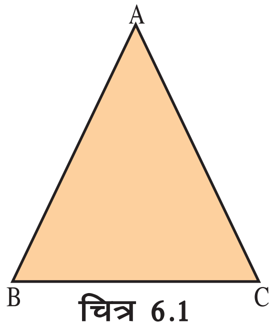
अध्याय-6 त्रिभुज और उसके गुण

C7M6C3

भूमिका



चित्र 6.1

पिछली कक्षा में हमने त्रिभुज के बारे में पढ़ा है। तीन रेखा खंडों से घिरी सरल आकृति त्रिभुज है। त्रिभुज में तीन शीर्ष तीन भुजाएँ तथा तीन कोण होते हैं। चित्र 6.1 में ABC एक त्रिभुज है तथा A, B तथा C शीर्ष है। AB, BC तथा CA भुजाएँ हैं, तथा $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$ तीन कोण हैं। शीर्ष A के सामने की भुजा BC तथा BC के सामने का कोण $\angle BAC$ है।

हम त्रिभुजों को उनकी भुजा एवं कोण के आधार पर वर्गीकृत करने का भी अध्ययन कर चुके हैं। भुजा के आधार पर त्रिभुज के तीन प्रकार होते हैं समबाहु, समद्विबाहु तथा विषमबाहु त्रिभुज। उसी प्रकार कोण के आधार पर त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं, न्यूनकोण, समकोण तथा अधिककोण त्रिभुज।

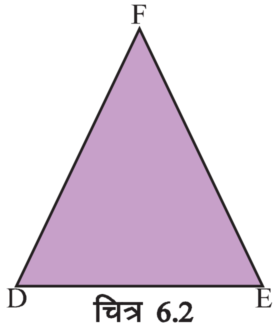
प्रयास कीजिए

1. चित्र 6.2 में त्रिभुज DEF के शीर्ष, भुजा एवं कोणों के नाम लिखिए।

   ____

   ____

   ____

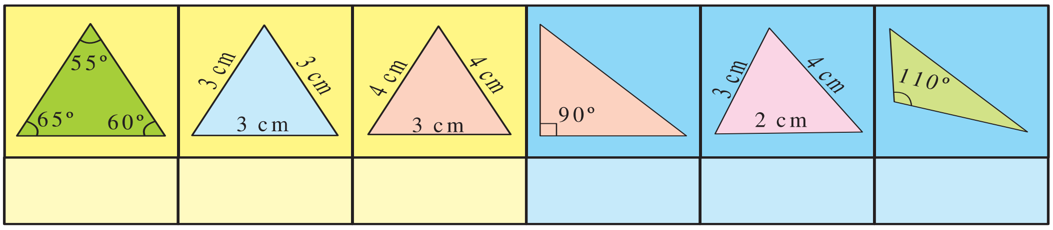


चित्र 6.2

2. $\angle DEF$ के सामने वाली भुजा के नाम बताइये।

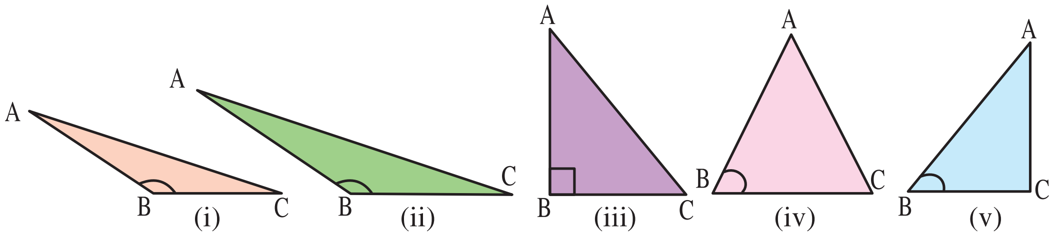
   ____

3. नीचे दिए गए प्रत्येक त्रिभुज के नीचे लिखिए कि वह कौनसा त्रिभुज हैं? (समबाहु, समद्विबाहु, समकोण, न्यूनकोण, अधिककोण या विषमबाहु)



6.1 त्रिभुज के कोणों के योग का नियम

नीचे बने त्रिभुजों के कोण B को ध्यान से देखिए–

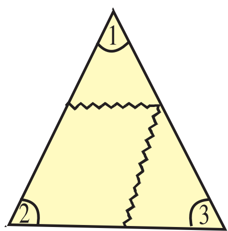


चित्र–6.3

ऊपर के चित्र में त्रिभुज ABC में $\angle B$ की माप को घटते हुए दिखाया गया है । हम पाते हैं कि जैसे जैसे $\angle B$ का मान घट रहा है वैसे–वैसे $\angle A$ और $\angle C$ का मान बढ़ रहा है । अर्थात् त्रिभुज में तीनों कोणों का घटना या बढ़ना किसी एक निश्चित नियम के तहत होता है तथा त्रिभुज के कोणों का योग भी किसी नियम से बंधा होता है, आइए इसको सीखने की कोशिश करें ।

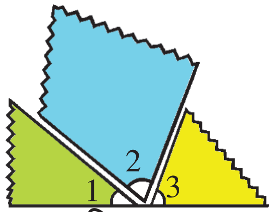
कुछ करें

अपने नोट बुक पर एक त्रिभुज बनाइए अब परकार की सहायता से त्रिभुज के तीनों कोणों को समान त्रिज्या वाली चापों से दर्शाइए तथा उन पर चित्रानुसार 1, 2 एवं 3 अंकित कीजिए। अब त्रिभुज को तीन टुकड़ों में इस प्रकार काटिए कि प्रत्येक टुकड़े में त्रिभुज का एक–एक कोण हो।



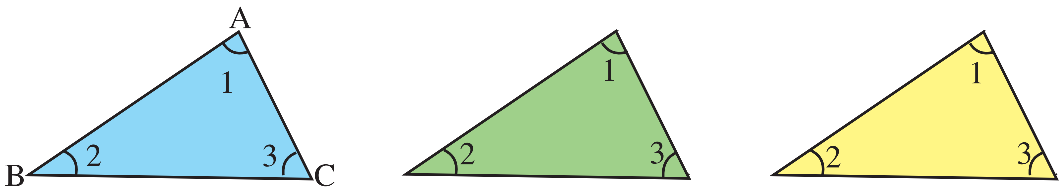
चित्र 6.4

अब तीनों टुकड़ों में बने कोण को इस प्रकार से व्यवस्थित कीजिए कि उनके शीर्ष एक साथ एक बिन्दु पर रहे (चित्र 6.5)। यहाँ $\angle 1$, $\angle 2$ और $\angle 3$ मिलकर एक सरल रेखा बनाते हैं तथा समान त्रिज्या वाली चापों से दर्शाये गये कोण एक सरल रेखा पर व्यवस्थित होते हैं। चूँकि एक सरल रेखा पर बने समस्त कोणों का योग दो समकोण के बराबर होता है और चूँकि एक समकोण = $90°$ अतः दो समकोण = $180°$ अतः $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$। इस प्रकार हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $180°$ होता है। आइए इस निष्कर्ष को हम एक अन्य तरीके से भी जानने की कोशिश करें।



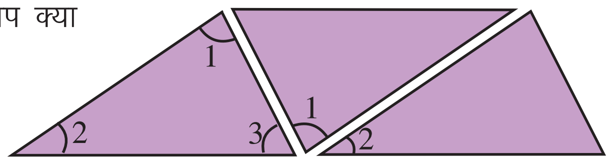
चित्र 6.5

इस तथ्य को आप एक अन्य विधि द्वारा भी देख सकते हैं। किसी ΔABC के तीन प्रतिरूप बनाइए, (चित्र 6.6)।



चित्र 6.6

इन तीनों को आकृति 6.7 की भाँति मिलाकर ठीक से रखिए। $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ के बारे में आप क्या अवलोकन करते हैं?
(क्या आप यहाँ बाह्य कोण से संबंधित गुण भी देख पाते हैं?)



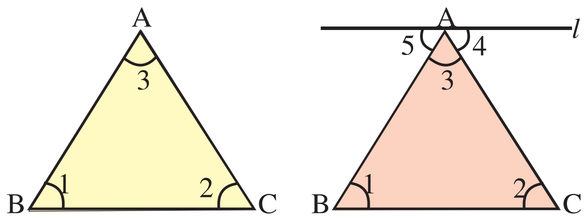
चित्र 6.7

कुछ करें

अपनी अभ्यास पुस्तिका में कोई तीन त्रिभुज, मानों $\Delta ABC, \Delta PQR$ तथा ΔXYZ खींचिए। इन सभी त्रिभुजों के प्रत्येक कोण की माप एक कोण मापक द्वारा मापकर ज्ञात कीजिए। इन मापों को तालिका रूप में इस प्रकार लिखिए,

Δ का नाम	$\angle$ कोणों की माप			तीनों कोणों की मापों का योग
ΔABC	$m\angle A=$	$m\angle B=$	$m\angle C=$	$m\angle A+m\angle B+m\angle C=$
ΔPQR	$m\angle P=$	$m\angle Q=$	$m\angle R=$	$m\angle P+m\angle Q+m\angle R=$
ΔXYZ	$m\angle X=$	$m\angle Y=$	$m\angle Z=$	$m\angle X+m\angle Y+m\angle Z=$

कथन: त्रिभुज के तीनों कोणों की मापों का योग 180° होता है। इस तथ्य को स्थापित करने के लिए हम समान्तर रेखा के गुणों का उपयोग करें।



चित्र 6.8

दिया है– ΔABC के तीन कोण $\angle 1, \angle 2$ तथा $\angle 3$ है। (चित्र 6.8)

दिखाना है: $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$

शीर्ष A से भुजा $\overline{BC}$ के समान्तर रेखा l खींची

उपपत्ति	**चरण**	**कारण**
(i)	$\angle 1 = \angle 5$	$\bar{l} \parallel \overline{BC}$ तथा AB एक तिर्यक रेखा है। अतः एकान्तर कोण समान होने चाहिए।
(ii)	$\angle 2 = \angle 4$	$\bar{l} \parallel \overline{BC}$ तथा AC एक तिर्यक रेखा है। अतः एकान्तर कोण समान होने चाहिए।

(i) + (ii)

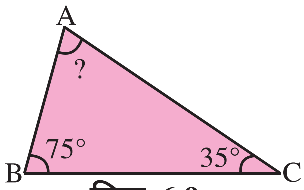
$\Rightarrow$ $\angle 1 + \angle 2 = \angle 5 + \angle 4$ — दोनों पक्षों में $\angle 3$ जोड़ने पर

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 4 + \angle 3$

$= 180°$ — $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ एक रेखा पर बने कोण हैं तथा एक रेखा पर बने कोणों का योग 180° होता है।

अर्थात् त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° यानी दो समकोण के बराबर होता है।

उदाहरण–1. दिए गए त्रिभुज में $\angle B = 75°, \angle C = 35°$ तब $\angle A$ की माप ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.9

हम जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है, अतः $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

या, $\angle A + 75° + 35° = 180°$

या $\angle A + 110° = 180°$

या $\angle A = 180° - 110° = 70°$

उदाहरण–2. दिए गए चित्र में ΔABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कोण B समकोण है तथा कोण C का माप 60° है। कोण A का माप ज्ञात कीजिए।

समकोण त्रिभुज ABC में

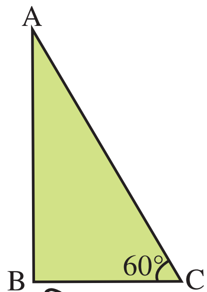
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\Rightarrow \angle A + 90° + 60° = 180° \quad (\because \angle B = 90°)$

$\Rightarrow \angle A + 150° = 180°$

$= \angle A = 180° - 150° = 30°$

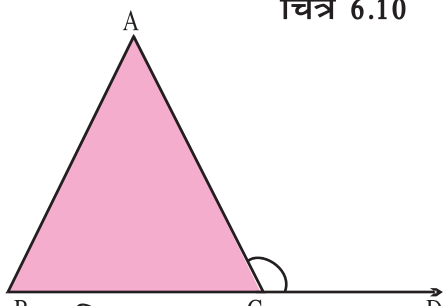
अतः $\angle A = 30°$



चित्र 6.10

6.2 बाह्य कोण, अन्तः अभिमुख कोण

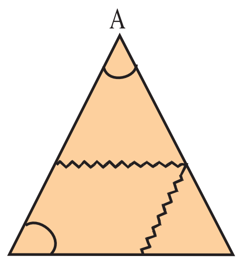
चित्र 6.11 में त्रिभुज ABC में BC भुजा को C की दिशा में D बिन्दु तक बढ़ाया गया है। इस C बिन्दु पर बना कोण $\angle ACD$ त्रिभुज के बाह्य भाग में बना कोण है। ऐसे बाह्य कोण अन्य भुजाओं को बढ़ाकर भी प्राप्त किए जा सकते हैं।



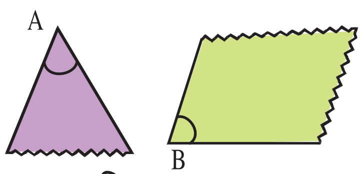
चित्र 6.11

अतः $\angle ACD$ ΔABC के शीर्ष C पर बना एक बाह्य कोण कहलाता है । यहाँ ΔABC के तीनों कोणों में $\angle C$ बाह्य कोण ACD के साथ जुड़ा कोण है, $\angle A$ तथा $\angle B$ बाह्य कोण से दूर स्थित कोण है जो त्रिभुज के आन्तरिक भाग में है । शीर्ष C पर स्थित बाह्य कोण के लिए $\angle C$ संलग्न अंतः कोण तथा $\angle A$ एवं $\angle B$ सम्मुख अन्तः कोण है ।

आइए अब बाह्य कोण एव अन्तः कोणों में संबंध को देखें । एक ट्रेसिंग पेपर पर ΔABC का ट्रेस करें। (चित्र 6.12) अब ट्रेसिंग पेपर को इस तरह दो हिस्सों में बाँटिए कि $\angle A$ एक हिस्से पर तथा $\angle B$ दूसरे हिस्से पर हो, (चित्र 6.13)



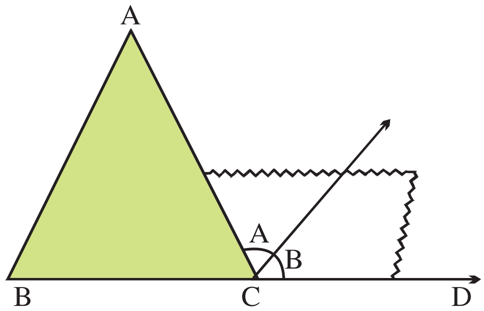
चित्र 6.12



चित्र 6.13

अब ∠A और ∠B को संलग्न कर ∠ACD पर रखिए । क्या ये दोनों कोण ∠ACD को पूरी तरह ढक लेते हैं ? चित्र 6.14 को देखने से यह पता चलता है कि ∠A और ∠B एक साथ मिलकर ∠ACD को पूरी तरह ढक लेते हैं ।

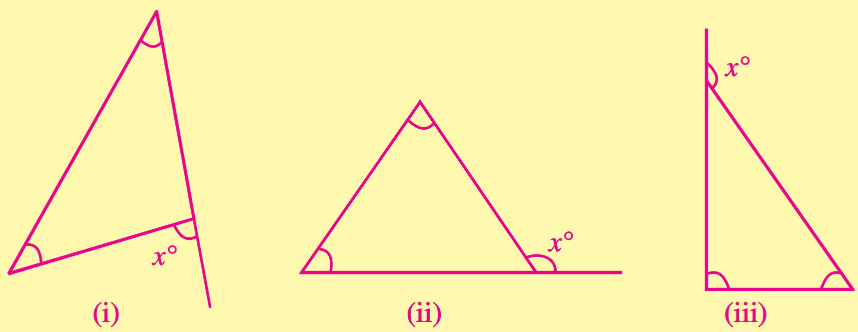
तब m ∠ACD = m ∠A + m ∠B यानी किसी त्रिभुज का बाह्य कोण अपने दोनों सम्मुख अन्तः कोणों के योग के बराबर होता है ।



चित्र 6.14

स्वयं करके देखिए

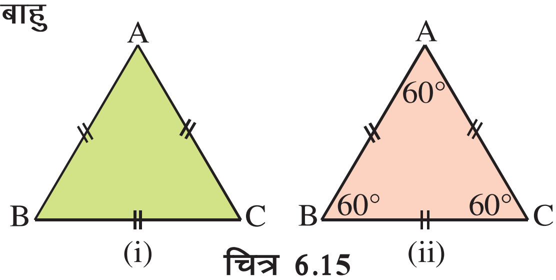
नीचे दिए गए त्रिभुजों में दिए गये बाह्य कोण व संगत अन्तः अभिमुख कोणों को मापिए तथा इस नियम की जाँच कीजिए तथा x का मान ज्ञात कीजिए।



त्रिभुज के कोण व भुजा में संबंध :

दो विशेष त्रिभुज : समबाहु तथा समद्विबाहु

एक त्रिभुज, जिसकी तीनों भुजाओं की माप समान हो, समबाहु त्रिभुज कहलाता है।

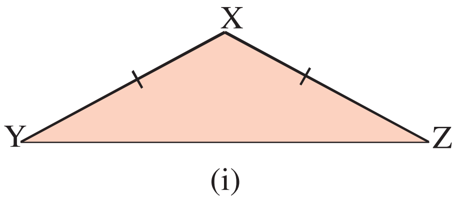


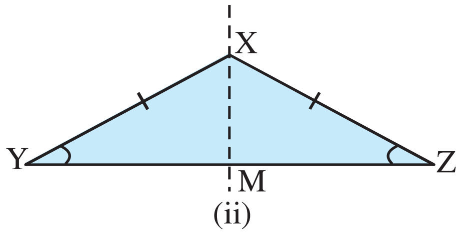
चित्र 6.15

एक समबाहु त्रिभुज ABC (चित्र 6.15) बनाइए। इसका प्रतिरूप यानी इसी माप का एक और समबाहु त्रिभुज कागज से काटें। पहले त्रिभुज को स्थिर रखते हुए इस पर दूसरा त्रिभुज इसे ढँकते हुए रखें। दूसरा त्रिभुज पहले को पूरी तरह ढँक लेता है। दूसरे त्रिभुज को पहले त्रिभुज पर किसी भी तरह घुमाकर रखें, वे दोनों त्रिभुज फिर भी एक दूसरे को ढँक लेते हैं। क्या आप देख पाते हैं कि

यदि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ समान माप की हैं तब तीनों कोण भी समान माप के ही होते हैं। हम निष्कर्ष निकालते हैं कि समबाहु त्रिभुज में (i) तीनों भुजाएँ समान माप की होती हैं। (ii) प्रत्येक कोण की माप 60° होती हैं।

एक त्रिभुज, जिसकी दो भुजाओं की माप समान हों, एक समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है।





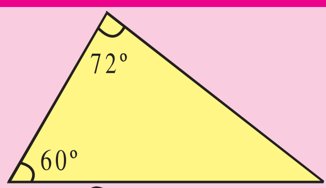
चित्र 6.16

कागज़ के टुकड़े से एक समद्विबाहु त्रिभुज XYZ काटिए, जिसमें भुजा XY = भुजा XZ हो (आकृति 6.16)। इसे इस प्रकार मोड़िए जिससे शीर्ष Z शीर्ष Y पर आच्छादित हो। अब शीर्ष X से गुजरने वाली रेखा XM इस त्रिभुज का सममित अक्ष है। आप देखते हैं कि $\angle Y$ और $\angle Z$ एक दूसरे को पूर्णतया ढँक लेते हैं। XY और XZ त्रिभुज की सम भुजाएँ कहलाती हैं। YZ आधार; $\angle Y$ तथा $\angle Z$ आधार कोण कहलाते हैं जो परस्पर समान होते हैं।

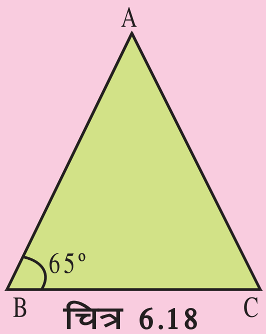
इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि समद्विबाहु त्रिभुज में (i) दो भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं। (ii) समान भुजाओं के सामने का कोण समान होता है।

स्वयं करके देखिए

1. एक समकोण त्रिभुज का एक न्यूनकोण 42° है तो दूसरे न्यूनकोण की माप क्या होगी?
2. चित्र 6.17 में त्रिभुज के एक कोण की माप 60° तथा दूसरे कोण की माप 72° है तब तीसरे कोण की माप ज्ञात करें।
3. एक त्रिभुज के तीनों कोणों में अनुपात 3 : 4 : 5 है। कोणों की माप ज्ञात कीजिए।
4. एक समकोण त्रिभुज का दोनों न्यूनकोण समान है, दोनों न्यूनकोणों की माप बताइए।
5. चित्र 6.18 में AB = AC तथा $\angle ABC = 65^\circ$ तब त्रिभुज के शेष दोनों कोणों की माप बताइए।



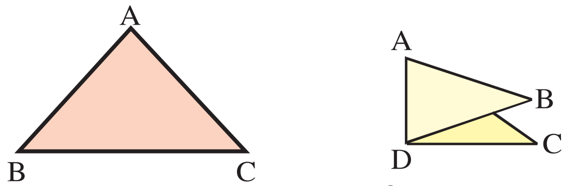
चित्र 6.17



चित्र 6.18

6.3 त्रिभुज की माध्यिकाएँ

कागज के टुकड़े से एक त्रिभुज ABC काटिए।



चित्र 6.19

इसके शीर्ष B को शीर्ष C पर रखकर मोड़िए। जिसमें BC भुजा को दो बराबर भाग में बाँटा गया है तथा D बिन्दु को भुजा BC के मध्य बिन्दु के रूप में दिखाया गया है। अब शीर्ष A से D को मिलाया गया यही त्रिभुज की माध्यिका है । क्या आप AB एवं AC भुजा पर भी माध्यिका खींच सकते हैं ? हाँ, खींच सकते हैं त्रिभुज में कुल 3 माध्यिकाएँ होती हैं जो त्रिभुज के तीनों शीर्षों से सामने वाली भुजाओं पर खींची जा सकती है।

त्रिभुज में किसी भुजा के मध्य बिन्दु को सम्मुख शीर्ष से मिलाने वाली रेखा ही त्रिभुज की माध्यिका है। तीनों माध्यिकाएँ एक दूसरे को जिस बिन्दु पर काटती हैं वह बिन्दु त्रिभुज का **केन्द्रक** कहलाता है।

कुछ करें

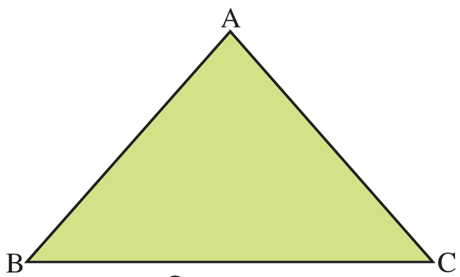
एक त्रिभुज में तीनों माध्यिकाएँ खींचिए तथा बताइए–

(i) क्या तीनों माध्यिकाएँ संगामी होती है यानी एक ही बिन्दु से गुजरती है?

(ii) क्या एक माध्यिका पूर्णतया त्रिभुज के अन्दर होती है, यदि आपके अनुसार यह सत्य नहीं हो तो उस स्थिति को दिखाने के लिए एक आकृति खींचिए ।

6.4 त्रिभुज के शीर्षलम्ब

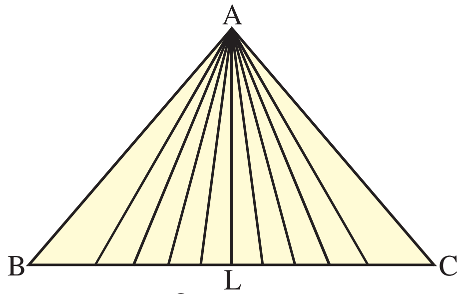
त्रिभुज के आकार वाले एक गत्ते को समतल जमीन पर सीधा खड़ा करें। उसकी ऊँचाई कितनी है? यह ऊँचाई शीर्ष A से भुजा $\overline{BC}$ तक की दूरी है। (चित्र 6.20) शीर्ष A से भुजा $\overline{BC}$ तक अनेक रेखाखण्ड खींचे जा सकते हैं, (चित्र 6.21)। इनमें से त्रिभुज की ऊँचाई कौन-सी रेखाखंड प्रदर्शित करती है?



चित्र 6.20

वह रेखाखण्ड जो शीर्ष A से सीधा ऊर्ध्वाधर नीचे $\overline{BC}$ तक और उस पर लंबवत् होता है, त्रिभुज की ऊँचाई होती है।

रेखाखण्ड AL त्रिभुज का एक शीर्षलम्ब है। शीर्षलम्ब का एक अंत बिन्दु, त्रिभुज के एक शीर्ष पर और दूसरा अंत बिन्दु सम्मुख भुजा बनाने वाली रेखा पर स्थित होता है। प्रत्येक शीर्ष से एक शीर्षलम्ब खींचा जा सकता है।



चित्र 6.21

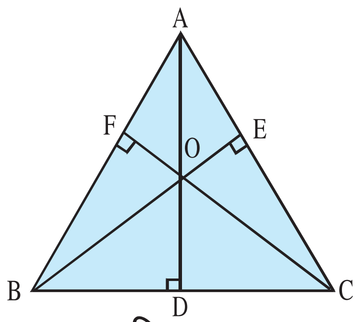
चित्र 6.21 को देखिए त्रिभुज ABC में शीर्ष A से भुजा BC पर अनेक रेखाखंड खीचें गये हैं । सोचिए सबसे छोटी लम्बाई का रेखाखंड कौन होगा?

AL शीर्ष A से BC भुजा पर खींचे गये विभिन्न लम्बाई के रेखाखंडों में सबसे छोटा रेखाखंड है। AL शीर्ष A से भुजा BC पर डाला गया लम्ब है।

AL ही त्रिभुज ABC का शीर्षलंब है इसे त्रिभुज की ऊँचाई भी कहते हैं। इस प्रकार त्रिभुज में शीर्ष से सामने की भुजा पर डाला गया लम्ब ही शीर्षलंब है।

एक त्रिभुज में तीन शीर्षलंब होते हैं। प्रत्येक शीर्ष से सामने की भुजा पर एक–एक लम्ब खींचा जा सकता है जो शीर्ष लंब है।

चित्र 6.22 में AD, BE तथा CF त्रिभुज ABC के तीन शीर्षलंब हैं। तीनों शीर्षलंब एक बिन्दु पर मिल रहे हैं यह बिन्दु ही त्रिभुज का लंब केन्द्र है।



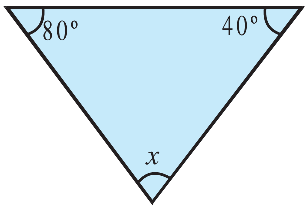
चित्र 6.22

स्वयं करके देखिए

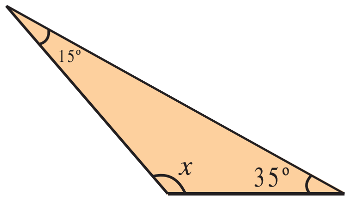
1. एक त्रिभुज में कितने शीर्षलंब होते हैं ?
2. क्या किसी त्रिभुज में माध्यिका और शीर्षलंब एक रेखाखंड हो सकता है ?
3. त्रिभुज के शीर्षलंब का एक अंत बिंदु त्रिभुज के शीर्ष पर होता है। बताइए दूसरा अंत बिन्दु कहाँ होगा?
4. क्या किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ उसका शीर्षलंब हो सकती हैं यदि हाँ तो वह त्रिभुज कैसा होगा?

प्रश्नावली 6.1

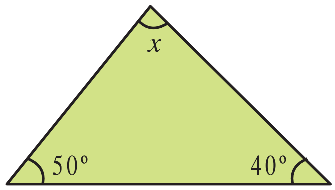
1. x का मान ज्ञात कीजिए।



(i)



(ii)



(iii)

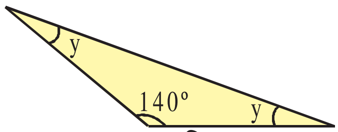
2. एक समकोण त्रिभुज का एक न्यूनकोण 35° का है तो दूसरे न्यूनकोण का मान बताइए।

3. एक समबाहु त्रिभुज के तीनों कोणों की माप क्या होगी?

4. चित्र 6.23 के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए

(i) y का मान बताइए

(ii) त्रिभुज का प्रकार बताइए

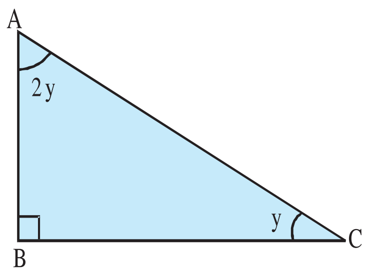


चित्र 6.23

5. एक त्रिभुज का पहला कोण, दूसरे और तीसरे कोण के माप के योग के बराबर है तथा दूसरा कोण तीसरे कोण के माप के बराबर है। इस त्रिभुज को आप क्या नाम देंगे?

नीचे दिए गए त्रिभुजों में अज्ञात कोणों के माप ज्ञात कीजिए–

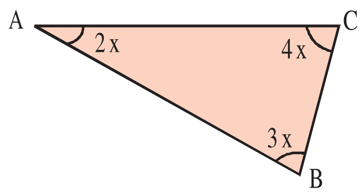
6.



$\angle A$ = ...

$\angle C$ = ...

7.

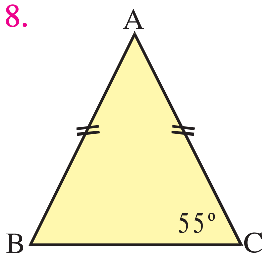


$\angle A$ = ...

$\angle B$ = ...

$\angle C$ = ...

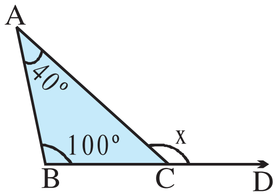
8.



∠A = ...

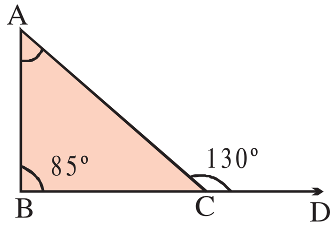
∠B = ...

9.



x = ...

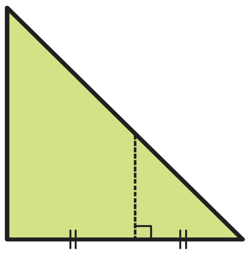
10.



∠A = ...

11. **नीचे दिए गए त्रिभुजों के अन्दर दर्शायी गई खण्डित रेखाओं (Dotted Lines) के नाम लिखिए। साथ में कारण भी दीजिए।**

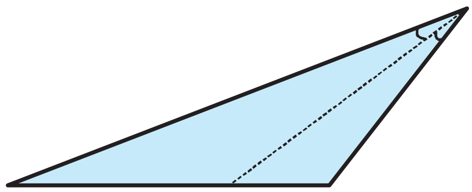
(i)



रेखा का नाम : आधार का लम्ब समद्विभाजक

कारण : क्योंकि यह आधार को दो बराबर भागों में बाँटता है तथा आधार पर लम्ब है।

(ii)

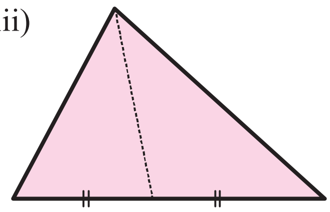


रेखा का नाम : कोण समद्विभाजक

कारण : ———————————

———————————

(iii)

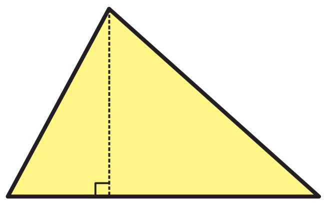


रेखा का नाम : ———————

कारण : ———————————

———————————

(iv)



रेखा का नाम : ———————

कारण : ———————————

———————————

12. एक ऐसा त्रिभुज (कच्चा चित्र) बनाइए, जिसके एक शीर्ष से खींचा गया लम्ब, त्रिभुज के बाहर स्थित हो।

    आपने कैसा त्रिभुज बनाया? न्यूनकोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज, अधिककोण त्रिभुज या अन्य?

13. नीचे एक बड़ा समद्विबाहु त्रिभुज ABC बनाइए, जिसमें AB = AC हो। इस त्रिभुज में निम्न रेखाएँ बनाइए।https://www.evidyarthi.in/

    (i) कोण A के लिए समद्विभाजक

    (ii) शीर्ष A के सामने वाली भुजा पर लम्ब

    (iii) शीर्ष A के सामने वाली भुजा की माध्यिका

    अब बताइए,

    (i) क्या ये सभी रेखाएँ अलग–अलग हैं? या नहीं?

    (ii) इन रेखाओं की क्या विशेषताएँ हैं?

14. एक त्रिभुज में किसी एक कोण की समद्विभाजक रेखा उस कोण के सामने की भुजा पर लम्ब भी है। बताओ, त्रिभुज किस प्रकार का होगा? कैसे पता लगाया?

15. नीचे दी गई सारणी में खाली स्थान भरिए–

क्र.	Δ का नाम	भुजा की माप	कोण की माप	शेष कोणों की माप
1.	ΔABC	AB=AC	∠B=50°	∠C=.........., ∠A=.........
2.	ΔPQR	PQ=PR	∠R=.........	∠P=.........., ∠Q=45°
3.	ΔDEF	DE=DF	∠E=.........	∠D=84°, ∠F=..........
4.	ΔLMN	LM=MN=NL	∠L=.........	∠M=.........., ∠N=.........

6.5 त्रिभुज असमिका गुण

चित्र 6.24 में एक त्रिभुजाकार खेत के बाहर की तरफ से रास्ता है। इस रास्ते से संबंधित कुछ प्रश्नों के उत्तर सारणी में दीजिए।

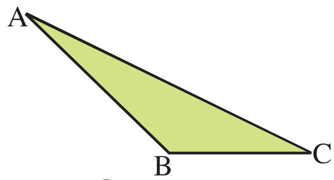
आप खड़े हैं	आपको जाना है	जाने के रास्ते की ल.		छोटा रास्ता
		पहला रास्ता	दूसरा रास्ता	
बिन्दु A पर	बिन्दु B पर	AB	AC + CB	AB
बिन्दु B पर	बिन्दु C पर			
बिन्दु C पर	बिन्दु A पर			

यहाँ त्रिभुजाकार खेत के बाहर की तरफ के रास्ते के बारे में आपने देखा कि

$AC + CB > AB$

$BA + AC > BC$

$CB + BA > CA$



चित्र 6.24

यहाँ AB, BC तथा CA इस त्रिभुजाकार खेत की भुजाएँ हैं।

कुछ करें

1cm. से लेकर 10 cm. लम्बाई की बाँस की दस कमाचियाँ लीजिए। अब इन कमाचियों में कोई तीन कमाचियाँ लेकर त्रिभुज बनाने का प्रयास कीजिए तथा सारणी को पूरा कीजिए–

प्रयासों की संख्या	पहले कमाची की लम्बाई	दूसरी कमाची की लम्बाई	पहली व दूसरी कमाची की लम्बाई का योग	तीसरे कमाची की लम्बाई	क्या त्रिभुज बन रहा है
I					
II					
III					
IV					

इन प्रयासों में आपने देखा कि आप उन्हीं तीन कमाचियों से त्रिभुज बना पा रहे हैं जिनमें किन्हीं दो की लम्बाई का योग तीसरी कमाची से ज्यादा है।

अतः त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं की लम्बाई का योगफल तीसरी भुजा से बड़ी होती है।

उदाहरण : तीन भुजाओं की माप क्रमशः 2c.m., 3 c.m. तथ 6 c.m. है, क्या इन तीन भुजाओं से त्रिभुज बनना संभव है?

यहाँ 2c.m + 3c.m < 6 c.m

यानी दो भुजाओं का योग तीसरी से कम है, इसलिए इन तीन भुजाओं से त्रिभुज बनना संभव नहीं है ।

स्वयं करके देखिए

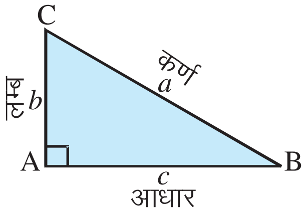
1. बताइए, दी गई भुजाओं की माप से कौन–कौन से त्रिभुज बनाना संभव है?

(i)	1cm., 3cm., 6cm.	(ii)	4cm., 8cm., 9cm.
(iii)	3cm., 5cm., 8cm.	(iv)	3cm., 4cm., 5cm.

6.6 पाइथागोरस प्रमेय

पाइथागोरस एक यूनानी दार्शनिक थे। उनका जन्म 6ठी शताब्दी पूर्व हुआ था। उन्होंने समकोण त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाइयों के बीच संबंध स्थापित करने हेतु एक प्रमेय का सत्यापन किया जिसे पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है। इस प्रमेय के समकक्ष एक अन्य प्रमेय के बारे में भारतीय गणितज्ञ बौधायन ने 1000 ईसा पूर्व जानकारी दी। ऐसा माना जाता है कि 2000 ईसा पूर्व मिस्र एवं बेबीलोन के निवासियों को समकोण त्रिभुज की भुजाओं के बीच के संबंध के बारे में पता था। यूक्लिड ने 300 ईसापूर्व अपने प्रसिद्ध ग्रंथ The element में इस प्रमेय को सत्यापित किया। आगे हम पाइथागोरस प्रमेय के बारे में विस्तार से जानेंगे।

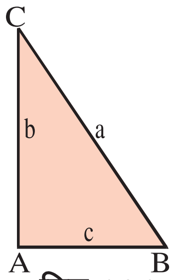
समकोण त्रिभुज– कोण के आधार पर त्रिभुजों को वर्गीकृत करते समय हमने देखा है कि जिस त्रिभुज का एक कोण 90° हो वह समकोण त्रिभुज कहलाता है । समकोण त्रिभुज की भुजाओं को विशेष नाम दिया जाता है । समकोण के सामने वाली भुजा को कर्ण (Hypotenuse) कहते हैं जो कि तीन भुजाओं में से सबसे बड़ी भुजा होती है। अन्य दो भुजाओं को त्रिभुज के पाद (Legs) के रूप में जानते हैं इनमें से एक आधार (Base) तथा दूसरा लम्ब (Perpendicular) कहा जाता है ।



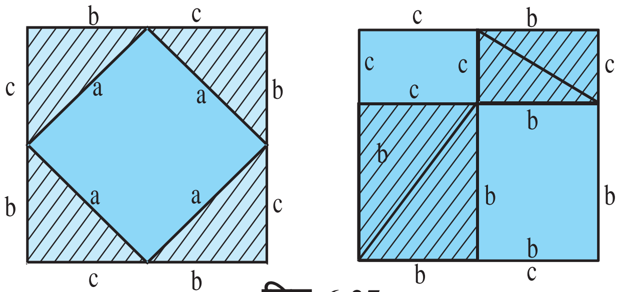
चित्र 6.25

कुछ करें

किसी भी माप का एक समकोण त्रिभुज बनाइए तथा उसके और 7 प्रतिरूप लीजिए। इस प्रकार अब आपके पास एक ही माप के आठ त्रिभुज हैं । इन सभी त्रिभुओं में कर्ण को a तथा दो अन्य पाद को b तथा c माने।



चित्र 6.26



चित्र 6.27

अब एक समान माप के दो वर्ग बनाइए जिनकी भुजाओं की माप b + c के बराबर हो । अब 4 त्रिभुज को पहले वर्ग में तथा 4 त्रिभुज को दूसरे वर्ग में चित्र 6.27 के अनुसार स्थापित कीजिए। अब आप जानते हैं कि दोनों वर्ग समान क्षेत्रफल के हैं तथा उनमें रखें आठों त्रिभुज भी एक समान हैं तबhttps://www.evidyarthi.in/

पहले वर्ग का अनाच्छादित क्षेत्र = दूसरे वर्ग का अनाच्छादित क्षेत्र

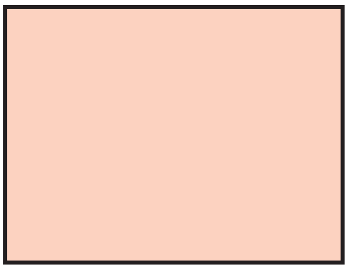
$$a^2 = b^2 + c^2$$

अतः हम कह सकते हैं कि समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग अन्य दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है। यही पाइथागोरस प्रमेय है।

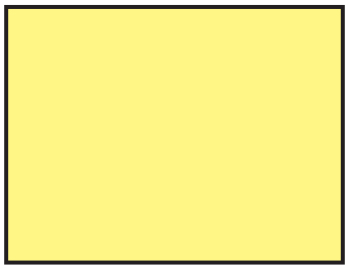
स्वयं कीजिए

विभिन्न माप के तीन समकोण त्रिभुज बनाइए तथा उनके भुजाओं की मापकर निम्न सारणी को पूरा कीजिए।

त्रिभुज–1



त्रिभुज–2



त्रिभुज–3

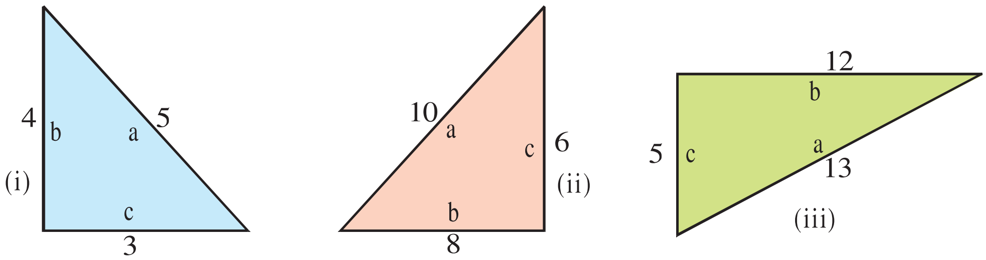
सारणी

त्रिभुज का नाम	कर्ण की माप (a)	प्रथम पाद भुजा की माप (b)	द्वितीय पाद भुजा की माप (c)	a^2	b^2	c^2	$b^2 + c^2$	क्या $a^2 = b^2 + c^2$
1.								
2.								
3.								

यहाँ सारणी में हमने देखा कि समकोण त्रिभुज में $a^2 = b^2 + c^2$

अर्थात् समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

2. आइए अब निम्न त्रिभुजों पर विचार करें।



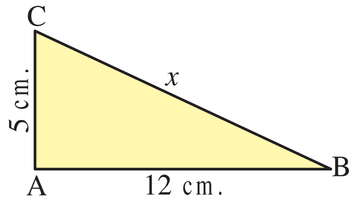
चित्र 6.28

चित्र 6.38 में बने तीन त्रिभुजों की भुजाओं के माप के आधार पर निम्न सारणी को पूरा कीजिए।

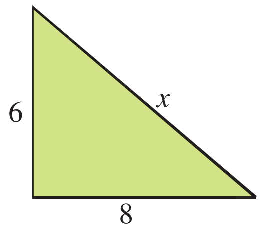
त्रिभुज का नाम	a^2	b^2	c^2	$b^2 + c^2$	क्या $a^2 = b^2 + c^2$	भुजा a के सामने के कोण की माप	त्रिभुज का प्रकार
(i)							
(ii)							
(iii)							

3. एक त्रिभुज की भुजाएँ 6 c.m, 8 c.m तथा 10 c.m लंबी हैं। निर्धारित कीजिए कि क्या वह समकोण त्रिभुज है ?

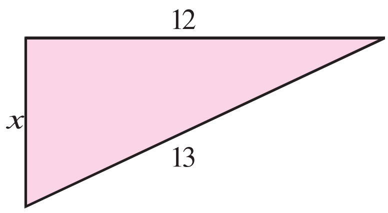
4. निम्न त्रिभुजों में अज्ञात भुजाओं का माप ज्ञात कीजिए:



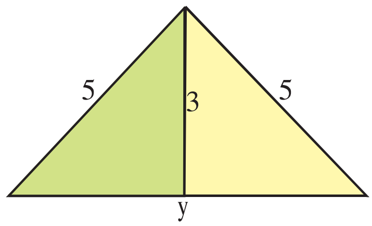
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

प्रश्नावली 6.2

1. नीचे तीन संख्याओं का समूह दिया गया है बताइए कौन सा समूह त्रिभुज की भुजाओं को प्रदर्शित करता है?

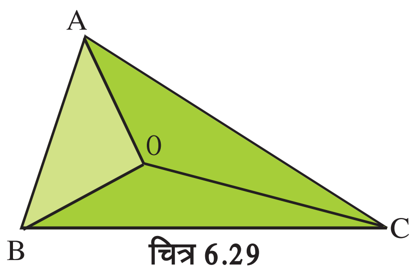
(i) (3, 4, 5) (ii) (2, 3, 4) (iii) (1, 2, 3) (iv) (1, 3, 5)

2. चित्र 6.29 में O बिन्दु त्रिभुज ABC के अन्दर स्थित है, तो बताइए नीचे दिए गए कथनों में कौन सत्य है तथा कौन असत्य?

(i) $AO + OB < AB$

(ii) $AO + OC > AC$

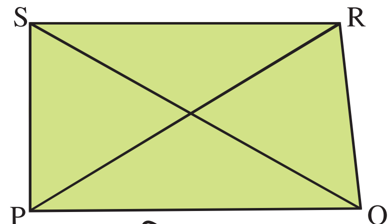
(iii) $BO + OC = BC$



चित्र 6.29

3. चित्र 6.30 में PQRS एक चतुर्भुज है तब दिखाइए कि

$PQ + QR + RS + SP > PR + SQ$

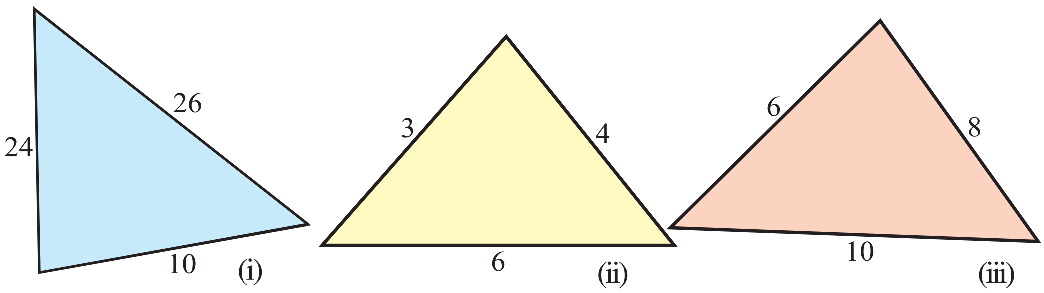


चित्र 6.30

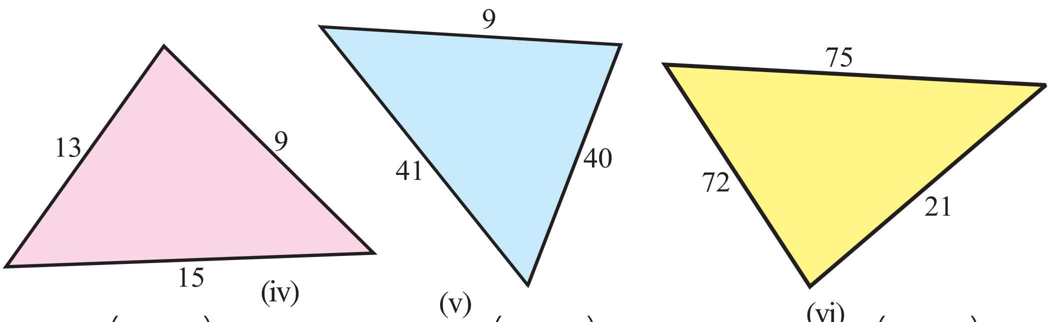
4. एक त्रिभुज की दो भुजाओं की माप 10 सेमी. तथा 14 सेमी. है । इस त्रिभुज की तीसरी भुजा की न्यूनतम एवं अधिकतम माप की सीमा क्या होगी?

5. ABC एक त्रिभुज है जिसका $\angle A$ समकोण है यदि $AB = 10$ सेमी., $AC = 24$ सेमी. तब कर्ण BC का मान क्या होगा?

6. नीचे दिए गए त्रिभुजों में से कौन–कौन से त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं? उनके नीचे सही का निशान (✓) लगाइए। साथ ही समकोण त्रिभुजों का जो कोण समकोण है, उसे 90° लिखकर इंगित कीजिए।

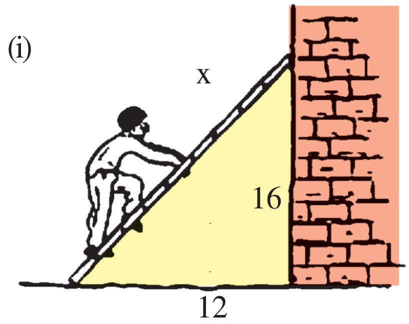


(   )   (   )   (   )

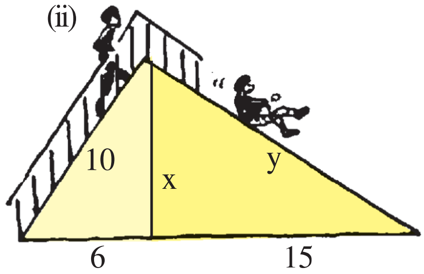


(   )   (   )   (   )

7. नीचे दी गई परिस्थितियों में 'x' व 'y' का मान निकालिए।



x = __________



x = __________, y = __________

हमने सीखा

1. त्रिभुज में तीन भुजाएँ तीन कोण तथा तीन शीर्ष होते हैं।
2. (i) त्रिभुज के तीनों कोणों का योग दो समकोण यानी 180° होता है।
   (i) किसी भी त्रिभुज में एक से अधिक कोण समकोण या अधिक कोण नहीं हो सकते।
3. समबाहु त्रिभुज की तीनों भुजाएँ आपस में बराबर होती हैं।
4. समद्विबाहु त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर होती हैं, तथा समान भुजाएँ के सामने के कोण भी आपस में बराबर होते हैं।
5. त्रिभुज में किसी भुजा के मध्य बिन्दु को सम्मुख शीर्ष से मिलने वाली रेखा माध्यिका कहलाती है। त्रिभुज में तीन माध्यिकाएँ होती हैं। तीनों माध्यिकाएँ एक बिन्दु पर मिलती हैं जिसे त्रिभुज का केन्द्रक कहते हैं।
6. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से उसके सम्मुख भुजा पर खींचे गये लम्ब को त्रिभुज का एक शीर्षलंब कहते हैं। त्रिभुज में तीन शीर्षलम्ब होते हैं। तीनों शीर्ष लंब एक बिन्दु पर मिलते हैं वह बिन्दु त्रिभुज का लंब केन्द्र कहते हैं।
7. किसी त्रिभुज में दो भुजाओं की लम्बाई का योग तीसरी भुजा की लम्बाई से ज्यादा होता है।
8. समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बने वर्ग शेष दोनों भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है। यह प्रमेय पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है।
9. यदि किसी त्रिभुज में बड़ी भुजा की लम्बाई का वर्ग शेष दोनों भुजाओं की लम्बाई के वर्ग के योग के बराबर हो, तब वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होगा।