप बिना इस प्रकार के कागज की सहायता के सादे कागज पर ये चित्र सरलता से खींच सकते हैं।

आइए एक $3 \times 3 \times 3$ आकार के घन (एक ऐसा घन जिसका प्रत्येक किनारा 3 इकाई है) का एक तिर्यक् चित्र खींचने का प्रयत्न करें।

सामने का फलक खींचिए



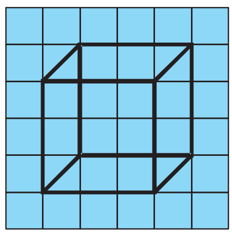
चरण–1



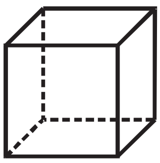
चरण–2

सामने के फलक का सम्मुख फलक खींचिए। फलकों के माप बराबर होने चाहिए। परन्तु यह चित्र चरण–1 के चित्र को ही कुछ खिसकाकर बनाया गया है।

संगत कोनों को मिलाइए



चरण–3



चरण–4

छिपे हुए किनारों के लिए चित्र को बिन्दुकित रेखाओं का प्रयोग करते हुए पुनः खींचिए (यह एक परम्परा या परिपाटी है) अब अभीष्ट चित्र तैयार है।

(आकृति–16.6)

उपर्युक्त तिर्यक् चित्र में, क्या आप निम्नलिखित बातों को देख रहे हैं?

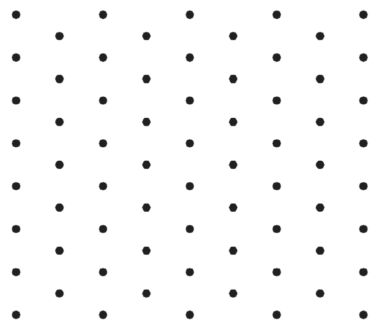
1. सामने के फलक और उसके सम्मुख फलक के माप समान हैं।
2. घन के किनारे जो बराबर होते हैं, चित्र में भी बराबर–बराबर प्रतीत होते हैं यद्यपि इनको बराबर नहीं लिया गया है।

टिप्पणी– आप ऐसे चित्र भी खींच सकते हैं, जिनमें माप (या मापन) दिए हुए ठोस के मापों के अनुसार (अनुकूल) ही हो। ऐसा करने के लिए हमें एक ऐसे कागज की आवश्यकता होगी, जिसे समदूरीक शीट (Isometric Sheet) अर्थात् समान दूरियों वाली शीट कहते हैं।

16.4.2 समदूरीक चित्र

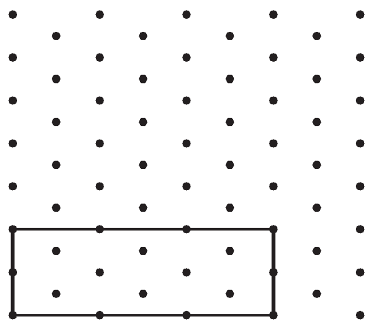
क्या आपने एक समदूरीक बिंदुकित शीट देखी है? एक बिंदूकित शीट नीचे दी जा रही है।

यह समदूरीक बिन्दुकित शीट में पूरा कागज (अर्थात् स्वयं यह शीट) बिंदुकित रेखाओं से बने छोटे–छोटे समबाहु त्रिभुजों में बँट जाता है। ऐसे चित्र खींचने के लिए जिनके माप दिए हुए ठोस की मापों के अनुसार हों, हम इन बिंदुकित समदूरीक शीटों का प्रयोग कर सकते हैं।



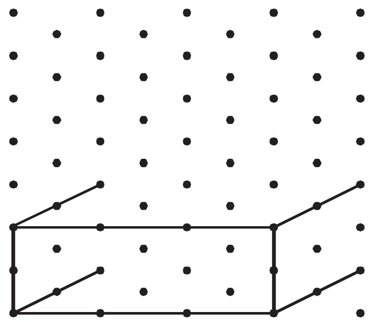
आकृति–16.7

आइए, हम एक समदूरीक शीट पर ऐसा घनाभ बनाने का प्रयास करते हैं जिसकी लम्बाई 4 सेमी., चौड़ाई 2 सेमी. एवं ऊँचाई 2 सेमी. है।



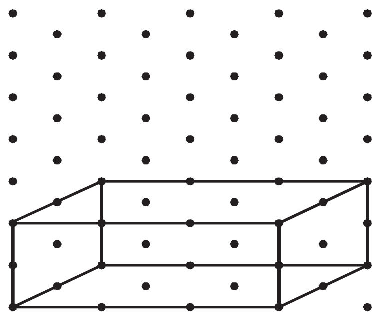
चरण–1

सामने वाला फलक दर्शाने के लिए 4×2 मापों का एक आयत खींचिए।



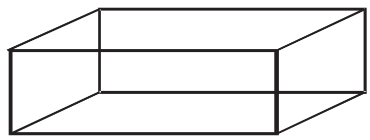
चरण–2

आयत के चारों कोनों से लम्बाई 2 इकाई वाले 4 रेखाखंड खींचिए।



चरण–3

सुमेलित कोनों को उपयुक्त रेखाखंडों से मिलाइए।



चरण–4

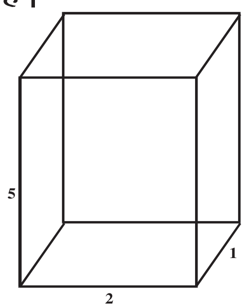
यह घनाभ का एक समदूरीक चित्र है।

आकृति–16.8

ध्यान दीजिए कि समदूरीक चित्र में मापन ठीक (यथार्थ में) ठोस की दी हुई मापों के होते हैं जबकि तिर्यक चित्र की स्थिति में ऐसा नहीं होता है।

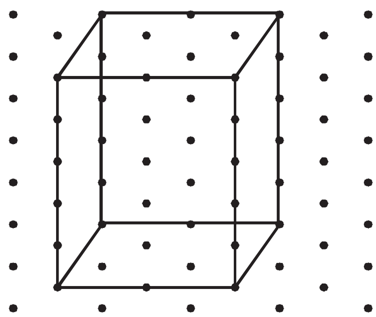
उदाहरण–3.

यहां किसी घनाभ का एक तिर्यक चित्र दिया गया है। आकृति 16.9 (i)। इस चित्र से मिलान करने वाला एक समदूरीक चित्र खींचिए।



आकृति–16.9 (i)

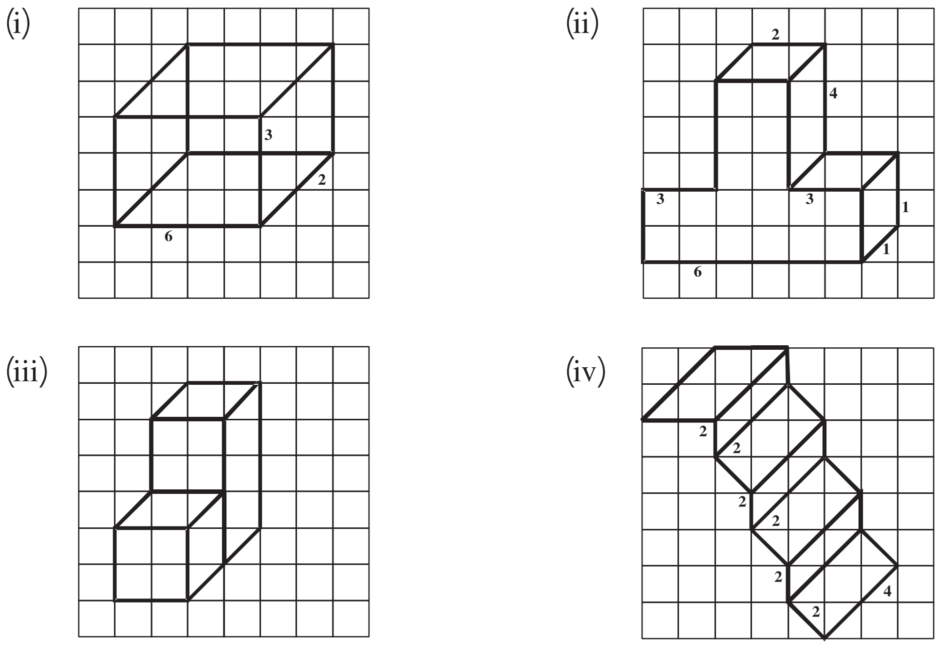
हल : इसका हल आकृति 16.9 (ii) में चित्र खींचकर दर्शाया गया है। ध्यान दीजिए कि किस प्रकार मापों के अनुसार चित्र खींचा गया है।



आकृति–16.9 (ii)

प्रश्नावली – 16.2

1. एक समदूरीक बिंदुकित कागज का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित आकृतियों में से प्रत्येक का एक समदूरीक चित्र खींचिए:–

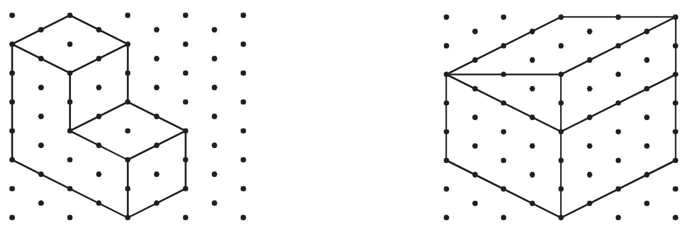


आकृति–16.10 [(i)-(iv)]

2. किसी घनाभ की विमाएँ 6 सेमी., 4 सेमी. और 3 सेमी. हैं। इस घनाभ के तीन भिन्न–भिन्न समदूरीक चित्र खींचिए।

3. 3 सेमी. किनारों वाले तीन घनों को परस्पर सटाकर रखते हुए एक घनाभ बनाया गया है। इस घनाभ का एक तिर्यक् अथवा एक समदूरीक चित्र खींचिए।

4. निम्नलिखित समदूरीक आकारों में से प्रत्येक के लिए एक तिर्यक् चित्र खींचिए–



5. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए–

(1) एक तिर्यक् चित्र और (2) एक समदूरीक चित्र खींचिए।

(अ) 6 सेमी., 4 सेमी. और 3 सेमी. विमाओं वाला एक घनाभ

(ब) 5 सेमी. किनारे वाला एक घन।

16.5 किसी ठोस के विभिन्न भागों को देखना

आइए अब इस पर चर्चा करें कि एक 3-D वस्तु को किस प्रकार विभिन्न विधियों से देखा जा सकता है।

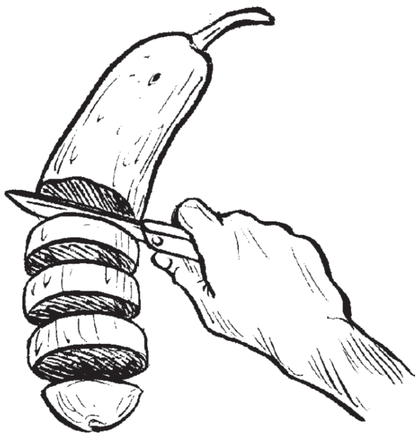
16.5.1 किसी वस्तु को देखने की एक विधि है उसे काटना या उसके पतले टुकड़े करना।

यहाँ एक कद्दू (Pumpkin) दिया हुआ है।

आप चाकू से इसके कुछ टुकड़े कीजिए।

ऊर्ध्वाधर रूप से काटने पर अनेक टुकड़े प्राप्त हो सकते हैं, जैसा कि चित्र में दिखया गया है।

यहाँ किए गए टुकड़े का प्रत्येक फलक एक वृत्त है।



आकृति–16.11

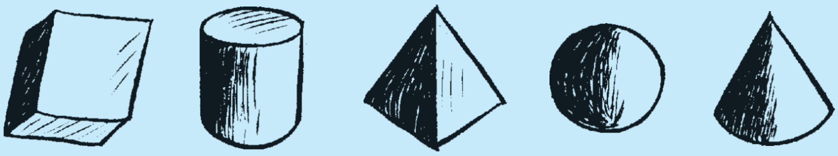
हम इस फलक को कद्दू की एक अनुप्रस्थ–काट (Cross Section) कहते हैं। वस्तुतः इस स्थिति में, अनुप्रस्थ–काट लगभग एक वृत्त है। यदि आपका काटना या कटाव 'ऊर्ध्वाधर' नहीं होगा तो आपको एक भिन्न अनुप्रस्थ–काट प्राप्त हो सकती है। इसके बारे में सोचिए!

एक रसोई खेल– क्या आपने अन्य सब्जियों के अनुप्रस्थ–काट के आकारों पर ध्यान दिया है, जब उन्हें रसोई में पकाने के लिए काटा जाता है? विभिन्न टुकड़ों को देखिए तथा सब्जियों को काटने से प्राप्त अनुप्रस्थ–काट के आकारों से परिचित हो जाइए।

स्वयं कीजिए

निम्नलिखित ठोसों के मिट्टी के मॉडल (Models) बनाइए तथा इनको ऊर्ध्वाधर या क्षैतिज रूप से काटिए।

अपने द्वारा प्राप्त अनुप्रस्थ–काट के रफ (Rough) चित्र खींचिए। जहाँ भी संभव हो, इनके नाम भी लिखिए।



आकृति–16.12

स्वयं करके देखिए

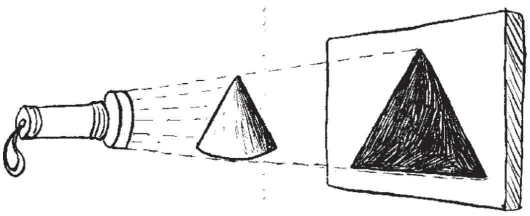
आपको कौन-सा अनुप्रस्थ–काट प्राप्त होता है जब आप निम्नलिखित ठोसों को (i) ऊर्ध्वाधर रूप से और (ii) क्षैतिज रूप से काटते हैं?

(अ)	एक पासा	(ब)	एक गिलास
(स)	एक गेंद	(द)	एक सलाई का डिब्बा
(य)	एक नाश्ता बॉक्स	(र)	एक बेलनाकार पाइप

16.5.2 छाया खेल विधि

छाया की सहायता से त्रिविमीय वस्तुओं को द्विविमीय आकारों के रूप में देखा जा सकता है https://www.evidyarthi.in/

क्या आपने कभी एक छाया खेल देखा है? यह एक प्रकार का मनोरंजन है जिसमें सुस्पष्ट ठोस आकृतियों को एक प्रकाशमय स्रोत के सामने रखकर उनके गतिमान प्रतिबिम्बों के भ्रम उत्पन्न किए जाते हैं। इसमें गणित की अवधारणाओं का कुछ अप्रत्यक्ष रूप से प्रयोग होता है। एक शंकु के ठीक सामने एक टॉर्च का प्रकाश डालिए। यह पर्दे पर किस प्रकार का छाया दर्शाता है? (आकृति–16.13)



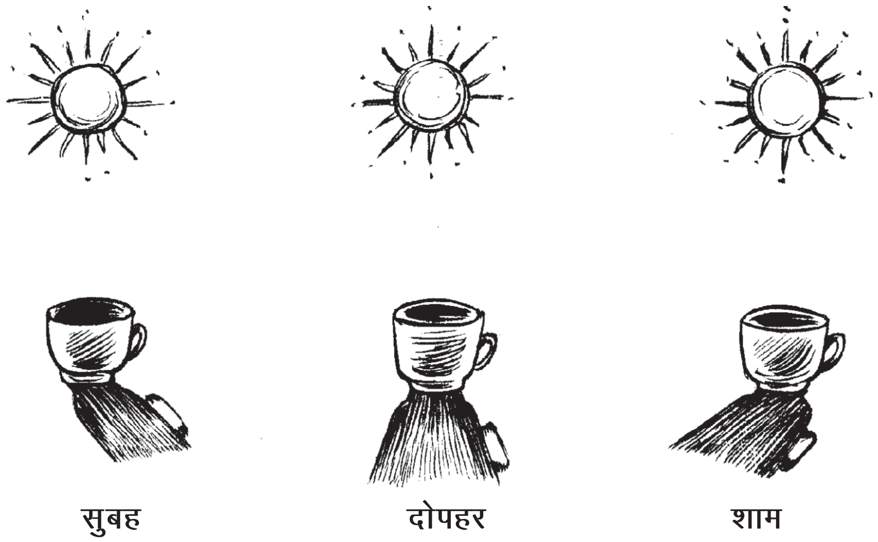
आकृति–16.13

ठोस तीन विमाओं वाला है। इसकी छाया की कितनी विमाएँ हैं?

यदि आप इस खेल में शंकु के स्थान पर एक गेंद को टॉर्च के सामने रखें, तो आपको किस प्रकार की छाया प्राप्त होगी?

स्वयं कीजिए

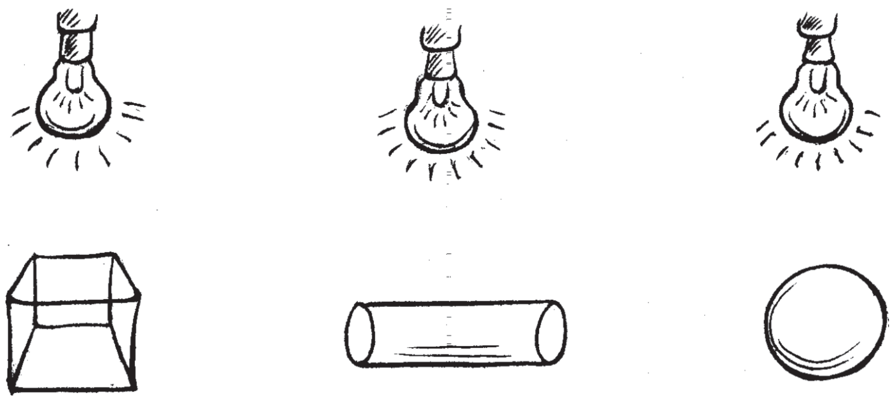
चाय के एक वृत्ताकार प्याले को खुले में सूर्य की रोशनी में किसी दिन विभिन्न समयों में सुबह, दोपहर एवं शाम रखा जाता है। सूर्य की स्थितियों और प्रेक्षण के समयों के अनुसार छायाओं का अध्ययन कीजिए।



आकृति–16.14

प्रश्नावली – 16.4

1. निम्नलिखित ठोसों के ठीक ऊपर एक जलता हुआ बल्ब रखा गया है। प्रत्येक स्थिति में प्राप्त छाया के आकार का नाम बताइए। इस छाया का एक रफ चित्र बनाने का प्रयास कीजिए। (पहले प्रयोग करें और फिर उत्तर दें)



2. आप अपने परिवेश से एक ठोस का नाम बताएँ जो निम्नलिखित छाया का आकार बनाता है।

(अ) वर्ग (ब) त्रिभुज (स) वृत्त (द) आयत

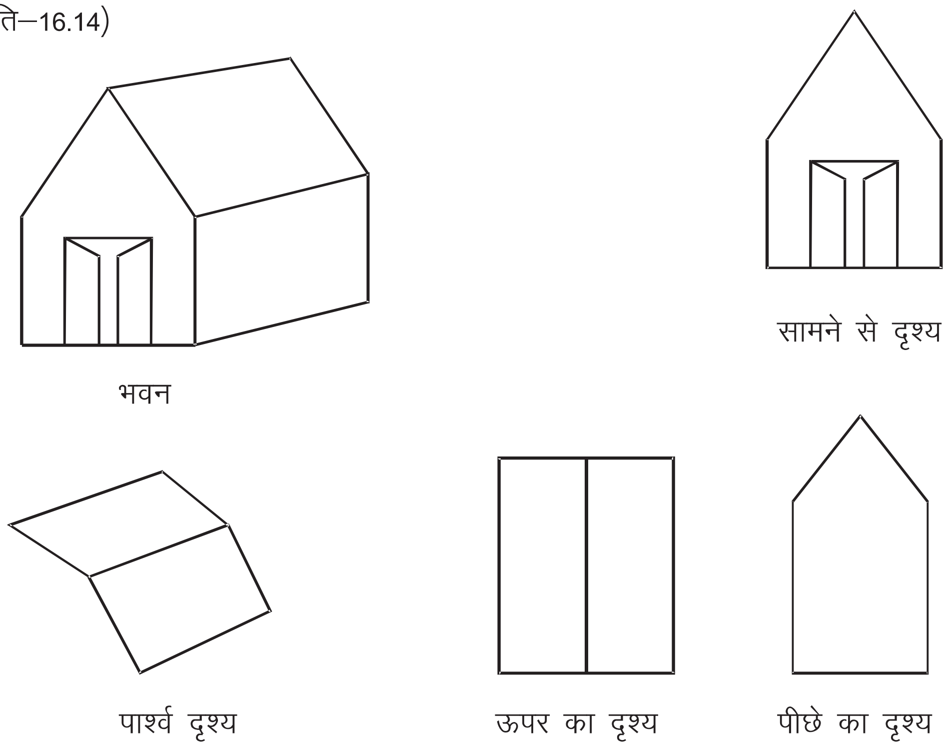
3. जाँच कीजिए कि क्या ये कथन सत्य हैं?

(अ) एक घन एक आयत के आकार की छाया दे सकता है।

(ब) एक घन एक वर्ग के आकार की छाया दे सकता है।

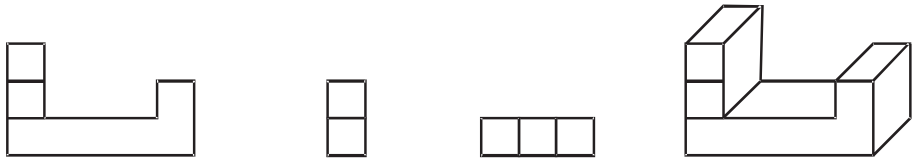
16.5.3 विशेष कोणों से देखने की विधि

एक तीसरी विधि यह है कि कोई भी व्यक्ति किसी वस्तु को उसके सामने से या उसकी ओर (पार्श्व) से या उसके ऊपर से देख सकता है। प्रत्येक बार उसे एक भिन्न दृश्य मिलेगा (आकृति–16.14)



आकृति–16.15

आप इन्हें, घनों को जोड़ने से बनी आकृतियों के लिए भी कर सकते हैं।



आकृति–16.16

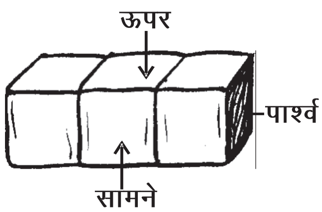
घनों को एक साथ रखकर ठोस बनाइए और फिर उन्हें विभिन्न दिशाओं से देखकर उनके ऊपर बताए अनुसार चित्र बनाने का प्रयत्न कीजिए।

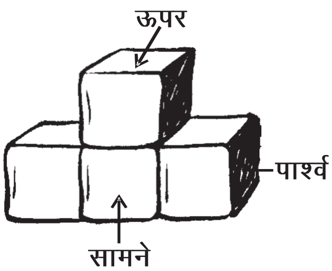
प्रश्नावली – 16.5

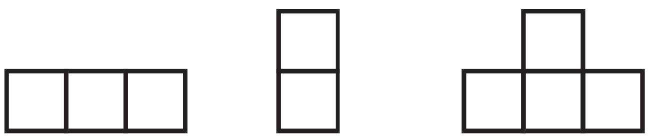
1. प्रत्येक ठोस के लिए तीन दृश्य (1), (2) और (3) दिए गए हैं। प्रत्येक ठोस के लिए संगत ऊपर के (Top), सामने के (Front) और पार्श्व दृश्यों (Side) की पहचान कीजिए।

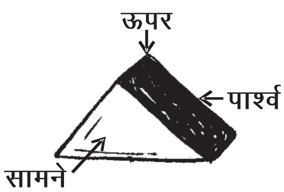
ठोस **उसके दृश्य**

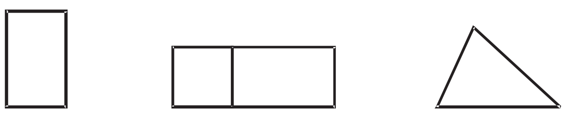
(1) (2) (3)



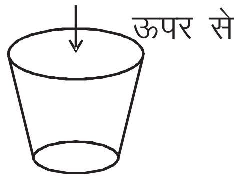


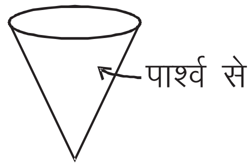


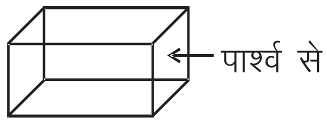


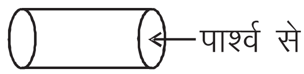


2. नीचे दिए गए प्रत्येक ठोस का, तीर द्वारा सूचित दिशा से उसे देखने पर वह कैसा दिखेगा, एक दृश्य खींचिए।

(अ)


(ब)


(स)


(द)


हमने सीखा

1. वृत्त, वर्ग, आयत, चतुर्भुज और त्रिभुज समतल आकृतियों के उदाहरण हैं तथा घन, घनाभ, गोला, बेलन, शंकु और पिरामिड ठोस आकारों के उदाहरण हैं।
2. समतल आकृतियों की दो विमाएँ (संक्षिप्त में 2–D) होती हैं तथा ठोस आकारों की तीन विमाएँ (संक्षिप्त में 3–D) होती हैं।
3. ठोस आकारों के कोने उसके शीर्ष, उसके ढाँचे के रेखाखंड, उसके किनारे (या कोर) तथा उसके सपाट पृष्ठ उसके फलक कहलाते हैं।
4. ठोस का एक जाल दो विमाओं में एक ऐसा ढाँचा (या रूपरेखा) है जिसे मोड़कर वह ठोस प्राप्त हो जाता है। एक ही ठोस के अनेक प्रकार के जाल हो सकते हैं।
5. वास्तविक रूप से ठोस आकारों को सपाट पृष्ठों (जैसे कागज) पर खींचा जा सकता है। हम इसे 3–D ठोस को 2–D निरूपण कहते हैं।
6. एक ठोस के दो प्रकार के चित्र बनाना संभव है–

   (अ) एक तिर्यक् चित्र, जिसमें लम्बाइयाँ समानुपाती नहीं होती हैं। फिर भी यह ठोस के बारे में सभी महत्त्वपूर्ण जानकारी प्रदान कर देता है।

   (ब) एक समदूरीक चित्र को एक समदूरीक बिन्दुकित कागज पर खींचा जाता है। किसी ठोस के एक समदूरीक चित्र में लम्बाइयों को समानुपाती रखा जाता है।

7. ठोस आकारों का चित्रण एक बहुत ही उपयोगी कौशल है। आपको ठोस आकारों के छिपे हुए भाग दिखाई दिया जाना चाहिए।

8. एक ठोस के विभिन्न भागों को अनेक विधियों से देखा जा सकता है।

(अ) एक विधि यह है कि दिए हुए आकार को काट लिया जाय। इससे हमें ठोस का एक अनुप्रस्थ–काट प्राप्त हो जाती है।

(ब) दूसरी विधि यह है कि एक 3–D आकार की एक ठोस वस्तु को 2–D के रूप में उसकी छाया देखी जाय।

(स) तीसरी विधि यह है कि ठोस आकार को विभिन्न कोणों से देखा जाय।

राष्ट्रीय तंबाकू नियंत्रण कार्यक्रम

i) सभी तंबाकू उत्पाद हानिकारक हैं।

ii) कोई भी तंबाकू उत्पाद किसी भी मात्रा में सुरक्षित नहीं है।

iii) बीड़ी उतनी ही हानिकारक है जितनी कि सिगरेट।

iv) सेकेंड हैंड धूम्रपान भी जानलेवा होता है।

v) तंबाकू चबाने से मुँह के कैंसर सहित कई रोग हो सकते हैं।