P1W2L5

# अध्याय-4 आँकड़ों का प्रबंधन

## 4.1 भूमिका:

पिछली कक्षाओं में आपने विभिन्न प्रकार के आँकड़ों पर कार्य किया था। आपने आँकड़ों को इकट्ठा करना, उनको तालिकाबद्ध करना, उन्हें चित्रालेख व दण्डालेख के रूप में प्रदर्शित करना सीखा था। आँकड़ों का संग्रह, आलेखन और प्रस्तुतीकरण हमारे अनुभवों को संगठित करने और उनसे निष्कर्ष निकालने में हमारी सहायता करते हैं। इस अध्याय में हम इससे आगे आँकड़ों के बारे में सीखेंगे।

**सारणी 4.1**

| | नगरों के तापमान | |
|---|---|---|
| शहर | अधिकतम | न्यूनतम |
| पटना | 41°C | 25°C |
| गया | 43°C | 26°C |
| श्रीनगर | 23°C | 11°C |
| मुम्बई | 36°C | 29°C |
| चेन्नई | 31°C | 27°C |

आपके दैनिक जीवन में आपके सामने अनेक तरह की सूचनाएँ आती हैं। जैसे आपकी कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा गणित के यूनिट टेस्ट में प्राप्त किए गए अंक आदि। इसी तरह आप अखबार, टेलीविजन, पत्रिकाओं और अन्य साधनों से विभिन्न प्रकार की सूचनाएँ देख चुके हैं। इन्हीं सूचनाओं को **आँकड़ा (Data)** कहते हैं। आँकड़े प्रायः एक ऐसी स्थिति के संदर्भ में एकत्रित किए जाते हैं, जिनका हम अध्ययन करना चाहते हैं। आँकड़ों के ये संग्रह आपको क्या बताते हैं?

**सारणी 4.2**

एक विद्यालय में विभिन्न सोमवार को अनुपस्थिति दर्शानेवाला आँकड़ा

| | |
|---|---|
| प्रथम सोमवार | ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ |
| द्वितीय सोमवार | ☺ ☺ ☺ |
| तृतीय सोमवार | ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ |
| चतुर्थ सोमवार | ☺ ☺ |
| पंचम सोमवार | ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ |
| यहाँ ☺ एक बच्चे को निरूपित करता है | |

सारणी 4.1 से हम कह सकते हैं कि गया का अधिकतम तापमान सबसे अधिक था तथा श्रीनगर का तापमान सबसे कम था। सारणी 4.2 से हम कह सकते हैं कि चतुर्थ सोमवार को विद्यालय में सबसे कम बच्चे अनुपस्थित थे। जितने बच्चे प्रथम सोमवार को अनुपस्थित थे उतने ही बच्चे पंचम सोमवार को अनुपस्थित थे। इस प्रकार आँकड़े हमें अनेक बातें बता सकते हैं।

## 4.2 आँकड़ों का संग्रह (Collecting Data)

सारणी 4.1 के आँकड़े हमें यह नहीं बता सकते कि पूरे वर्ष में किस नगर का अधिकतम तापमान सबसे अधिक था? यह जानने के लिए हमें इन नगरों में से प्रत्येक नगर के पूरे वर्ष के दौरान रिकार्ड किए गए अधिकतम तापमानों से संबंधित आँकड़े इकट्ठे करने पड़ेंगे।

इससे यह प्रदर्शित होता है कि आँकड़ों का एक दिया हुआ संग्रह हमें उससे संबंधित एक विशिष्ट सूचना दे पाए। इसके लिए हमें उस विशिष्ट सूचना को ध्यान में रखते हुए, आँकड़ों को इकट्ठे करने की आवश्यकता होती है। सारणी 4.1 हमें पूरे वर्ष के दौरान इन नगरों के अधिकतम तापमान क्या रहे, के बारे में कुछ नहीं बता सकती। इस प्रकार, **आँकड़ों को इकट्ठे करने से पहले, हमें यह जानना आवश्यक है कि हम इनका प्रयोग किसके लिए करेंगे?**

उदाहरणार्थ, आप निम्न स्थितियों पर गौर करें–

- कक्षा में आपके गणित में प्रदर्शन का आँकड़ा
- आपकी कक्षा का गणित में प्रदर्शन का आँकड़ा
- बिहार में महिला साक्षरता दर का आँकड़ा
- किसी गाँव में 5 वर्ष से कम आयु के बच्चों की संख्या का आँकड़ा।

उपर्युक्त स्थितियों में आपको किस प्रकार के आँकड़ों की आवश्यकता है? अर्थात् प्रत्येक के लिए उपयुक्त आँकड़े क्या हैं? अपने मित्रों से चर्चा कीजिए और पहचानिए कि प्रत्येक स्थिति में किन आँकड़ों की आवश्यकता है।

## 4.3 आँकड़ों का संगठन (Organisation of Data):

जब हम आँकड़ों को संग्रहित करते हैं, तो हमें उन्हें रिकॉर्ड करके संगठित करना होता है। आइए एक उदाहरण पर विचार करें–

कक्षा अध्यापिका सुश्री अर्चना यह जानना चाहती थी कि गणित में बच्चों का प्रदर्शन कैसा रहा? वह बच्चों द्वारा प्राप्त अंकों को निम्नलिखित प्रकार से लिखती है :

23, 35, 48, 30, 25, 46, 13, 27, 32, 38

इस रूप में आँकड़े सरलता से समझने योग्य नहीं थे। इस आँकड़े से यह भी पता नहीं चलता था कि किस विद्यार्थी का प्रदर्शन कैसा रहा? अर्चना के एक सहकर्मी ने उन आँकड़ों को सारणी रूप में इकट्ठे करने में उसकी सहायता की। (सारणी 4.3)

### सारणी 4.3

| रोल नं. | नाम | प्राप्तांक | रोल नं. | नाम | प्राप्तांक |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | आशीष | 23 | 6 | सुहाना | 46 |
| 2 | अरशद | 35 | 7 | जयराज | 13 |
| 3 | अमरेन्द्र | 48 | 8 | कोकिल | 27 |
| 4 | दीपू | 30 | 9 | मनीषा | 32 |
| 5 | दीप्ति | 25 | 10 | धीरज | 38 |

अब अर्चना यह समझ सकी कि किस छात्र ने कितने अंक प्राप्त किए। लेकिन वह कुछ और जानकारी भी चाहती थी। तो सहकर्मी ने उन आँकड़ों को दूसरी तरह से प्रदर्शित किया।

### सारणी 4.4

| रोल नं. | नाम | प्राप्तांक | रोल नं. | नाम | प्राप्तांक |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | अमरेन्द्र | 48 | 4 | दीपू | 30 |
| 6 | सुहाना | 46 | 8 | कोकिल | 27 |
| 10 | धीरज | 38 | 5 | दीप्ति | 25 |
| 2 | अरशद | 35 | 1 | आशीष | 23 |
| 9 | मनीषा | 32 | 7 | जयराज | 13 |

अब अर्चना को यह जानना सरल हो गया कि किसने सबसे अच्छा प्रदर्शन किया है? कितने बच्चे 25 से कम अंक लाये हैं और किसको सहायता की आवश्यकता है। इस प्रकार **जब हम आँकड़ों को एक उपयुक्त सारणी में रख लेते हैं, तो उन्हें समझना और उनकी व्याख्या करना सरल हो जाता है।**

हमारे सामने आनेवाले अनेक आँकड़े सारणीबद्ध रूप में होते हैं। हमारे स्कूल के रजिस्टर, प्रगति रिपोर्ट, अभ्यास–पुस्तिकाओं में क्रमानुसार सूची, तापमान के रिकॉर्ड तथा अन्य अनेक आँकड़े सारणीबद्ध (Tabular) रूप में होते हैं। क्या आप कुछ और आँकड़ों के बारे में सोच सकते हैं, जो सारणीबद्ध हो?

**स्वयं करके देखिए**

अपनी कक्षा के बच्चों का वजन पता कीजिए। प्राप्त आँकड़ों को सारणी में संगठित कीजिए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

(i) सबसे कम भार किसका है ?

(ii) कितने छात्र 40 किलोग्राम से अधिक भार का है ?

(iii) कौन–सा भार अधिकांश बच्चे का है ?

(iv) सबसे अधिक और सबसे कम भार का अंतर कितना है ?

## 4.4 प्रतिनिधि मान

आप ''औसत'' (Average) शब्द से अवश्य ही परिचित होंगे तथा अपने दैनिक जीवन में औसत शब्द से संबंधित निम्नलिखित प्रकार के कथन अवश्य ही सुने या पढ़े होंगे:

– ईशा औसतन 5 घंटे पढ़ती है।

– मेरे शहर का औसत तापमान 40 डिग्री सेल्सियस (40°C) है।

– मेरी कक्षा के विद्यार्थियों की औसत आयु 12 वर्ष है।

– एक स्कूल की वार्षिक परीक्षा के समय विद्यार्थियों की औसत उपस्थिति 98 प्रतिशत थी।

इसी प्रकार के अनेक कथन हो सकते हैं। ऊपर दिए हुए कथनों के बारे में सोचिए।

क्या आप सोचते हैं कि पहले कथन में बताया गया बच्चा प्रतिदिन ठीक 5 घंटे पढ़ता है? अथवा, क्या उस विशेष समय पर, दिए हुए स्थान का तापमान सदैव 40°C रहता है? अथवा, क्या उस कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी की आयु 12 वर्ष है? स्पष्टतः इन प्रश्नों का उत्तर है 'नहीं'। तब, ये कथन हमें क्या बताते हैं?

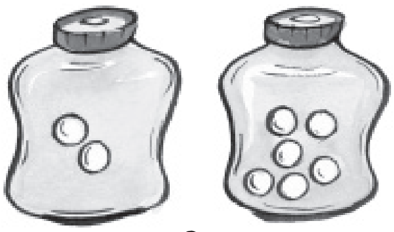
औसत से हम समझते हैं कि ईशा प्रायः एक दिन में 5 घंटे पढ़ती है। कुछ दिन वह इससे कम घंटे पढ़ती है और कुछ दिन इससे अधिक घंटे भी पढ़ती है। इसी प्रकार, 40°C के औसत तापमान का अर्थ है कि वर्ष के इस समय पर तापमान प्रायः 40°C रहता है। कभी वह 40° C से कम रहता है और कभी 40° C से अधिक भी रहता है।

औसत एक ऐसी संख्या है जो आँकड़ों के समूह की केंद्रीय प्रवृत्ति (Central Tendency) को निरूपित करती है। इसलिए हम कहते हैं कि औसत, आँकड़ों के एक समूह की केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक (Measure) है।

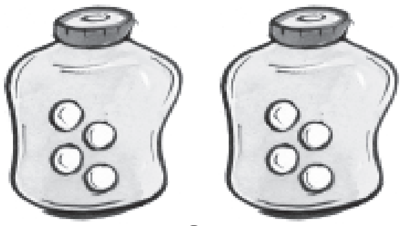
विभिन्न प्रकार के आँकड़ों की व्याख्या करने के लिए, विभिन्न प्रकार के प्रतिनिधि (Representative) या केंद्रीय मानों (Central Values) की आवश्यकता होती है। इनमें से एक प्रतिनिधि मान **अंकगणितीय माध्य** या **समांतर माध्य** (**Arithmetic Mean**) है।

## 4.5 अंकगणितीय माध्य

आँकड़ों के एक समूह के लिए अधिकांशतः प्रयोग किया जानेवाला प्रतिनिधि मान अंकगणितीय माध्य या समांतर माध्य (Arithmetic Mean) है, संक्षेप में इसे माध्य (Mean) या औसत कहते हैं। दो बर्त्तनों में क्रमशः 2 लड्डू और 6 लड्डू हैं। यदि दोनों बर्त्तनों में बराबर–बराबर लड्डू रखे जाएँ तो प्रत्येक बर्त्तन में कितना लड्डू होगा?



**आकृति 4.1**



**आकृति 4.2**

इसके लिए हमें अंकगणितीय माध्य ज्ञात करना होगा।

$$\text{अंकगणितीय माध्य या औसत} = \frac{\text{लड्डू की कुल संख्या}}{\text{बर्त्तनों की संख्या}}$$

$$= \frac{2+6}{2} \text{ लड्डू} = 4 \text{ लड्डू}$$

**माध्य को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है:**

$$\textbf{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

**उदाहरण–1.** नीलम तीन क्रमागत दिनों में क्रमशः 5 घंटे, 6 घंटे और 4 घंटे पढ़ती है। उसके पढ़ने का औसत समय क्या है?

**हल :** नीलम के पढ़ने का औसत समय होगा:

$$\frac{\text{पढ़ाई में लगाया कुल समय}}{\text{दिनों की संख्या जिसमें पढ़ाई की}} = \frac{5+6+4}{3} \text{ घंटे} = 5 \text{ घंटे प्रतिदिन}$$

इस प्रकार नीलम प्रतिदिन 5 घंटे के औसत से पढ़ाई करती है। अर्थात् कुछ दिन वह इससे कम घंटे और कुछ दिन इससे अधिक घंटे पढ़ती है।

**उदाहरण–2.** एक बल्लेबाज ने 6 पारियों में निम्न रन बनाये– 45, 56, 58, 38, 37, 48

एक पारी में उसके द्वारा बनाए गए रनों का माध्य ज्ञात कीजिए।

**हल :** कुल रन = 45 + 56 + 58 + 38 + 37 + 48 = 282

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{सभी प्रेक्षणों की संख्या}} = \frac{282}{6} = 47$$

इस प्रकार एक पारी में उसके द्वारा बनाए गए रनों का माध्य 47 है।

## सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपर्युक्त उदाहरणों में दिए गए आँकड़ों पर विचार कीजिए तथा बताइए–

- क्या माध्य प्रत्येक प्रेक्षण से बड़ा है ?

अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए। इसी तरह का एक और उदाहरण बनाइए और इन्हीं प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

आप पाएँगे कि माध्य सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के बीच में स्थित होता है। विशिष्ट रूप में, दो संख्याओं का माध्य सदैव उनके बीच में स्थित होता है। उदाहरणार्थ, 6 और 10 का माध्य $\frac{6+10}{2} = 8$ है, जो 6 और 10 के बीच में स्थित है।

## स्वयं करके देखिए

1. आप पढ़ाई में व्यतीत किए गए अपने समय (घंटों में) का पूरे सप्ताह का औसत ज्ञात कीजिए।
2. आप औसतन एक दिन में कितने घंटे खेलते हैं। चार दिन के आँकड़ें लें और बताएँ।
3. 5 और 11 का माध्य कहाँ स्थित होगा?

### 4.5.1 प्रसार या परिसर

प्रेक्षणों के उच्चतम एवं निम्नतम मानों के अंतर से, हमें प्रेक्षणों के प्रसार (Range) का एक अनुमान लग जाता है। इसे सबसे बड़े प्रेक्षण में से सबसे छोटे प्रेक्षण को घटा कर ज्ञात किया जा सकता है। हम इस परिणाम को आँकड़ों या प्रेक्षणों का प्रसार या परिसर (Range) कहते हैं।

अतः प्रेक्षणों का परिसर = प्रेक्षण का उच्चतम मान – प्रेक्षण का निम्नतम मान

**उदाहरण–3.** एक स्कूल के 10 अध्यापकों की वर्षों में आयु इस प्रकार है:

38, 40, 32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33

(i) सबसे बड़ी उम्रवाले अध्यापक की आयु क्या है? तथा सबसे छोटी उम्रवाले अध्यापक की आयु क्या है?

(ii) अध्यापकों की आयु का परिसर क्या है?

(iii) इन अध्यापकों की माध्य आयु क्या है?

**हल :** (i) आयु का आरोही क्रम – 23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54

स्पष्ट है कि सबसे बड़ी उम्र = 54 वर्ष

तथा सबसे छोटी उम्र = 23 वर्ष

(ii) अध्यापकों की आयु का परिसर = (54 – 23) वर्ष = 31 वर्ष

(iii) शिक्षकों की माध्य आयु $= \frac{23+26+28+32+33+35+38+40+41+54}{10}$ वर्ष

$= \frac{350}{10}$ वर्ष = 35 वर्ष

## प्रश्नावली– 4.1

1. अपनी कक्षा के किन्हीं दस विद्यार्थियों के वजन का आँकड़ा इकट्ठा कीजिए तथा इसका परिसर ज्ञात कीजिए।

2. प्रथम 7 पूर्ण संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

3. **कक्षा के एक मूल्यांकन में प्राप्त किए गए निम्नलिखित अंकों को एक सारणीबद्ध रूप में संगठित कीजिए :**

4, 6, 7, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 7

(i) सबसे बड़ा अंक कौन–सा है?

(ii) सबसे छोटा अंक कौन–सा है?

(iii) इन अंकों का परिसर क्या है?

(iv) अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।

4. एक क्रिकेट खिलाड़ी ने 6 पारियों में निम्नलिखित रन बनाए :

45, 40, 35, 50, 0, 100

इनका माध्य ज्ञात कीजिए।

5. **निम्न सारणी प्रत्येक खिलाड़ी द्वारा चार खेलों में अर्जित किए गए अंकों को दर्शाती है–**

| खिलाड़ी | खेल 1 | खेल 2 | खेल 3 | खेल 4 |
|---|---|---|---|---|
| A | 16 | 10 | 10 | 14 |
| B | 6 | 8 | 4 | 0 |
| C | 8 | खेला नहीं | 11 | 13 |

**अब निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–**

(i) प्रत्येक खेल में A द्वारा अर्जित औसत अंक ज्ञात करने के लिए माध्य ज्ञात कीजिए।

(ii) प्रत्येक खेल में C द्वारा अर्जित माध्य अंक ज्ञात करने के लिए आप कुल अंकों को 3 से भाग देंगे या 4 से? क्यों?

(iii) B ने सभी खेलों में भाग लिया है। आप उसके अंकों का माध्य कैसे ज्ञात करेंगे? लिखिए।

(iv) किस खिलाड़ी का प्रदर्शन सबसे अच्छा है?

6. चार क्रमागत वर्षों में एक स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या निम्नलिखित थी–

1670, 1750, 2540, 2820

इस काल में विद्यार्थियों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए।

7. गणित की एक परीक्षा में बच्चों के एक समूह द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक 49, 50, 85, 90, 66, 48, 92, 84 और 75 है तो ज्ञात कीजिए–

(i) बच्चों द्वारा प्राप्त सबसे कम अंक और सबसे अधिक अंक

(ii) प्राप्त अंकों का परिसर

(iii) समूह द्वारा प्राप्त माध्य अंक

8. एक नगर में किसी विशेष सप्ताह के 7 दिनों में हुई वर्षा (मिमी. में) निम्नलिखित रूप से अंकित की गई–

| दिन | रविवार | सोमवार | मंगलवार | बुधवार | बृहस्पतिवार | शुक्रवार | शनिवार |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| वर्षा (मिमी.) | 12.2 | 0.0 | 20.5 | 2.1 | 5.5 | 1.0 | 0.0 |

उपरोक्त आँकड़ों से

(i) वर्षा का परिसर (Range) ज्ञात कीजिए।

(ii) सप्ताह की माध्य वर्षा निकालिए।

(iii) माध्य वर्षा से कम वर्षा कौन–कौन से दिन रही ?

9. यदि 6, 8, 5, $x$, 4, 7 और 8 का माध्य 7 है, तो $x$ का मान ज्ञात करें।

10. यदि 10 संख्याओं का माध्य 20 है, तो प्रत्येक संख्या से 2 घटाने पर नया माध्य क्या होगा ?

11. पाँच संख्याओं का माध्य 16 है। यदि समूह में एक संख्या और मिलाई जाए तो 6 संख्याओं का माध्य 21 हो जाता है, तो छठी संख्या का मान ज्ञात करें।

## 4.6 माध्यक (Median)

हमने देखा कि औसत, अंकगणितीय माध्य आँकड़ों का एक प्रतिनिधि मान है। परन्तु यह सर्वथा उपयुक्त हो यह आवश्यक नहीं। जैसे– 11 विद्यार्थियों का एक समूह जिनकी ऊँचाइयाँ सेमी. में नीचे दी गई हैhttps://www.evidyarthi.in/

120, 106, 115, 102, 123, 125, 117, 120, 112, 115, 110

खेल शिक्षिका कक्षा को ऐसे दो समूहों में बांटना चाहती है कि एक उच्च ऊँचाई समूह हो तथा एक निम्न ऊँचाई समूह हों। वह एरेंज किस प्रकार करेगी?

$$=\frac{120+106+115+102+123+125+117+120+112+115+110}{11}$$

$$=\frac{1265}{11}=115$$

इस प्रकार माध्य ऊँचाई से कम ऊँचाईवाले भाग में 4 बच्चे व माध्य ऊँचाई से अधिक ऊँचाईवाले भाग में 7 होंगे। अर्थात् दोनों समूह में बराबर बच्चे नहीं होंगे। इसलिए ऐसी परिस्थिति के लिए एक अन्य प्रतिनिधि मान की आवश्यकता होगी। आइए माध्यक के बारे में सोंचें।

माध्यक दिए गए आँकड़ों में वह मान होता है, जो इसे ठीक–ठीक दो भागों में विभक्त कर देता है। आधे प्रेक्षण इससे अधिक मानवाले होते हैं और आधे प्रेक्षण इससे कम मानवाले होते हैं।

दिए गए आँकड़ों का माध्यक निकालने के लिए आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। जब प्रेक्षणों की संख्या $(n)$ विषम होती है, तब माध्यक $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें प्रेक्षण का मान होता है। उदाहरण के लिए, यदि $n=11$ है, तो $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें अर्थात् $\frac{11+1}{2}=\frac{12}{2}=6$ वें प्रेक्षण का मान माध्यक होगा अर्थात् 115, 106, 110, 115, 115, 115, 117, 120, 120, 123, 125 में 115 माध्यक होगा।

इस प्रकार माध्यक (जब प्रेक्षणों की संख्या विषम हो ) $=\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें प्रेक्षण

जब प्रेक्षणों की संख्या $(n)$ सम होती है, तो माध्यक $\left(\frac{n}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षणों का माध्य होता है। उदाहरण के लिए, यदि $n=10$ है, तो $\left(\frac{10}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{10}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षणों के मानों के माध्य अर्थात्, 5वें और 6वें प्रेक्षणों के मानों का माध्य ही माध्यक होगा।

इस प्रकार माध्यक (जब प्रेक्षणों की संख्या = सम) $=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}\text{वें प्रेक्षण}+\left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वें प्रेक्षण}\right)$

**उदाहरण–4.** एक कक्षा के 9 विद्यार्थियों की (सेन्टीमीटरों में) लम्बाइयाँ ये हैं–

155, 160, 145, 149, 150, 147, 152, 144, 148

इन आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

**हल :** सबसे पहले हम इन आँकड़ों को आरोही क्रम (या अवरोही क्रम) में इस प्रकार लिखते हैं : 144, 145, 147, 148, 149, 150, 152, 155, 160

यहाँ विद्यार्थियों की संख्या 9 है, अर्थात् विषम है, इसलिए हम $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें $=\left(\frac{9+1}{2}\right)$ वें = 5वें विद्यार्थी की लम्बाई, जो कि 149 सेंटीमीटर है, ज्ञात करके माध्यक प्राप्त कर लेते हैं। अतः माध्यक लंबाई 149 सेंटीमीटर है।

**उदाहरण–5.** कबड्डी की एक टीम द्वारा अनेक मैचों में प्राप्त किए गए अंक ये हैं:

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28

टीम द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

**हल :** टीम द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का आरोही क्रम =

2, 5, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 14, 15, 17, 18, 24, 27, 28, 48

यहाँ 16 पद है, जो सम संख्या के प्रेक्षण है। इसलिए यहाँ दो मध्य पद हैं। ये $\frac{16}{2}$ वें और $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ वें अर्थात् 8वें और 9वें पद हैं।

अत: 8वें और 9वें पदों के मान का माध्य ही माध्यक होगा।

$$\text{इसलिए माध्यक } = \frac{10+14}{2} = 12$$

अत: कबड्डी टीम द्वारा प्राप्त किए माध्यक अंक 12 हैं।

## 4.7 बहुलक (Mode):

हमने देखा, माध्य और माध्यक केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप या प्रतिनिधि मान हैं। परन्तु क्या ये हमारी सारी आवश्यकताओं के लिए उपयुक्त हैं? आओ एक उदाहरण को देखें।

एक दूकानदार का कमीजों की बिक्री का रिकॉर्ड इस प्रकार हैं :–

| माप (cm) में | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 |
|---|---|---|---|---|---|
| बेची गई कमीजों की संख्या | 8 | 22 | 32 | 37 | 6 |

अब दुकानदार कमीजों के स्टॉक (Stock) के लिए प्रवृत्ति के मापक का प्रयोग करें कि वह अपने ग्राहकों की आवश्यकताओं को पूरा कर पाए।

देखें माध्य और माध्यक के द्वारा क्या मापक आते हैं–

$$\text{बेची गई कमीजों का माध्य } \frac{8+22+32+37+6}{5} = \frac{105}{5} = 21$$

अर्थात् वह प्रत्येक माप की 21 कमीजें स्टॉक में रखें।

बेची गई कमीजों का माध्यक = 6, 8, 22, 32, 37, का $\left(\frac{5+1}{2}\right)$ वें मान = तीसरा मान = 22 है।

अर्थात् वह प्रत्येक माप की 22 कमीजें स्टॉक में रखें। स्पष्ट है, रेडीमेड (Readymade) कपड़ों के दूकानदार के लिए माध्य और माध्यक जैसे मापक उपयुक्त नहीं है। यहाँ दुकानदार कमीज के उस माप को देखेगा, जो सबसे अधिक बिकती है। यह आँकड़ों का एक अन्य प्रतिनिधि मान है। सबसे अधिक बिक्री 105 सेमी. माप की कमीजों की 37 है। यह प्रतिनिधि मान (105) आँकड़ों का बहुलक (Mode) कहलाता है।

इस प्रकार बहुलक प्रेक्षण का वह मान होता है, जो सबसे अधिक बार घटित होता है।

**उदाहरण–6.** निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए :

1, 1, 2, 3, 4, 2, 1, 2, 2, 4

**हल :** समान मानवाली संख्याओं को एक साथ व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4

इन आँकड़ों का बहुलक 2 है, क्योंकि यह अन्य प्रेक्षणों की तुलना में अधिक बार आता है।

### 4.7.1 बड़े आँकड़ों का बहुलक

यदि प्रेक्षणों की संख्या बड़ी हो, तो उनको समान मानवाले प्रेक्षणों के रूप में व्यवस्थित करना और फिर उनको गिनना इतना सरल नहीं होता है। ऐसी स्थिति में, हम आँकड़ों को सारणीबद्ध करते हैं, जैसा कि आप पिछली कक्षा में कर चुके हैं, आँकड़ों की सारणी बनाने का कार्य मिलान चिह्नों (Tally Marks) से प्रारंभ करते हुए प्रेक्षणों की बारंबारताएँ (Frequencies) बना कर पूरा किया जा सकता है। अर्थात् किसी प्रविष्टि की बारम्बारता वह संख्या है, जितनी बार वह प्रविष्टि आँकड़ों में आती है।

**उदाहरण–7.** एक विद्यालय की 7वीं कक्षा के 22 विद्यार्थियों द्वारा (100 अंकों में से) प्राप्त किए गए अंक निम्न है–

10, 20, 36, 50, 50, 56, 60, 60, 70, 70, 36, 40, 36, 60, 40, 50, 50, 56, 60, 70, 60, 60.

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

**हल :** इन आँकड़ों को एक सारणी के रूप में रखने पर।

| अंक | मिलान चिह्न | विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता) |
|---|---|---|
| 10 | I | 1 |
| 20 | I | 1 |
| 36 | III | 3 |
| 40 | II | 2 |
| 50 | IIII | 4 |
| 56 | II | 2 |
| 60 | ~~IIII~~ I | 6 |
| 70 | III | 3 |

इस सारणी को देखकर हम तुरंत यह कह सकते हैं कि '60' बहुलक है, क्योंकि 60 सबसे अधिक बार आया है। इस प्रकार अधिकांश विद्यार्थियों ने 60 अंक प्राप्त किए हैं। एक निश्चित अंक प्राप्त करनेवाले विद्यार्थियों की संख्या को इस अंक की बारंबारता (Frequency) कहते हैं। अधिकतम बारम्बारता वाले प्रेक्षण को बहुलक कहा जाता है। क्या संख्याओं के एक समूह में दो बहुलक हो सकते हैं? सोचिए और चर्चा कीजिए।

**उदाहरण–8.** निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8

**हल :** यहाँ 2 और 5 दोनों ही तीन बार आए हैं। अतः ये दोनों ही आँकड़ों के बहुलक है।

**स्वयं करके देखिए**

1. आप अपनी कक्षा के साथियों की वर्षों में आयु रिकॉर्ड कीजिए और फिर उनका बहुलक ज्ञात कीजिए।

2. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए–

   12, 14, 12, 16, 15, 13, 14, 18, 19, 12, 14, 15, 16, 15, 16, 16, 15, 17, 13, 16, 15, 15, 13, 15, 17, 15, 14, 15, 13, 15, 14

3. 25 बच्चों की ऊँचाइयाँ (cm में) नीचे दी गई है–

   168, 165, 163, 160, 163, 161, 162, 164, 163, 162, 164, 163, 160, 163, 160, 165, 163, 162, 163, 164, 163, 160, 165, 163, 162

   उनकी लंबाइयों का बहुलक क्या है? यहाँ बहुलक से आप क्या समझते हैं?

**उदाहरण–9.** एक कारखाने में 5 व्यक्ति काम करते हैं, जिसमें एक सुपरवाइजर है और चार मजदूर हैं। प्रत्येक मजदूर को प्रति माह 5000 रु० वेतन मिलता है, जबकि सुपरवाइजर को प्रति 15000 रु० वेतन मिलता है। इनके वेतनों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

**हल :** माध्य $= \frac{5000+5000+5000+5000+15000}{5} = \frac{35000}{5} = 7000$

अतः माध्य वेतन 7000 रु० प्रतिमाह है।

माध्यक ज्ञात करने के लिए हम वेतन के आँकड़े को इस प्रकार आरोही क्रम में रखते हैं–

5000, 5000, 5000, 5000, 15000

क्योंकि फैक्टरी में काम करनेवाले लोगों की संख्या 5 है, इसलिए माध्यक प्रेक्षण $= \frac{5+1}{2}$ वाँ $= \frac{6}{2}$ वाँ = तीसरा प्रेक्षण होगा। अतः माध्यक तीसरे प्रेक्षण का मान, अर्थात् 5000 रु० प्रतिमाह होगा।

वेतनों का बहुलक 5000 रु० (क्योंकि सबसे अधिक व्यक्तियों का वेतन 5000 रु. हैं) प्रति माह।

यहाँ आँकड़ों का माध्य 7000 रु० है, जो आँकड़ों के चरम मान से प्रभावित है। यह माध्य की दुर्बलता है। यदि आँकड़ों के कुछ अंकों में अंतर बहुत अधिक हो (जैसे, 1, 7, 8, 9, 9) तो इस स्थिति में माध्य इन आँकड़ों का उत्तम प्रतिनिधित्व नहीं करता। माध्यक और बहुलक आँकड़ों में उपस्थित चरम मानों से प्रभावित नहीं होते हैं। रेडीमेड गार्मेन्ट (सिले–सिलाये वस्त्र) उद्योग और जूता उद्योग केन्द्रीय प्रवृत्ति के बहुलक मापक का प्रयोग करते हैं और निर्णय लेते हैं कि किस साइज या माप का उत्पादन अधिक संख्या में करना चाहिए।

सोचिए और चर्चा कीजिए – कौन सी केन्द्रीय प्रवृत्ति (प्रतिनिधि मान) उपयुक्त होगा?

(i) आपको एक पिकनिक में 10 साथियों के लिए आवश्यक पुड़ियों के बारे में निर्णय लेना है।

(ii) एक पिकनिक पर जाते समय, प्रत्येक साथी के लिए केवल एक ही फल खरीदा जाना है, तब, हम कौन सा फल खरीदेंगे?

**उदाहरण–10.** मीना और मंटू को उनकी परीक्षा की कापियाँ दी गई हैं। परीक्षा में 10 – 10 अंकों के पाँच प्रश्न थे। इस परीक्षा में उनके प्राप्तांक ये थे;

| प्रश्नों की क्रम संख्या | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| मीना का प्राप्तांक | 10 | 8 | 9 | 8 | 7 |
| मंटू का प्राप्तांक | 4 | 7 | 10 | 10 | 10 |

परीक्षा की कापियाँ प्राप्त होने पर मीना और मंटू दोनों अपने–अपने प्रदर्शन पर चर्चा शुरू किया। मीना ने कहा मेरा औसत प्राप्तांक $=\frac{42}{5}=8.4$ है। मंटू ने कहा मेरा औसत प्राप्तांक $=\frac{41}{5}=8.2$ है।

क्योंकि मीना का औसत प्राप्तांक मंटू के औसत प्राप्तांक से अधिक था, इसलिए मीना का कहना था कि परीक्षा में मंटू की तुलना में उसका प्रदर्शन अच्छा रहा है। परन्तु मंटू इससे सहमत नहीं था उसने दोनों के प्राप्तांकों को आरोही क्रम में रखा और मध्य प्राप्तांक इस प्रकार प्राप्त किया–

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| मीना का प्राप्तांक | 7 | 8 | (8) | 9 | 10 |
| मंटू का प्राप्तांक | 4 | 7 | (10) | 10 | 10 |

मंटू कहना था कि उसका सबसे मध्य का प्राप्तांक 10 है, जो कि मीना के सबसे मध्य के प्राप्तांक अर्थात् 8 से अधिक है। इसलिए परीक्षा में उसके प्रदर्शन को उत्तम माना जाना चाहिए।

परन्तु मीना उसके तर्क से सहमत नहीं थी। मीना को अपने कथन से सहमत कराने के लिए मंटू ने एक अन्य युक्ति अपनाई, जो निम्न थी–

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| मीना का प्राप्तांक | 7 | 8 | (8) | 9 | 10 |
| मंटू का प्राप्तांक | 4 | 7 | (10) | (10) | (10) |

मंटू ने बताया कि उसने 10 अंक अधिक बार (3 बार) प्राप्त किए हैं, जबकि मीना ने 8 अंक अधिक बार (2 बार) प्राप्त किए हैं। अतः परीक्षा में उसका प्रदर्शन उत्तम रहा है।

पहली स्थिति में मीना ने जो औसत प्राप्तांक प्राप्त किया था वह है – माध्य (Mean)

मध्य प्राप्तांक जिसको मंटू ने अपने तर्क में प्रयोग किया था वह है – माध्यक (Median) या माध्यिका।

अपनी दूसरी युक्ति में मंटू ने अधिक बार अधिक अंक प्राप्त करने की बात कही थी वह है – बहुलक (Mode)

ये तीनों आँकड़ों के एक समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापक (Measure) है।

## प्रश्नावली 4.2

**1. एक क्रिकेट मैच में खिलाड़ियों द्वारा बनाए गए रन इस प्रकार हैं–**

6, 15, 120, 50, 100, 80, 10, 15, 8, 10, 15

इन आँकड़ों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए। क्या ये तीनों समान हैं?

**2. गणित की एक परीक्षा में, 15 विद्यार्थियों द्वारा (25 पूर्णांक में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित है–**

19, 25, 23, 20, 9, 10, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20

इन आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए। क्या ये समान हैं?

**3. निम्नलिखित आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए–**

38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47

क्या इसके एक से अधिक बहुलक हैं?

**4. एक टीम ने फुटबॉल के 10 मैचों में निम्नलिखित गोल किए–**

2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3

इन गोलों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

**5. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य–**

(i) माध्य प्रत्येक प्रेक्षण से बड़ा होता है।

(ii) माध्य प्रत्येक प्रेक्षण से छोटा होता है।

(iii) माध्य सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों बीच में स्थित होता है।

(iv) दो संख्याओं का माध्य सदैव उनके बीच में स्थित होता है।

(v) माध्य दिए हुए आँकड़ों में से एक संख्या हो सकता है।

(vi) बहुलक सदैव आँकड़ों मे से ही संख्या होती है।

(vii) माध्यक आँकड़ों में से सदैव एक संख्या होता है।

(viii) आँकड़े 3, 4, 5 का माध्य 4 है।

## 4.8 दंड आरेख

अब हम आँकड़ों के आलेखीय निरूपण (Graphical Representation) की ओर अपना ध्यान केन्द्रीत करें। आलेख, एकत्रित आँकड़ों का चित्रों द्वारा प्रदर्शन है। आलेखों द्वारा प्रदर्शन समझने में बहुत आसान होता है। हमने पिछली कक्षाओं में भी विभिन्न प्रकारों के आलेखों के बारे में कुछ चर्चा की थी।

1. **एक चित्रालेख (Pictograph)** : संकेतों का प्रयोग करते हुए आँकड़ों का चित्रीय निरूपण–

   (i) मार्च के महीने में कितनी पेन्सिल की बिक्री हुई?

   (ii) किस महीने में पेन्सिल की बिक्री अधिकतम हुई?

   (iii) किन महीनों में पेन्सिल की बिक्री बराबर हुई?

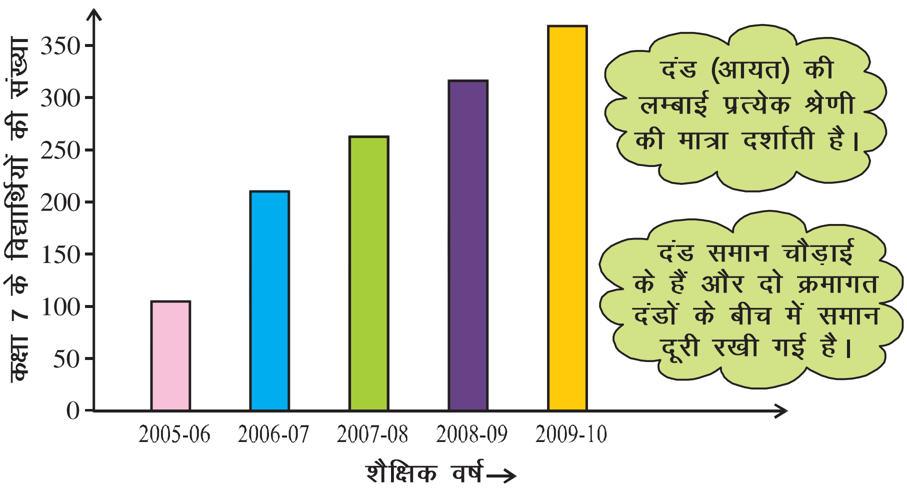
**सारणी–4.6**

✏ = 500 पेन्सिल की बिक्री

| | |
|---|---|
| जनवरी | ✏✏ |
| फरवरी | ✏✏✏ |
| मार्च | ✏ |
| अप्रैल | ✏✏✏✏✏ |
| मई | ✏✏✏ |

2. **एक दंड आलेख (Bar Graph)**

   हम जानते हैं कि दंड आलेख समान चौड़ाई के दंडो (bar) द्वारा संख्याओं (आँकड़ों) का प्रदर्शन (निरूपण) है, जिसमें दंडों की लम्बाइयाँ (ऊँचाइयाँ) क्रमशः उसके मानों के समानुपाती होती हैं।




आकृति–4.3

**निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–**

(i) इस दंड आलेख द्वारा क्या सूचना दी गई है?

(ii) किस वर्ष विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम है?

(iii) किस वर्ष में विद्यार्थियों की संख्या में अधिकतम वृद्धि हुई?

(iv) किस वर्ष विद्यार्थियों की संख्या सबसे कम है?

### 4.8.1 दंड आलेख बनाना (Construction of Bar Graphs)

आइए अब हम एक उदाहरण लेकर देखें कि एक दंड आलेख ग्राफ पेपर पर किस प्रकार बनाया जाता है।

**उदाहरण–11.** एक बाग में विभिन्न वर्षों में लगाए गए पौधों की संख्या निम्नलिखित है–

| वर्ष | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
|---|---|---|---|---|
| पौधों की संख्या | 3000 | 2000 | 4000 | 5000 |

इन आँकड़ों से दंड आलेख बनाइए।

**हल :** हम इन आँकड़ों का दंड आलेख निम्नलिखित चरणों में बनाते हैं–

(i) एक ग्राफ पेपर पर हम दो परस्पर लम्ब रेखाएँ खींचते हैं, जिनमें एक क्षैतिज (पड़ी) तथा दूसरी ऊर्ध्वाधर (खड़ी) हो।

(ii) हम क्षैतिज अक्ष पर वर्षों (चर) को दिखाते हैं। स्पष्टता के लिए हम सभी दंड समान चौड़ाई के लेते हैं और उनके बीच समान दूरी बनाये रखते हैं। दंड की चौड़ाई इस प्रकार लेनी चाहिए कि सभी चरों (वर्षों) को दिखाया जा सके।

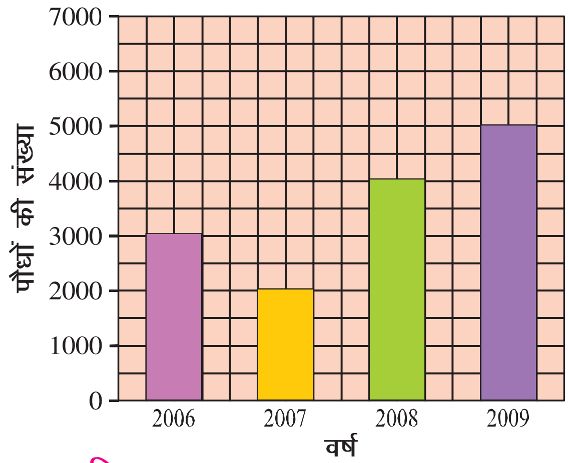
(iii) हम ऊर्ध्वाधर अक्ष पर पौधों की संख्या (बारम्बारता) को दिखाते हैं। इस अक्ष पर एक इकाई लम्बाई से कितने प्रेक्षणों को निरूपित करना है, इसके लिए एक उपयुक्त पैमाना चुनते हैं। इस आँकड़ों में सबसे बड़ा मान 5000 है, तो स्केल को 5000 से कुछ अधिक पर समाप्त करते हैं।

साथ ही, अक्ष पर समान विभाजनों का प्रयोग करते हुए, हम स्केल को इस प्रकार चुनेंगे, ताकि 0 और 5000 के बीच की लम्बाई न तो अधिक छोटी और न ही अधिक बड़ी हो। यहाँ हम 1 इकाई = 1000 पौधे लेते हैं।

(iv) अब हम चुने गये स्केल (1 इकाई = 1000 पौधे) के अनुसार विभिन्न दण्डों की ऊँचाई ज्ञात करते हैं–

इस प्रकार ग्राफ पेपर पर समान चौड़ाई के 4 दण्ड निम्न प्रकार बनते हैं। (आकृति 4.4)

| वर्ष | दण्ड की ऊँचाई |
|---|---|
| 2006 | $\frac{1}{1000} \times 3000 = 3$ इकाई |
| 2007 | $\frac{1}{1000} \times 2000 = 2$ इकाई |
| 2008 | $\frac{1}{1000} \times 4000 = 4$ इकाई |
| 2009 | $\frac{1}{1000} \times 5000 = 5$ इकाई |



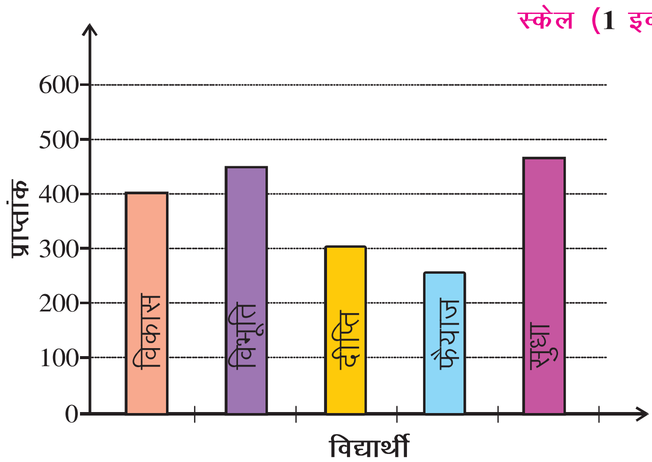

आकृति 4.4

**उदाहरण—12.** निम्नलिखित आँकड़े एक कक्षा के पाँच विद्यार्थियों द्वारा (500 में से) प्राप्त किए गए कुल अंकों को दर्शाते हैं। इन्हें एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

| विद्यार्थी | विकास | विभूति | दीप्ति | फैयाज | सुधा |
|---|---|---|---|---|---|
| प्राप्तांक | 400 | 450 | 300 | 250 | 460 |

**हल :** हम 1 इकाई = 100 अंक लेते हैं। (यदि हम 1 इकाई से 10 अंकों को निरूपित करें, तो क्या कठिनाई होगी)

**स्केल (1 इकाई = 100 अंक)**




आकृति 4.5

### 4.8.2 दोहरे दंड आलेख खींचना

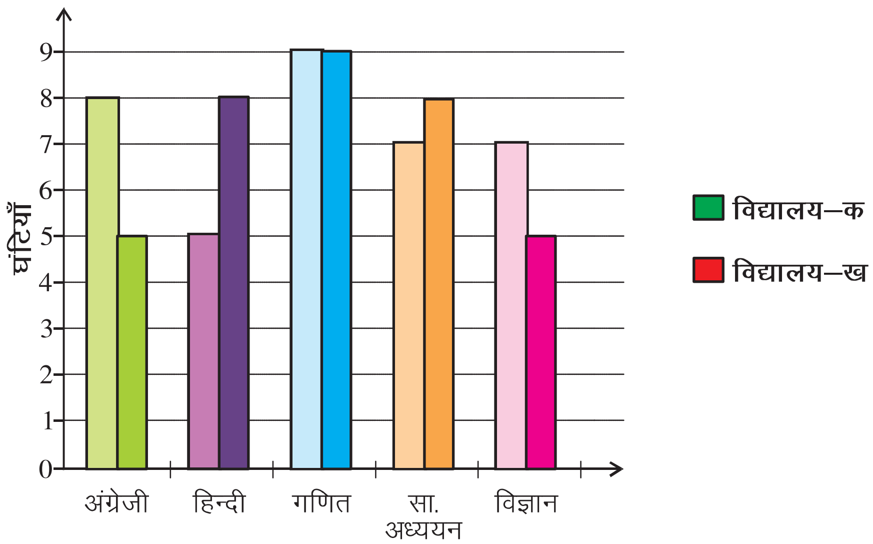
नीचे दो स्कूलों में विभिन्न विषयों के दिए जानेवाले कालांशों (घंटियों) का आँकड़ा दिया गया है। इस पर विचार कीजिए–

| विद्यालय–क | |
|---|---|
| विषय | कालांश |
| अंग्रेजी | 8 |
| हिन्दी | 5 |
| गणित | 9 |
| सा. अध्ययन | 7 |
| विज्ञान | 7 |

| विद्यालय–ख | |
|---|---|
| विषय | कालांश |
| अंग्रेजी | 5 |
| हिन्दी | 8 |
| गणित | 9 |
| सा. अध्ययन | 8 |
| विज्ञान | 5 |

इनके अलग–अलग दंड आलेख खींचकर हम कई जानकारियाँ प्राप्त कर सकते हैं, जैसे दोनों स्कूलों में अधिकतम कालांश किस विषय को दिए जाते हैं या प्रत्येक स्कूल में किस विषय को सबसे कम कालांश दिए जाते हैं आदि। परन्तु एक खास विषय में किस स्कूल में कालांश अधिक हैं जैसे प्रश्नों का उत्तर देने के लिए हमें दोहरा दंड आलेख खींचेंगे।

अर्थात् जब हमें आँकड़ों के दो समूहों की तुलना करने की आवश्यकता होती है, तो दोहरे दंड आलेख (Double Bar Graphs) खींचते हैं।



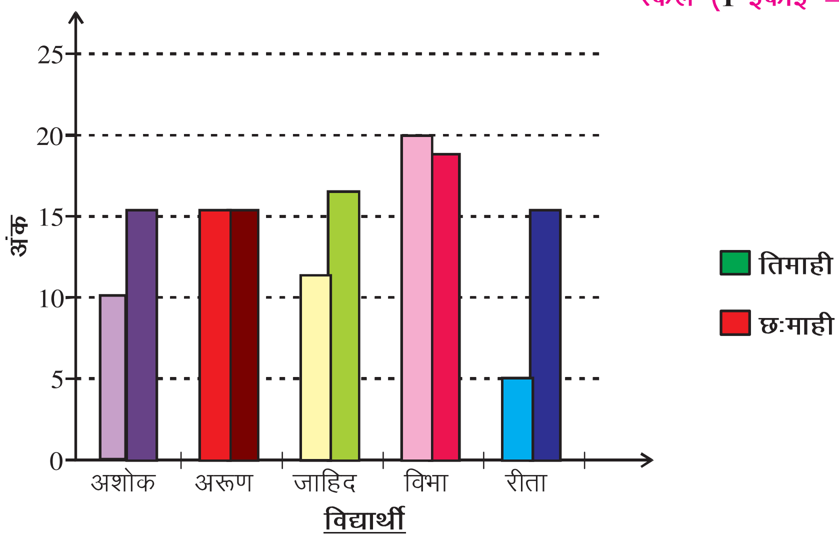

**आकृति 4.6**

**उदाहरण—13.** गणित की अध्यापिका 5 कमजोर बच्चों द्वारा तिमाही परीक्षा और छमाही परीक्षा में पूर्णांक 25 में से प्राप्त किए गए अंकों को निम्न रूप में दर्शाती है।

| विद्यार्थी | अशोक | अरूण | जाहिद | विभा | रीता |
|---|---|---|---|---|---|
| तिमाही | 10 | 15 | 12 | 20 | 5 |
| छमाही | 15 | 15 | 16 | 18 | 15 |

इन आँकड़ों से दोहरे दंड आलेख खींचिए ।

**हल :** **स्केल (1 इकाई = 5 अंक)**




**आकृति 4.7**

**दंडों को देखकर अब आप निम्न प्रश्नों का उत्तर दीजिए :—**

(i) किस विद्यार्थी का प्रदर्शन तिमाही की तुलना में छमाही में सबसे अच्छा रहा?

(ii) किस विद्यार्थी की प्रगति तिमाही और छमाही में समान रहा?

(iii) किस विद्यार्थी ने तिमाही की अपेक्षा छमाही में अच्छा प्रदर्शन नहीं किया?

(iv) कितने विद्यार्थी ने छमाही परीक्षा में 15 अंक से अधिक अंक प्राप्त किया?

क्या आप कुछ अन्य स्थितियों के बारे में बता सकते हैं, जहाँ आप दोहरे दंड आलेख का प्रयोग कर सकते हैं ?

## स्वयं करके देखिए

1. वर्ष 2006 से 2010 में अंग्रेजी और हिन्दी की पुस्तकों की बिक्री नीचे दी गई है:

| वर्ष | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 |
|---|---|---|---|---|---|
| अंग्रेजी | 250 | 300 | 350 | 520 | 620 |
| हिन्दी | 400 | 425 | 500 | 550 | 600 |

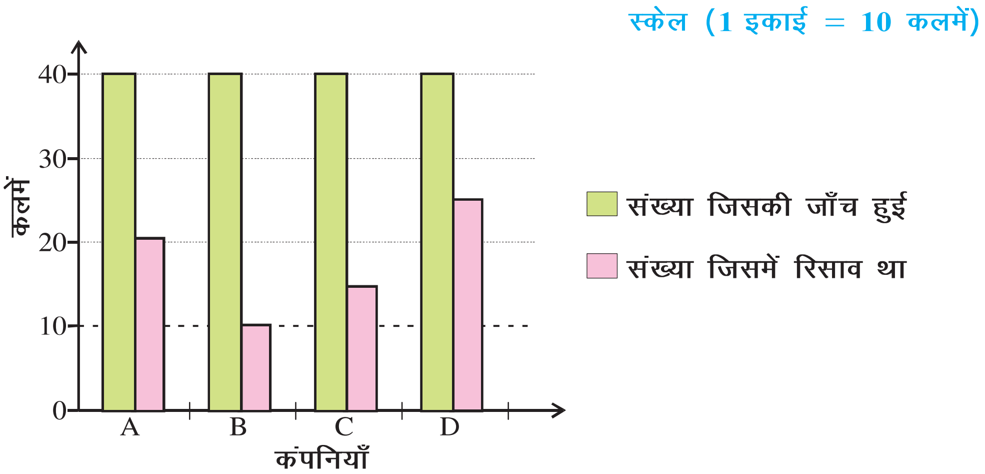
एक दोहरे दंड आलेख खींचिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

(a) क्या आप कह सकते हैं कि अंग्रेजी की पुस्तकों की माँग में तेजी से वृद्धि हुई है? इसके पीछे का तर्क दीजिए।

(b) किस वर्ष दोनों भाषाओं की पुस्तकों की बिक्री का अन्तर न्यूनतम था?

(c) किस वर्ष दोनों भाषाओं की पुस्तकों की बिक्री का अंतर अधिकतम था?

2. दिया हुआ दंड आलेख विभिन्न कंपनियों द्वारा बनाई गई बॉल पेन की जाँच के लिए किए गए एक सर्वेक्षण को दर्शाता है। इनमें से प्रत्येक कंपनी ने यह दावा किया कि उनके बॉल पेन रिसते नहीं है।




आकृति 4.8

(a) प्रत्येक कंपनी के लिए रिसाववाली कलमों की संख्या, कुल कलमों की संख्या का कौन-सा हिस्सा थी?

(b) किस कम्पनी की कलमें बेहतर हैं?

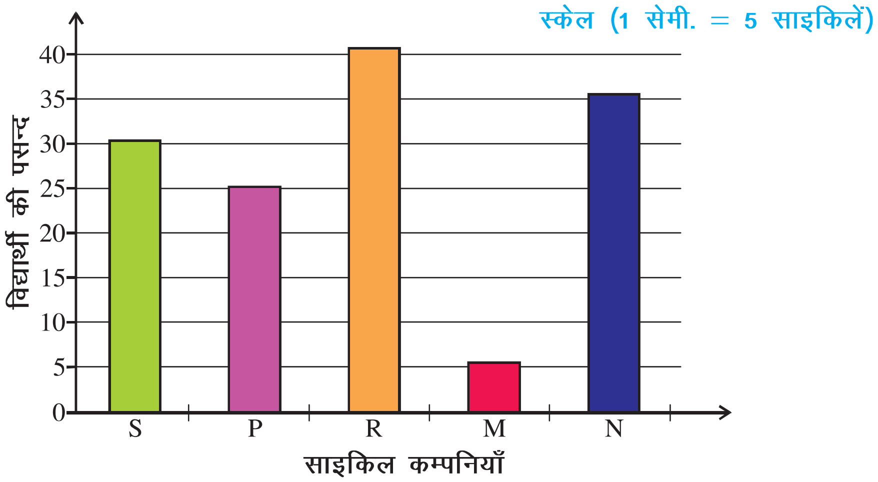
## प्रश्नावली 4.3

1. **आकृति 4.9 में दिए दंड आलेख का प्रयोग कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :**

(a) किस कंपनी की साइकिल अधिक लोकप्रिय है?

(b) कितने विद्यार्थियों की पसन्द P कम्पनी की साइकिलें हैं?

(c) किस कम्पनी की साइकिलें सबसे कम लोकप्रिय हैं?




आकृति 4.9

2. निम्न सारणी में एक विद्यालय के 2006 से 2010 तक प्रत्येक वर्ष वार्षिक खेलों में भाग लेने वाले खिलाड़ियों की संख्या दी गई है। इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

| वर्ष | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 |
|---|---|---|---|---|---|
| खिलाड़ियों की संख्या | 160 | 280 | 200 | 400 | 320 |

(a) दंडालेख बनाने के लिए आप क्या पैमाना लेंगे।

**(b) निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–**

(i) किस वर्ष में खिलाड़ियों की संख्या अधिकतम है और किस वर्ष में न्यूनतम है ?

(ii) वर्ष 2006 के खिलाड़ियों की संख्या का वर्ष 2010 के खिलाड़ियों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए।

3. एक विद्यार्थी के प्रथम सत्र और द्वितीय सत्र का प्रदर्शन दिया हुआ है (100 में से)। इन आँकड़ों का एक दोहरा दंड आलेख खींचिए और दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

| विषय | हिन्दी | अंग्रेजी | गणित | सा. विज्ञान | विज्ञान |
|---|---|---|---|---|---|
| प्रथम सत्र | 60 | 70 | 80 | 84 | 76 |
| द्वितीय सत्र | 80 | 65 | 95 | 85 | 80 |

(i) विद्यार्थी ने अपने किस विषय में सबसे अधिक सुधार किया है?

(ii) सबसे कम सुधार किस विषय में हुआ?

(iii) क्या किसी विषय में प्रदर्शन नीचे गिरा है?

4. एक फल विक्रेता ने किन्हीं दो दिनों में फलों की बिक्री (kg में) का तुलनात्मक सारणी बनाया। आप इन्हें दोहरे दंड आलेख में दिखाइए तथा दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

| फल | आम | सेब | संतरे | पपीता | केले | तरबूज |
|---|---|---|---|---|---|---|
| सोमवार | 35 | 29 | 12 | 20 | 18 | 38 |
| मंगलवार | 26 | 34 | 8 | 25 | 16 | 35 |

(i) कौन–सा फल अधिक लोकप्रिय है?

(ii) इस दंड आलेख से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

5. **एक कॉलोनी में लगातार दो वर्षों में विभिन्न मदों पर खर्च निम्नलिखित है–**

| मद | 2008 (हजार रु० मं) | 2009 (हजार रु० मं) |
|---|---|---|
| जल आपूर्ति | 25 | 30 |
| चिकित्सा | 30 | 35 |
| सुरक्षा | 50 | 70 |
| रोड | 40 | 20 |
| विद्युत | 35 | 35 |

**एक उपयुक्त स्केल चुनकर, एक दोहरा दंड आलेख खींचिए व प्रश्नों का उत्तर दीजिए।**

(i) किस मद में पिछले वर्ष की अपेक्षा सबसे अधिक खर्च किया गया?

(ii) किस मद में दोनों वर्षों में बराबर खर्च हुए?

(iii) 2008 में विद्युत और रोड पर कुल कितना खर्च हुआ?

(iv) किस वर्ष का खर्च अधिक रहा?

6. इस अध्याय के प्रारंभ में, दिए हुए विभिन्न नगरों के न्यूनतम और अधिकतम तापमानों के आँकड़ों (सारणी 4.1) को लीजिए। इन आँकड़ों का एक दोहरा दंड आलेख खींच कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) किस नगर का न्यूनतम और अधिकतम तापक्रम का अंतर सबसे अधिक है ?

(ii) कौन–सा नगर सबसे गर्म है, और कौन–सा नगर सबसे ठंढा है ?

(iii) ऐसे दो नगरों के नाम लिखिए, जिसमें से एक का अधिकतम तामपान दूसरे के न्यूनतम तापमान से कम है। https://www.evidyarthi.in/

(iv) उस नगर का नाम लिखिए, जिसके न्यूनतम और अधिकतम तापमानों का अंतर सबसे कम है।

## 4.9 संयोग और प्रायिकता

हमें अपने दैनिक जीवन में इस प्रकार के कथन सुनने को मिलते रहते हैं :

(i) आज वर्षा होने की संभावना (या संयोग) नहीं है।

(ii) भारत विश्व कप जीतेगा।

(iii) सूर्य पश्चिम से निकलता है।

(iv) एक पासे को फेंकने पर 8 आयेगा।

(v) एक किलोग्राम की अपेक्षा 2 किलोग्राम सब्जी अधिक होगी।

(vi) छोटे पत्थर की जगह बड़ा पत्थर अधिक जगह घेरेगा।

(vii) भारत अगली टेस्ट श्रृंखला जीतेगा।

(viii) विभूति परीक्षा में टॉप करेगा।

उपर्युक्त कथनों के बारे में आप क्या कहेंगे? यहाँ पश्चिम से सूर्य का निकलना असंभव है, एक पासे को फेंकने पर 8 आना भी संभव नहीं है। इसके विपरीत कथन (v) और (vi) का होना निश्चित (Certain) है। दूसरी ओर कथन (i), (ii), (vii)और (viii) हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता है। दोनों ही संभव है। होने या न होने के संयोग (Chance) है।

### 4.9.1 संयोग

जब आप एक सिक्के को उछालते हैं, तो क्या आप सदैव इसकी सही भविष्यवाणी कर सकते हैं कि चित (Head) प्राप्त होगा या पट (Tail)? आप 10 बार एक सिक्के को उछालकर उससे प्राप्त होनेवाले परिणाम एवं अपनी भविष्यवाणी को निम्न सारणी में लिखिए–

**सारणी–4.7**

| उछाल संख्या | भविष्यवाणी | परिणाम |
|---|---|---|
| 1. | | |
| 2. | | |
| 3. | | |
| 4. | | |
| 5. | | |
| 6. | | |
| 7. | | |
| 8. | | |
| 9. | | |
| 10. | | |

क्या आप इसमें कोई पैटर्न देखते हैं? प्रत्येक उछाल के बाद आपको क्या प्राप्त होता है?

आप देखेंगे कि ये प्रेक्षण कोई स्पष्ट प्रतिरूप (Pattern) नहीं दर्शाते हैं। निम्न सारणी को देखिए–

**सारणी–4.8**

| उछाल संख्या | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| परिणाम | H | T | H | H | H | T | T | T | T | T | T |
| उछाल संख्या | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| परिणाम | H | H | T | T | H | H | H | H | H | T | H |

उक्त सारणी नाहिदा और नचीता के 22 उछालों से प्राप्त प्रेक्षणों का है। यहाँ H = Head (चित) T = Tail (पट) है। स्पष्ट है, यहाँ चित और पट के आने का कोई निश्चित पैटर्न नहीं है। यह संयोग (Chance) की बात है कि एक विशेष उछाल में चित या पट में से कोई एक हो सकता है।

## स्वयं करके देखिए

1. एक सिक्का को 125 बार उछालिए और ज्ञात कीजिए कि कितनी बार चित आया तथा कितनी बार पट?
2. एक पासे को 100 बार फेंकिए तथा परिणामों को रिकॉर्ड कीजिए। ज्ञात कीजिए कि 1, 2, 3, 4, 5 और 6 कितनी–कितनी बार आए हैं?
3. विभूति ने एक पासे को 235 बार फेंका और निम्नलिखित सारणी प्राप्त की:

**सारणी–4.9**

| पासे की संख्या | मिलान चिह्न | बारम्बारता |
|---|---|---|
| 1 | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 | |
| 2 | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 | |
| 3 | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 | |
| 4 | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 | |
| 5 | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 | |
| 6 | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 | |

इन आँकड़ों के लिए एक दंड आलेख खींचिए। इन परिणामों से प्राप्त निष्कर्ष क्या है? चर्चा करे।

### 4.9.2 प्रायिकता

जब एक सिक्के को उछाला जाता है, तो आपको क्या संभव परिणाम प्राप्त होते हैं? नि:संदेह, चित (Head) या पट (Tail)। इस प्रकार चित और पट,सिक्के उछालने के दो परिणाम (Outcomes) हैं तथा परिणाम के आने का संयोग (Chance) एक ही है। अर्थात् दोनों ही परिणाम की सम्भावनाएँ बराबर थीं। अत: ये समप्रायिक (Equally Likely) घटनाएँ हैं। एक चित प्राप्त करने की संभावना 2 परिणामों में से 1 है अर्थात् ½ है।

अब यदि आप एक पासे (Die) को फेंके, तो क्या आप प्राप्त होनेवाली संख्या की भविष्यवाणी कर सकते हैं? लूडो (Ludo) या 'साँप और सीढ़ी' के खेल खेलते समय, आपने यह अवश्य चाहा होगा, कि मनपसन्द संख्या प्राप्त हो। लेकिन क्या सदैव आपकी चाहत पूरी होती है?

अब एक पासा लीजिए, उसे 150 बार फेंकिए तथा प्राप्त परिणामों को निम्न सारणी में भरिए–

**सारणी–4.10**

| पासे पर लिखित संख्या | मिलान चिह्न Tally Mark | संख्या कितनी बार प्राप्त हुई (बारंबारता) |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |

फेंक कर प्रत्येक परिणाम के लिए उपयुक्त खाने में मिलान चिह्न जैसे 3 आने पर 3 के सम्मुख लगाते रहिए। इस प्रक्रिया को 150 बार करिए तथा प्रत्येक परिणाम की बारम्बारता (कुल संख्या) ज्ञात कीजिए। इन आँकड़ों के आधार पर एक दंड आलेख बनाइए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर प्राप्त कीजिए–

1. परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 में से कौन सबसे अधिक बार है ?
2. सबसे बड़े परिणाम और सबसे छोटे परिणाम का अन्तर क्या है ?

अब एक पासे को एक बार फेंकने पर 1, 2, 3, 4, 5 या 6 परिणाम प्राप्त होगा। इस प्रकार छह सम संभावित परिणाम है। तो हम कहते हैं कि 1, 2, 3, 4, 5 और 6 में से प्रत्येक के आने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है।

जैसे– (i) 5 आने की प्रायिकता $\frac{1 \leftarrow \text{5 देने वाले परिणामों की संख्या}}{6 \leftarrow \text{समप्रायिक परिणामों की संख्या}}$

(ii) 8 आने की प्रायिकता $\frac{0 \leftarrow \text{8 देने वाले परिणामों की संख्या}}{6 \leftarrow \text{समप्रायिक परिणामों की संख्या}}$

स्पष्ट है कि कई संभावनाओं वाली घटना की प्रायिकता 0 और 1 के बीच में होती है। जिनके घटित होने का कोई संयोग या संभावना नहीं है, उनकी प्रायिकता 0 होती है तथा जिनको निश्चित रूप से घटित होना है, उनकी प्रायिकता 1 होती है।

## प्रश्नावली—4.4

1. **बताइए कि निम्नलिखित में से किसका होना निश्चित है, किसका होना असंभव है तथा कौन हो भी सकता है, नहीं भी हो सकता है।**

(i) त्रिभुज बनाने पर तीन शीर्ष बनेंगे।

(ii) एक सिक्के को उछालने पर पट आयेगा।

(iii) एक सिक्के को उछालने पर चित एवं पट दोनों आयेगा।

(iv) एक पासे को फेंकने पर 7 आएगा।

(v) कल बादल घिरे होंगे।

(vi) यह मैच भारत जीतेगा।

2. एक—एक पर्ची पर 1 से 8 तक संख्याएँ लिखी हुई हैं। उन्हें एक बॉक्स में रखकर अच्छी प्रकार से मिला दिया जाता है। बॉक्स के अन्दर से बिना देखे एक पर्ची निकाली जाती है तो निम्न की प्रायिकता क्या है?

(i) संख्या 5 प्राप्त करना।

(ii) 1 अंक की एक संख्या प्राप्त करना।

(iii) 5 से छोटी एक संख्या प्राप्त करना।

(iv) 5 से बड़ी एक संख्या प्राप्त करना।

3. रानी और रीला में कौन पहले गाना गायेगी, इसका निर्णय करने के लिए एक सिक्का उछाला जाता है। रीला के पहले गाने की प्रायिकता क्या है?

## हमने सीखा

1. आँकड़ों (Data) को इकट्ठा करने से पहले, हमें यह जान लेना चाहिए कि हम इनका उपयोग किस कार्य में करेंगे।
2. एकत्रित किए गए आँकड़ों को एक उपयुक्त सारणी के रूप में संगठित किए जाने की आवश्यकता होती है, ताकि ये सरलता से समझने के योग्य हों और इनकी व्याख्या की जा सके।
3. प्रतिनिधि मान एक ऐसी संख्या है, जो दिए हुए प्रेक्षणों के समूह (या आँकड़ों) के महत्त्वपूर्ण अभिलक्षणों (केन्द्रीय प्रवृत्ति) को दर्शाता है।
4. औसत एक ऐसी संख्या है, जो प्रेक्षणों (Observations) या आँकड़ों (Data) के एक समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति को दर्शाती है। यह सबसे अधिक तथा सबसे कम मूल्य (Value) के आँकड़ों के बीच में होता है।
5. प्रेक्षणों के उच्चतम एवं निम्नतम मानों के अंतर से, हमें प्रेक्षणों के प्रसार (Range) का एक अनुमान लग जाता है।
6. माध्यक भी एक प्रकार का प्रतिनिधि मान है। यह उस मान को दर्शाता है, जो प्रेक्षण के मध्य (बीच) में होता है (उन्हें आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के बाद) अर्थात् आधे प्रेक्षण इसके ऊपर होते हैं और आधे प्रेक्षण इसके नीचे होते हैं।
7. बहुलक प्रेक्षणों के एक समूह में वह प्रेक्षण होता है, जो सबसे अधिक बार आता है।
8. आलेख (Graph), एकत्रित आँकड़ों का चित्रों द्वारा निरूपण (Representation) है। दंड आलेख (Bar Graph) आँकड़ों का समान चौड़ाई वाले दंडों (आयतों) द्वारा एक चित्रीय निरूपण है।
9. दोहरा दंड आलेख, प्रेक्षणों के दो समूहों की तुलना करने में सहायक है।
10. हमें अपने दैनिक जीवन में ऐसी स्थितियाँ मिलती हैं–(i) जो निश्चित रूप से होती है। (ii) जिसका होना संभव नहीं है। (iii) जो हो भी सकती है, नहीं भी हो सकती।

    जिसके घटित होने का कोई संयोग (Chance) नहीं है, उनकी प्रायिकता (Probability) 0 होती है। जिनको निश्चित रूप से घटित होना है उनकी प्रायिकता 1 होती है। कई संभावनाओं वाली घटना की प्रायिकता 0 और 1 के बीच में होती है।