अध्याय

10

ऊँचाई एवं दूरी

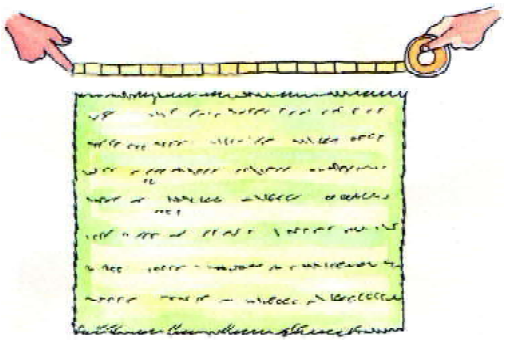
[HEIGHT AND DISTANCE]

EZLV1S

आप अपने विद्यालय के खेल मैदान की लंबाई एवं चौड़ाई पता करना चाहते हैं तो आप इसका मापन कैसे करेंगे? इसका मापन करने के लिए आपको कोई मापन यंत्र जैसे रूलर (स्केल), मापने वाले फीते की आवश्यकता होगी। क्या हम रूलर की सहायता से मैदान की लंबाई आसानी से पता कर सकते हैं? इसमें क्या कठिनाइयाँ आएँगी?

राजेश ने कहा, रूलर की सहायता से मापने पर हमें रूलर का बार–बार उपयोग करना होगा क्योंकि मैदान की लंबाई अधिक है परंतु बार–बार उठाने और रखने में गलती हो सकती है अतः हम मापने वाले लंबे फीते का प्रयोग करेंगे।

जाहिदा बोली, मैदान की लंबाई, चौड़ाई पता करने के लिए मैदान के एक छोर से दूसरे छोर तक फीते को ले जाना होगा। एक छोर पर एक बच्चा फीते के एक सिरे को पकड़ कर खड़ा हो जाए और मैदान के दूसरे छोर तक फीते को ले जाकर उसे पढ़ने से दूरी पता चल जाएगी।



आकृति–1

जमुना ने पूछा, क्या इसी तरह हमें खजूर के पेड़, वालीबॉल के मैदान में लगे नेट के खंभों की ऊँचाई पता करनी हो तो इनके ऊपरी सिरे से जमीन तक की दूरी मापनी होगी? पर यह थोड़ा मुश्किल है। पेड़ और खंभों के शिखर तक हम कैसे पहुँचेंगे?

असलम ने पूछा, तो हमें क्या करना चाहिए?

यहाँ हम गणित की कौनसी तकनीक का प्रयोग करें?

क्या हम त्रिकोणमिति का प्रयोग कर ऊँचाई एवं दूरी पता कर सकते हैं?

आइए देखें –

आप अपने विद्यालय के झण्डे के खंभे की ऊँचाई पता करना चाहते हैं। हम जानते हैं कि त्रिकोणमितीय अनुपात त्रिभुज की भुजाओं एवं कोण के बीच संबंध है। क्या आप झण्डे के खंभे को एक भुजा लेकर एक समकोण त्रिभुज बना सकते हैं? इस त्रिभुज में खंभे की ऊँचाई ज्ञात करने के लिये हमें किन मानों की आवश्यकता होगी?

यदि विद्यालय के मैदान में कोई बिंदु A लें जो खंभे के पाद बिंदु से 10 मीटर की दूरी पर है (देखिए आकृति–2)। बिंदु A से झण्डे के शीर्ष C को मिलाने वाली रेखा, बिंदु A पर जमीन के साथ $60°$ का कोण बनाती है।

तो ΔABC में

$\angle CAB = 60°$

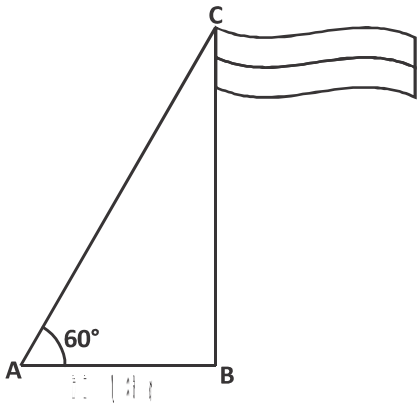
$AB = 10$ मीटर

$$\tan A = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan 60° = \frac{BC}{10}$$

$BC = 10 \tan 60°$

$BC = 10\sqrt{3}$ मीटर



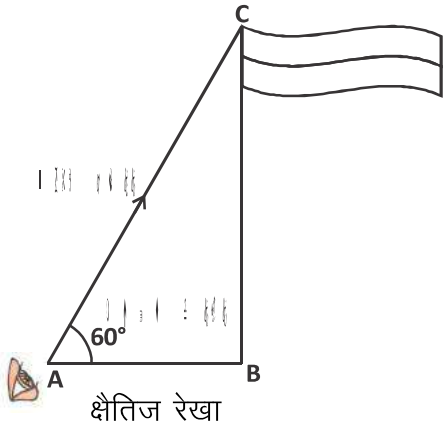
आकृति–2

इस प्रकार हम झण्डे के खंभे की ऊँचाई त्रिकोणमिति का प्रयोग कर पता लगा सकते हैं।

उन्नयन कोण

आइए हम उपरोक्त आकृति–2 पर पुनः विचार करते हैं। यदि आप मैदान में खड़े होकर झण्डे को देखें तो आपकी आँख को बिंदु A पर लेने पर आपकी आँख से झण्डे के शीर्ष C को मिलाने वाली रेखा AC दृष्टि रेखा कहलाती है।

झण्डे के खंभे की ऊँचाई हमारी ऊँचाई से अधिक हो तो उसके शीर्ष को देखने के लिए हमें ऊपर की ओर देखना होगा।



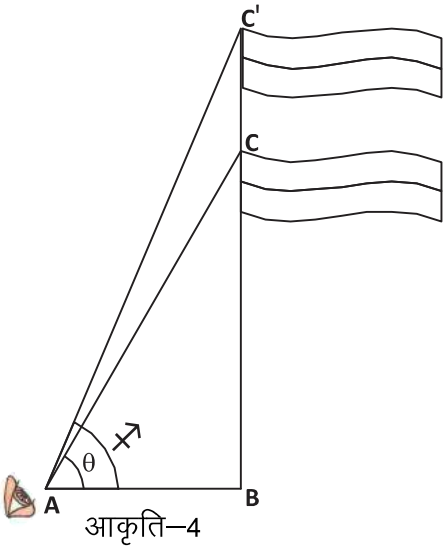
आकृति–3

हमारी आँख से खंभे के शीर्ष को मिलाने वाली दृष्टि रेखा AC व क्षैतिज रेखा AB के बीच बना कोण उन्नयन कोण कहलाता है। (देखिए आकृति–3) यहाँ हमने माना है कि आँख A पर है अतः उन्नयन कोण A से क्षैतिज रेखा और दृष्टि रेखा के बीच का कोण है।

यदि खंभा और ऊँचा हो तो सिर को और ऊँचा उठाना पड़ेगा।

इस स्थिति में क्या उन्नयन कोण पहले से अधिक होगा? यानी ϕ का मान से θ से बड़ा होगा?

झण्डे के खंभे की ऊँचाई और अधिक बढ़ने के कारण आपकी दृष्टि रेखा व क्षैतिज रेखा के बीच का कोण बढ़ जाता है यानी उन्नयन कोण बढ़ जाता है।(आकृति–4)



आकृति–4

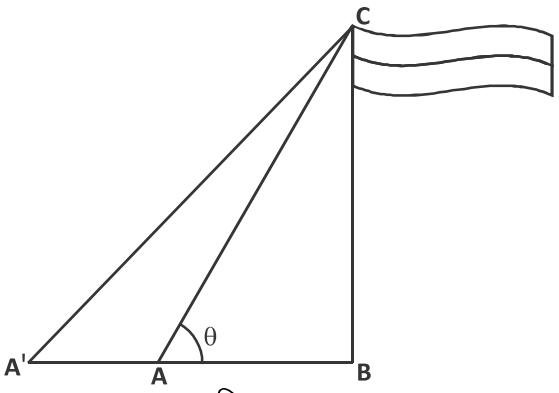
सोचें एवं चर्चा करें

यदि झण्डे की ऊँचाई कम कर दी जाए तो उन्नयन कोण के मान में क्या परिवर्तन आएगा?

आइए, अब एक दूसरी स्थिति पर विचार करें यदि हम झण्डे को बिंदु A से न देखकर उससे थोड़ा और दूर A' से देखें (आकृति–5)

आप पाएँगे कि बिंदु A' से झण्डे के खंभे के शीर्ष को देखे जाने पर दृष्टि रेखा व क्षैतिज रेखा के बीच का कोण कम हो जाता है यानी उन्नयन कोण का मान कम हो जाता है।

इस प्रकार हमने पाया कि उन्नयन कोण का मान वस्तु की ऊँचाई के साथ–साथ बढ़ता है परंतु वस्तु की प्रेक्षक (देखने वाले) से दूरी बढ़ने पर क्रमशः कम होता जाता है।

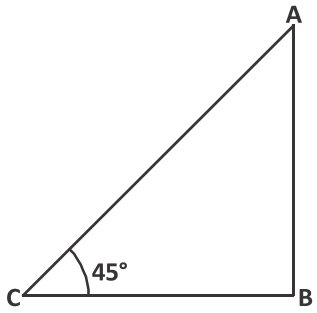


आकृति–5

त्रिकोणमिति का प्रयोग कर पर्वत की ऊँचाई, ग्रहों के बीच की दूरी, पृथ्वी व सूर्य के बीच की दूरी, महासागर की गहराई का मापन किया जाता है। खगोलविद् इसका प्रयोग, पृथ्वी से ग्रहों एवं तारों की दूरियाँ ज्ञात करने में करते हैं।

हम अपने दैनिक जीवन में भी समस्याओं को हल करने के लिए त्रिकोणमिति का उपयोग करते हैं। आइए कुछ उदाहरण देखें–

उदाहरणः–1. एक भवन के पाद बिंदु से 15 मीटर की दूरी पर स्थित किसी बिंदु से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



आकृति–6

हलः– आकृति में AB भवन की ऊँचाई है। भवन AB के पाद बिंदु B से 15 मीटर दूर स्थित बिंदु C से भवन के शिखर A का उन्नयन कोण $\angle ACB = 45°$

मान लीजिए भवन की ऊँचाई h मीटर है

तो ΔABC में $\tan 45° = \frac{AB}{BC}$

या $\tan 45° = \frac{h}{15}$

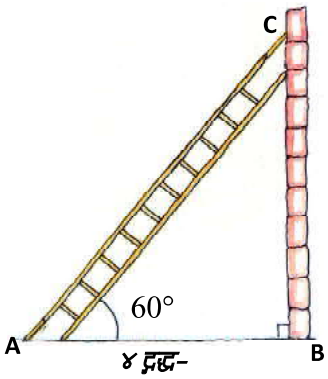
या $1 = \frac{h}{15}$ $[\because \tan 45° = 1]$

$\therefore$ $h = 15$ मीटर

अतः भवन की ऊँचाई 15 मीटर है।

उदाहरणः–2. एक सीधी दीवार पर सीढ़ी इस प्रकार रखी गई है कि वह जमीन से 60° का कोण बनाती है। यदि सीढ़ी का पाद बिंदु दीवार से 4 मीटर दूरी पर हो तब सीढ़ी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि AC सीढ़ी है जिसकी लंबाई x मी. है अर्थात् $AC = x$ मी. दिया गया है कि सीढ़ी का पाद बिंदु A दीवार से 4 मी. की दूरी पर है।



आकृति–7

अतः ΔABC में $AB = 4$ मी.

तथा $\angle BAC = 60°$

तब $\cos 60° = \frac{AB}{AC}$

या $\frac{1}{2} = \frac{4}{x}$

या $x = 8$ मीटर

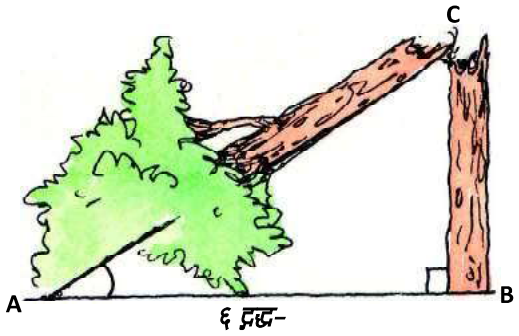
अतः सीढ़ी की लंबाई 8 मीटर होगी।

उदाहरणः–3. तेज हवा से टूटे एक पेड़ का सिरा झुक कर पेड़ के पाद से 6 मीटर की दूरी पर जमीन को छूता है। यह हिस्सा जमीन से 60° का कोण बनाता है। पूरे पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हलः– पेड़ का टूटा हुआ भाग AC है। (देखिए आकृति– 8)

दिया गया है कि टूटे सिरे के शीर्ष से पेड़ के पाद बिंदु की दूरी 6 मी. है।

समकोण ΔABC में



आकृति–8

$\tan 60° = \frac{BC}{AB}$

$\sqrt{3} = \frac{BC}{6}$

$BC = 6\sqrt{3}$ मी.

पुनः समकोण ΔABC में

$\sin 60° = \frac{BC}{AC}$

या $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{AC}$

या $AC = \frac{6\sqrt{3} \times 2}{\sqrt{3}}$

$$AC = 12 \text{ मी.}$$

अतः पेड़ की ऊँचाई $= BC + AC$

$$= 6\sqrt{3} + 12$$

$$= 6\left(\sqrt{3} + 2\right) \text{ मी.}$$

उदाहरण:–4. 1.4 मी. लंबा एक प्रेक्षक एक मीनार से 25.6 मी. की दूरी पर है। उसकी आँखों से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। मीनार की ऊँचाई बताइए।

हल : यहाँ BC मीनार है, AE प्रेक्षक है और $\angle CED$ उन्नयन कोण है।

तथा $AB = ED = 25.6$ मी.

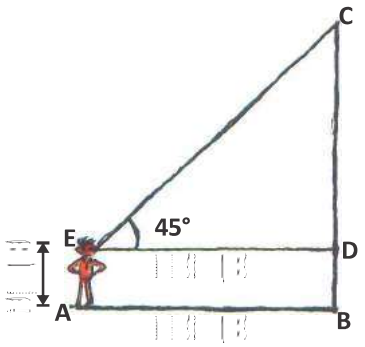
$AE = BD = 1.4$ मी.

समकोण ΔCDE में

$$\tan 45° = \frac{DC}{ED}$$

$$1 = \frac{DC}{25.6}$$

$DC = 25.6$ मी.



आकृति–9

अतः मीनार की ऊँचाई $= BD + DC$

$= 1.4 + 25.6$

$= 27$ मी.

नोट : यदि प्रेक्षक की ऊँचाई न दी गई हो तो प्रेक्षक को एक बिंदु मान लिया जाता है।

फरीदा के घर के बाहर एक झण्डा लगा हुआ है (देखिए आकृति–10) फरीदा इस झण्डे के डंडे की लंबाई ज्ञात करना चाहती है। क्या झण्डे को बिना निकाले डंडे की लंबाई का पता लगा सकते हैं?

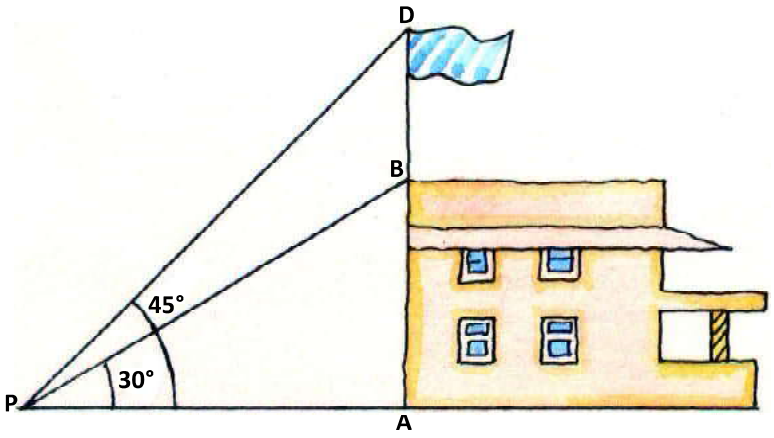
आइए देखें–

उदाहरण:–5. भूमि के एक बिंदु P से 10 मी. ऊँचे भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। भवन के शिखर पर एक झण्डा लगाया गया है और P से झण्डे के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। तो झण्डे के डंडे की लंबाई और बिंदु P से भवन की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल:– आकृति–10 में AB भवन की ऊँचाई है, BD झण्डे के डंडे की लंबाई है और P दिया हुआ बिंदु है। ध्यान दीजिए कि यहाँ दो समकोण त्रिभुज PAB और PAD हैं। हमें झण्डे के डंडे की लंबाई यानी BD और बिंदु P से भवन की दूरी यानी PA पता करना है।

चूँकि हमें भवन की ऊँचाई AB पता है इसलिए

पहले हम समकोण ΔPAB लेंगे।



आकृति–10

यहाँ $\tan 30° = \frac{AB}{PA}$

$\Rightarrow$ यानी $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{PA}$

इसलिए $PA = 10\sqrt{3}$ मी.

$\therefore$ P से भवन की दूरी $10\sqrt{3}$ मी.

आइए, अब हम यह मान लें कि $BD = x$ मी. है

तथा $AD = AB + BD = (10 + x)$ मी.

अब समकोण ΔPAD में

$$\tan 45° = \frac{AD}{PA}$$

$$= \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{3} = 10 + x$$

$$x = 10\left(\sqrt{3} - 1\right) \text{ मी.}$$

अतः झंडे के डंडे की लंबाई $10\left(\sqrt{3} - 1\right)$ मी. है।

उन्नयन कोण का ऊँचाई एवं दूरी से संबंध हम देख चुके हैं। हमने देखा था कि उन्नयन कोण का मान वस्तु की ऊँचाई के बढ़ने के साथ बढ़ता है तथा वस्तु की प्रेक्षक से दूरी बढ़ने के साथ घटता जाता है।

आइए, इन कथनों पर आधारित उदाहरणों को हल करें–

उदाहरण:–6. एक लड़का 30 मी. ऊँचे एक भवन से कुछ दूरी पर खड़ा है। जब वह ऊँचे भवन की ओर जाता है तब उसकी आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है। बताइए कि वह भवन की ओर कितना चला है?

हल:– माना कि BC भवन है तथा बिंदु A पर लड़का खड़ा है।

$BC = 30$ मी.

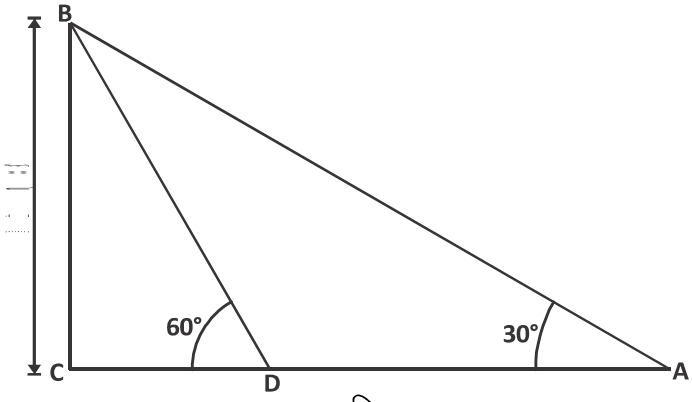
समकोण ΔABC में

$$\tan 30° = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{AC}$$

$$AC = 30\sqrt{3} \text{ मी.}$$

पुनः समकोण ΔBCD में



आकृति–11

$$\tan 60° = \frac{BC}{CD}$$

$$\tan 60° = \frac{30}{CD}$$

$$\sqrt{3} = \frac{30}{CD}$$

$$CD = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{10 \times 3}{\sqrt{3}}$$

$$CD = 10\sqrt{3} \text{ मी.}$$

अतः लड़के द्वारा भवन की ओर चली गई दूरी $AD = AC - CD$

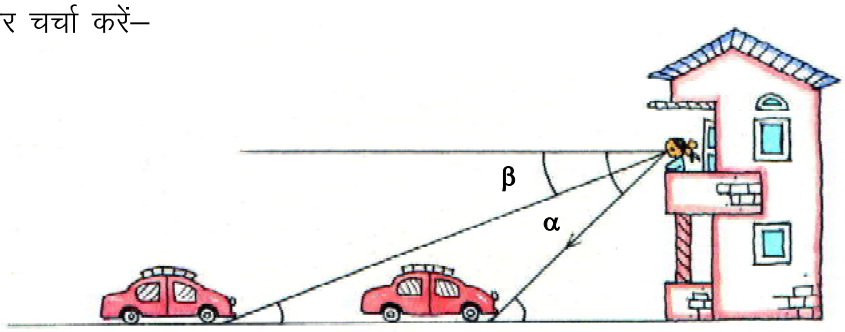
$$= 30\sqrt{3} - 10\sqrt{3}$$

$20\sqrt{3}$ मी. अतः लड़का भवन की ओर $20\sqrt{3}$ मी. चला।

अवनमन कोण

आइए, एक अन्य परिस्थिति पर चर्चा करें–

रमा अपने घर की बालकनी में खड़ी है और उसके घर के तरफ आती हुई कार को देख रही है। इस स्थिति में क्षैतिज रेखा व दृष्टि रेखा के बीच बना कोण अवनमन कोण कहलाता है। (आकृति–12)



आकृति–12

अब यदि यह कार घर के और पास आ जाए तो (आकृति–12) उस स्थिति में अवनमन कोण में क्या परिवर्तन आएगा?

कोण α व β में क्या संबंध होगा?

क्या $\alpha > \beta$

$\alpha < \beta$

या $\alpha = \beta$

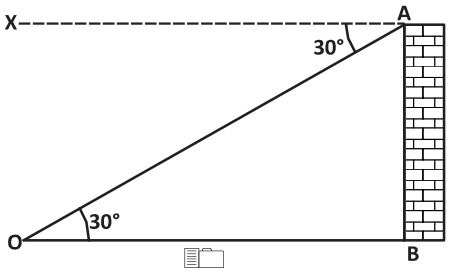
आप देख सकते है कि कार व घर के बीच की दूरी कम होने पर अवनमन कोण का मान बढ़ता जाता है।

यानी $\alpha > \beta$

सोचें एवं चर्चा करें

आकृति–12 में यदि कार रमा के ठीक नीचे आ जाए तब अवनमन कोण क्या होगा?

उदाहरण:–7. भवन के शिखर से भूमि पर स्थित एक गमले का अवनमन कोण $30°$ है। यदि गमला भवन के पाद बिंदु से 30 मीटर की दूरी पर हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



आकृति–13

हल:– माना AB भवन है और बिन्दु O गमला है।

अवनमन कोण $\angle XAO = 30°$ और

$OB = 30$ मीटर

$\angle XAO = \angle AOB = 30°$

(एकांतर कोण)

ΔOAB में

$$\tan 30° = \frac{AB}{OB}$$

$$AB = OB \tan 30°$$

$$= 30 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

अतः भवन की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ मीटर है।

उदाहरणः–8. एक प्रकाश स्तंभ के शिखर से किसी भवन के शिखर एवं तल के अवनमन कोण क्रमशः 45° व 60° है। यदि भवन की ऊँचाई 12 मी. हो तो प्रकाश स्तंभ की ऊँचाई एवं प्रकाश स्तंभ से भवन की दूरी ज्ञात कीजिए।

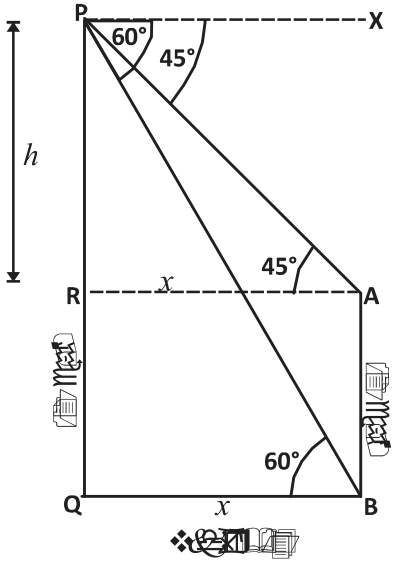
हलः– माना कि PQ एक प्रकाश स्तंभ है। इससे x मी. दूरी पर एक भवन AB है जिसकी ऊँचाई 12 मी. है।

अतः QB = x मी., AB = 12 मी.

प्रकाश स्तंभ के शिखर से भवन के शिखर व तल का अवनमन कोण क्रमशः 45° व 60° है।

$\angle APX = 45°$ तथा $\angle BPX = 60°$ एवं माना $PR = h$

समकोण त्रिभुज PRA में



$$\tan 45° = \frac{PR}{RA}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{PR}{x}$$

$$\Rightarrow \quad PR = x$$

$$\therefore h = x$$

समकोण ΔPQB में

$$\Rightarrow \quad \tan 60° = \frac{PQ}{QB}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{h+12}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}x = h + 12$$

x का मान रखने पर

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}h = h + 12$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}h - h = 12$$

$$\Rightarrow \quad h\left(\sqrt{3}-1\right) = 12$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{12}{\sqrt{3}-1}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{12}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$ (हर का परिमेयीकरण करने पर)

$$\Rightarrow \quad h = \frac{12(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{12(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

$$\Rightarrow \quad h = 6(\sqrt{3}+1) \text{ मी.}$$

प्रकाश स्तंभ की ऊँचाई $= PR + RQ$

$$= 6(\sqrt{3}+1)+12$$

$$= 6\sqrt{3}+6+12$$

$$= 6\sqrt{3}+18$$

$$= 6(\sqrt{3}+3) \text{ मी.}$$

क्योंकि $x = h$ इसलिए $x = 6(\sqrt{3}+1)$ मी.

प्रकाश स्तंभ की ऊँचाई $6(\sqrt{3}+3)$ मी. तथा भवन की दूरी $6(\sqrt{3}+1)$ मी. होगी।

उदाहरण:–9. किसी टीले के शीर्ष से मैदान में स्थित दो मकानों, जो टीले के विपरीत ओर हैं,के पाद के अवनमन कोण क्रमशः 30° व 60° हैं। यदि टीले की ऊँचाई 60 मी. हो तब मकानों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल:– माना PQ टीला है तथा A व B उसके विपरीत ओर स्थित दो मकान हैं।

दिया गया है कि $PQ = 60$ मी.

$$\angle XPA = 30°$$

$$\therefore \quad \angle PAQ = 30° \qquad \text{(एकांतर कोण)}$$

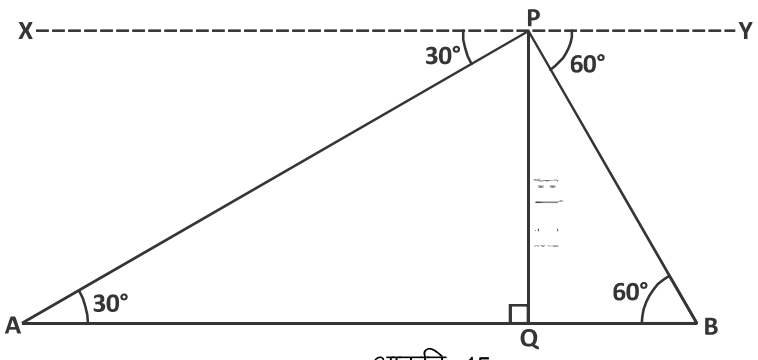
इसी प्रकार

$\angle YPB = \angle PBQ = 60°$

समकोण ΔPQA में

$$\tan 30° = \frac{PQ}{AQ}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{60}{AQ}$$



आकृति–15

$AQ = 60\sqrt{3}$ मी.

पुनः ΔPQB में

$$\tan 60° = \frac{PQ}{BQ}$$

$$\sqrt{3} = \frac{60}{BQ}$$

$$BQ = \frac{60}{\sqrt{3}}$$

$$BQ = 20\sqrt{3} \text{ मी.}$$

अतः मकानों के बीच की दूरी $AB = AQ + BQ$

$$= 60\sqrt{3} + 20\sqrt{3}$$

$$AB = 80\sqrt{3} \text{ मी.}$$

उदाहरण:–10. एक सीधी सड़क एक भवन के पाद तक जाती है। भवन के शिखर पर खड़ा एक आदमी एक कार को 30° के अवनमन कोण पर देखता है। कार भवन के पाद की ओर एक समान चाल से जाती है। 30 मी. चलने के बाद कार का अवनमन कोण 60° हो जाता है। यदि इस बिंदु से भवन के पाद बिंदु तक पहुँचने में लगा समय 10 सेकण्ड हो तो कार की चाल एवं भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल:– माना कि AB भवन है जिसकी ऊँचाई h मी. है तथा

$BC = x$ मी.

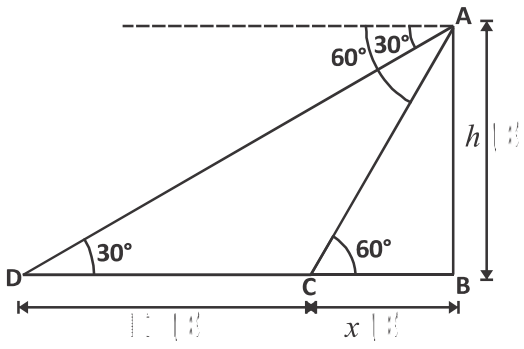
दिया गया है कि

$CD = 30$ मी.

$\angle ADB = 30°$

$\angle ACB = 60°$

तब समकोण ΔABD में



आकृति–16

$$\tan 30° = \frac{AB}{DB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30 + x}$$

$$h = \frac{30 + x}{\sqrt{3}} \quad \text{.....(1)}$$

पुनः समकोण ΔABC में

$$\tan 60° = \frac{AB}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$h = x\sqrt{3} \quad \text{.....(2)}$$

समीकरण (1) व (2) से

$$\frac{30 + x}{\sqrt{3}} = x\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \quad 30 + x = 3x$

$\Rightarrow \quad 2x = 30$

$\Rightarrow \quad x = 15$ मी.

अतः भवन की ऊँचाई $h = x\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$ मी.

प्रश्न के अनुसार

बिंदु C से भवन के पाद बिंदु तक पहुँचने में कार को 10 सेकण्ड लगते हैं

$$\therefore \quad \text{कार की चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

$$= \frac{15}{10}$$

$$= 1.5 \text{ मी./से.}$$

EZVR3F

प्रश्नावली–1

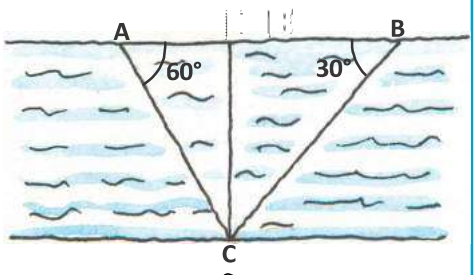
1. जमीन पर स्थित किसी बिंदु से 90 मी. दूर स्थित मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
2. एक उर्ध्वाधर स्तंभ जिसकी ऊँचाई $3h$ मी. है, के पाद बिंदु से $\sqrt{3}h$ दूरी पर स्थित किसी बिंदु से स्तंभ के शिखर का उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए।
3. एक पतंग भूमि से 60 मी. ऊँचाई पर उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी भूमि के एक बिंदु पर खूँटी से बंधी हुई है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 30° है तब यह मानकर कि डोरी पूर्णतः तनी हुई है, उसकी लंबाई ज्ञात कीजिए।
4. किसी स्तंभ के पाद बिंदु से 15 मी. ऊंचे एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है तथा भवन के पाद बिंदु से स्तंभ के शिखर का उन्नयन कोण 60° है तब स्तंभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

5. दो मीनारों के बीच की क्षैतिज दूरी 120 मी. है। दूसरी मीनार के शीर्ष से देखने पर प्रथम मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। यदि दूसरी मीनार की ऊँचाई 40 मी. है तो प्रथम मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

6. एक मीनार के आधार से एक सरल रेखा में a और b दूरी पर स्थित दो बिंदुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण, पूरक कोण हैं तो सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\sqrt{ab}$ होगी।

7. 15 मीटर ऊँचे एक भवन के शिखर से किसी मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 60° तथा मीनार के पाद का अवनमन कोण 30° है तो मीनार की ऊँचाई एवं भवन से मीनार की दूरी ज्ञात कीजिए।

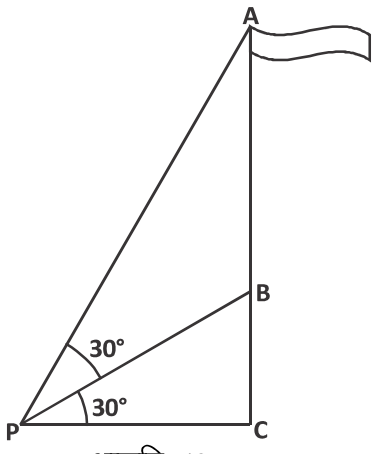
8. नदी के एक किनारे पर दो बिंदु A और B के बीच की दूरी 40 मी. है। नदी के एक किनारे के समांतर दूसरे किनारे पर बिंदु C इस प्रकार है कि ∠BAC=60° तथा ∠ABC=30°, तो नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए। (आकृति–17)



आकृति–17

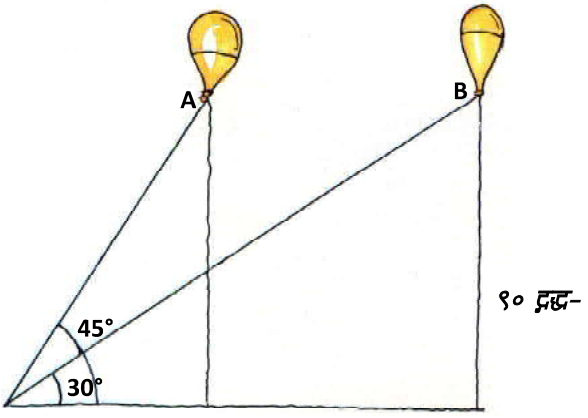
9. एक मंदिर का शिखर तथा उस पर लगा झण्डा भूमि के किसी बिंदु पर क्रमशः 30° और 60° का कोण अंतरित करते हैं। यदि मंदिर की ऊँचाई 10 मीटर हो, तो झण्डे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (आकृति–18)

10. 40 मीटर चौड़ी सड़क पर, दो समान ऊँचाई वाले बिजली के खंभे एक दूसरे के सामने स्थित हैं। दोनों खंभों के बीच सड़क पर स्थित किसी एक बिंदु से पहले एवं दूसरे खंभे के उन्नयन कोण क्रमशः 30° व 60° हैं तो खंभे की ऊँचाई व खंभों से उस बिंदु की दूरी ज्ञात कीजिए।



आकृति–18

11. एक प्रेक्षक भूमि से 90 मीटर की ऊँचाई पर क्षैतिज रेखा में उड़ रहे गुब्बारे को देखता है। यदि किसी क्षण प्रेक्षक की आँखों से गुब्बारे का उन्नयन कोण 45° है और कुछ समय बाद यह उन्नयन कोण घटकर 30° हो जाता है तो गुब्बारे द्वारा बिंदु A से B तक तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।(आकृति–19)



आकृति–19

हमने सीखा

1. त्रिकोणमितीय अनुपातों की मदद से हम पेड़ों,भवनों,मीनारों,ग्रहों, तारों आदि में पारस्परिक दूरी व ऊँचाई निकाल सकते हैं।
2. दृष्टि रेखा – प्रेक्षक की आँख से प्रेक्षक द्वारा देखी गई वस्तु को मिलाने वाली रेखा होती है।
3. देखी गई वस्तु का उन्नयन कोण दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है जब वस्तु क्षैतिज रेखा से ऊपर होता है।
4. देखी गई वस्तु का अवनमन कोण दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है जब वस्तु क्षैतिज रेखा से नीचे होती है।
5. किसी भवन,मीनार आदि के पाद के पास स्थित किसी बिंदु से (भवन या मीनार के) शिखर का उन्नयन कोण, पाद से बिंदु की दूरी बढ़ने के साथ–साथ घटता जाता है।
6. किसी भवन,मीनार आदि के शिखर से उसके पाद के पास स्थित किसी बिंदु के अवनमन कोण का मान पाद से बिंदु की दूरी बढ़ने के साथ–साथ घटता जाता है।

उत्तरमाला–1

(1) $30\sqrt{3}$ मीटर (2) $60°$ (3) 120 मीटर

(4) 45 मीटर (5) $40\left(\sqrt{3}+1\right)$ मीटर

(7) 60 मीटर, $15\sqrt{3}$ मीटर (8) $10\sqrt{3}$ मीटर (9) 20 मीटर

(10) $10\sqrt{3}$ मीटर, पहले खंभे से 30 मीटर,दूसरे खंभे से 10 मीटर

(11) $90\left(\sqrt{3}-1\right)$ मीटर