अध्याय 12

वृत्त एवं स्पर्श रेखाएँ
[CIRCLE AND TANGENTS]

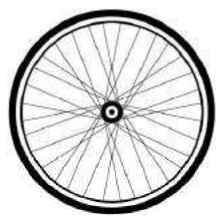
F276BN

परिचय (Introduction)

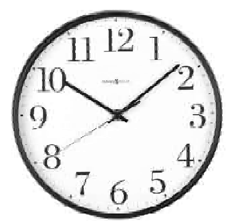
हम अपने आस–पास विभिन्न आकृतियों की वस्तुएँ देखते हैं। जैसे सिक्का, चूड़ी, साइकिल का पहिया, घड़ी आदि सब में कुछ एक जैसे गुण हैं।

सिक्के का किनारा
चित्र–1

चूड़ी का किनारा
चित्र–2



पहिये का किनारा
चित्र–3



घड़ी का किनारा
चित्र–4

इन सभी आकृतियों के किनारे वृत्त की तरह दिखाई देते हैं। हम ऐसी और बहुत सी वस्तुएँ ढूँढ़ सकते हैं जो इन्हीं की तरह की हैं। क्या आप कुछ ऐसी और वस्तुएँ जल्दी से सोच सकते हैं? गेंद, काँच की गोली, पानी की बूंद जैसी और भी वस्तुएँ गोलाकार होती है।

गेंद
चित्र–5

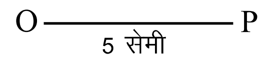
काँच की गोली
चित्र–6

ये (चित्र–5 ,6) वृत से अलग हैं और ऊपर दिए गए चित्रों से भी। आपस में चर्चा करके सिक्के जैसी वस्तुएँ व गेंद जैसी वस्तुओं के अंतर लिखिए।

इस अध्याय में सिक्के जैसी यानी वृत्तनुमा सतह वाली वस्तुओं की सतह के गुण देखेंगे।

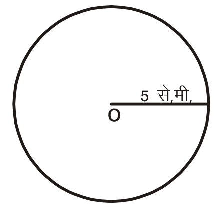
वृत्त क्या है ?

कागज पर एक बिंदु "O" लेकर इससे 5 सेमी. की दूरी पर बिंदु P लें।



क्या कुछ और भी बिंदु हो सकते हैं जो बिन्दु O से 5 सेमी. की दूरी पर हों? इसे कैसे ढूँढ़ेंगे? कितने ऐसे और बिंदु होंगे?

परकार को 5 सेमी. फैलाकर O बिंदु पर परकार की नोंक को रखें, O से 5 सेमी. दूरी पर बिंदुओं को चिह्नित करें । कागज पर O से 5 सेमी. की दूरी पर स्थित सभी बिंदुओं को मिलाने पर हमें आकृति 1(ii) प्राप्त होगी। किसी तल पर खींची गई इस प्रकार की बंद आकृति वृत्त होती है। उन सभी बिंदुओं का समूह जो तल में एक नियत बिंदु से निश्चित दूरी पर स्थित हो तथा एक बंद आकृति बनाता हो, वृत्त कहलाता है। बिंदु O को वृत्त का केन्द्र कहते हैं। केन्द्र से वृत्त के किसी भी बिंदु तक की दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है। क्या पहिया, घड़ी, चूड़ी, सिक्के आदि वस्तुओं पर भी एक बिंदु ढूँढ़ सकते हैं जिससे सिरे तक दूरी बराबर हो।



आकृति–1(ii)

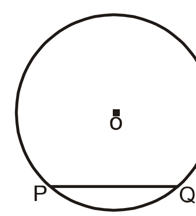
करके देखें

सत्य या असत्य लिखिए। कारण व उदाहरण से समझाइए ।

1. वृत्त की अनेक त्रिज्याएँ होती हैं।
2. वृत्त की सभी त्रिज्याएँ समान नहीं होती हैं।

जीवा (Chord)

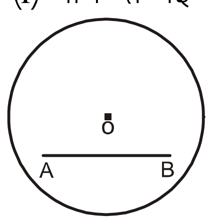
कागज पर एक वृत्त खींचकर, उस की परिधि पर कोई भी दो बिंदु लें। आकृति–2 में दो बिंदुओं P और Q को दिखाया गया है। दोनों बिंदुओं को मिलाने पर रेखाखण्ड PQ बनता है यह रेखाखण्ड वृत्त की एक जीवा है। क्या आप सोच सकते हैं कि ऐसे कितने रेखाखण्ड होंगे जिनके अंत बिंदु वृत्त पर हों? आप पाएँगे कि ऐसी अनंत जीवाएँ हैं।



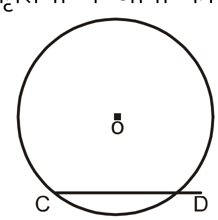
आकृति–2

करके देखें

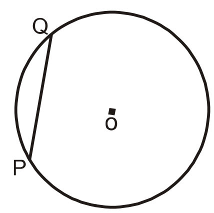
(i) नीचे दी गई आकृतियों में जीवा की पहचान करें।



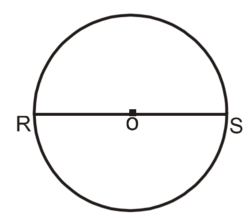
आकृति–3



आकृति–4



आकृति–5

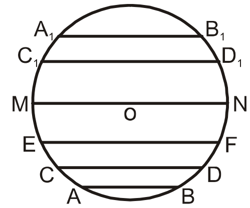


आकृति–6

(ii) क्या जीवाएँ एक ही लंबाई की हैं?

(iii) सबसे लंबी जीवा कौन सी है?

वृत्त की सबसे बड़ी जीवा



आकृति–7

एक वृत्त जिसका केन्द्र O है इसमें विभिन्न जीवाएँ AB, CD, EF और MN आदि खींची गई हैं (आकृति 7)। इन सभी जीवाओं की लंबाइयों का अवलोकन करें।

AB व MN में कौन बड़ी है?

CD व MN में कौन बड़ी है?

इसी प्रकार जीवा EF व MN में किसकी लंबाई अधिक है?

जीवा A_1B_1 और MN में से? आप देख सकते हैं कि जीवा MN की लंबाई सबसे अधिक है। क्या जीवा MN में कोई विशेष गुण देख पा रहे हैं जो शेष जीवाओं में नहीं है? जीवा MN वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरती है। उस जीवा को जो वृत्त के केन्द्र से होकर जाती है, वृत्त का व्यास कहते हैं। क्या आप वृत्त में व्यास से भी बड़ी जीवा खींच सकते हैं?

नहीं, आप पाएँगे कि व्यास, वृत्त की सबसे बड़ी जीवा होती है।

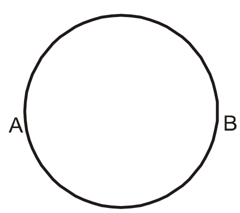
सोचें एवं चर्चा करें

क्या आकृति–7 में MN के अतिरिक्त और भी व्यास खींचे जा सकते हैं?

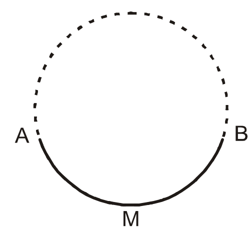
यदि हाँ तो, ऐसे कितने व्यास खींचे जा सकते हैं?

वृत्त का चाप (Arc of a circle)

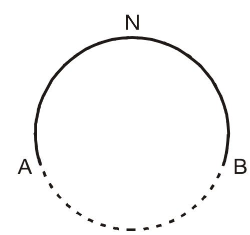
वृत्त की परिधि पर कोई दो बिंदु A और B हों तो वृत्त दो भागों में बँट जाता है। (आकृति 8,9,10)



आकृति–8



आकृति–9



आकृति–10

इनमें वृत्त का एक भाग छोटा तथा एक भाग बड़ा है। वृत्त के छोटे भाग को लघु चाप $\widehat{AMB}$ (आकृति–8) तथा बड़े भाग को दीर्घ चाप $\widehat{ANB}$ (आकृति–9) कहते हैं।

पुनः आकृति–8 में यदि यह मान लें कि कोई बिंदु A से वृत्ताकार पथ पर गति करता हुआ बिंदु A पर वापस पहुँच जाए तो बिंदु के द्वारा तय की गई पथ की लंबाई वृत्त की परिधि कहलाती है।

एक वृत्त के अनुदिश एक बार चलने में तय की गई दूरी उसका परिमाप होता है, जिसे सामान्यतः परिधि कहा जाता है।

वृत्तखंड (Segment of a circle)

आकृति–11

किसी वृत्त पर एक जीवा AB खींचिए। क्या आप बता सकते हैं कि जीवा वृत्त के अन्तः भाग को कितने भागों मे विभाजित करती है। (आकृति–11)। आप देख सकते हैं कि जीवा वृत्त के अन्तः भाग को दो भागों में विभाजित करती है। जीवा तथा चाप के मध्य क्षेत्र को वृत्तखण्ड कहते हैं। जीवा तथा लघु चाप के मध्य क्षेत्र को लघु वृत्तखण्ड तथा जीवा और दीर्घ चाप के मध्य क्षेत्र को दीर्घ वृत्तखण्ड कहते हैं।

करके देखें

कागज पर एक वृत्त खींचिए तथा अलग–अलग माप की जीवा खींचकर जीवा की लंबाई तथा संगत लघु वृत्तखण्ड में संबंध ढूँढ़िए।

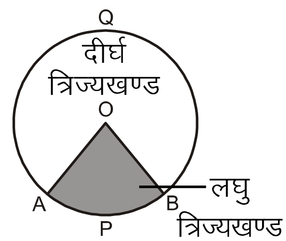
हम देख सकते हैं कि जीवा की लंबाई कम होगी तो लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्र भी कम होगा।

सोचें एवं चर्चा करें

(1) एक वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी. है। वृत्त की जीवाओं की लंबाइयाँ क्रमशः 4 सेमी., 6सेमी.,10 सेमी.व 8 सेमी. हैं। इन जीवाओं के संगत दीर्घ वृत्तखण्ड को छोटे से बड़े के क्रम में लिखिए।

(2) उपरोक्त 6 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त में जब जीवा 12 सेमी. की हो तो दीर्घ वृत्तखण्ड और लघु वृत्तखण्ड में क्या संबंध देखते हैं ?

त्रिज्यखंड (Sector)



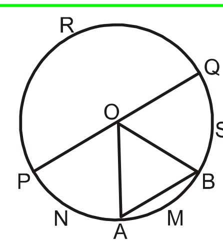
आकृति–12

एक वृत्त पर दो बिंदु A और B लीजिए। (देखिए आकृति–12) चाप AB के सिरों को वृत्त के केन्द्र O से मिलाइए केन्द्र को चाप $\overset{\frown}{AB}$ के सिरों से मिलाने वाली त्रिज्याओं एवं चाप के बीच के क्षेत्र को त्रिज्यखण्ड कहते हैं।

वृत्तखण्ड की तरह आप पाते हैं कि लघु चाप तथा त्रिज्याओं से घिरा क्षेत्र लघु त्रिज्यखण्ड और दीर्घ चाप तथा त्रिज्याओं से घिरा क्षेत्र दीर्घ त्रिज्यखण्ड होता है। OAPB लघु त्रिज्यखण्ड है और OAQB दीर्घ त्रिज्यखण्ड है ।

करके देखें

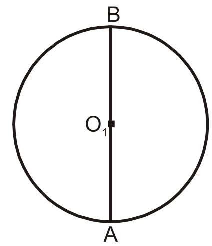
दी गई आकृति में त्रिज्या, जीवा, व्यास, चाप, त्रिज्यखण्ड, वृत्तखण्ड की पहचान कर दी गयी तालिका में लिखें।



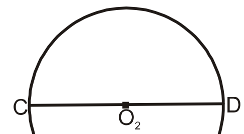
आकृति–13

त्रिज्या	जीवा	व्यास	चाप	त्रिज्यखण्ड	वृत्तखण्ड

सर्वांगसम वृत्त (Congruent circles)



आकृति–14



आकृति–15

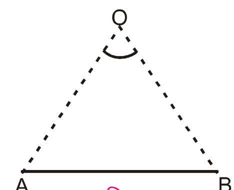
हमने देखा था कि ऐसी दो आकृतियाँ जो एक दूसरे को पूरी तरह ढँक लेती हैं सर्वांगसम आकृतियाँ कहलाती हैं।

अगर हम बराबर त्रिज्या के दो वृत्त लें जिनके केन्द्र O_1 व O_2 हों। पुनः O_1 केन्द्र वाले वृत्त में एक व्यास AB तथा O_2 केन्द्र वाले वृत्त में व्यास CD लें। (आकृति–14,15)

एक वृत्त को दूसरे वृत्त पर इस प्रकार रखें कि केन्द्र O_1 केन्द्र O_2 पर पड़े तथा व्यास AB के अंत बिन्दु A व B क्रमशः बिन्दु C व बिन्दु D पर पड़ें। आप देख सकते हैं कि एक वृत्त दूसरे वृत्त को पूर्णतया ढँक लेता है अतः हम कह सकते हैं कि लिए गए दोनों वृत्त सर्वांगसम हैं। इस गतिविधि को बराबर त्रिज्या के अन्य वृत्त खींचकर दोहराएँ।

आप पाएँगे कि बराबर त्रिज्याओं वाले वृत्त सर्वांगसम होते हैं।

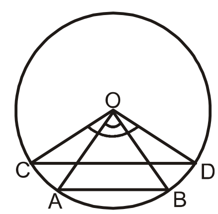
जीवा द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण



आकृति–16

एक रेखाखण्ड AB तथा एक बिंदु O जो रेखाखण्ड में नहीं है, दिए गए हैं। (आकृति–16)

O को A और B से मिलाइए। $\angle AOB$, रेखाखण्ड AB द्वारा बिन्दु O पर अंतरित कोण कहलाता है।



आकृति–17

एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा दो जीवाएँ AB और CD हैं। (आकृति–17) जीवा AB तथा CD द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण क्रमशः $\angle AOB$ तथा $\angle COD$ हैं। क्या आप बता सकते हैं $\angle AOB$ और $\angle COD$ में कौन सा कोण बड़ा है? क्या आप जीवा की लंबाई तथा जीवा द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण में कोई संबंध देख पाते है? आप कह सकते हैं कि जीवा की लंबाई अधिक होगी तो केन्द्र पर बना कोण भी अधिक होगा।

करके देखें

5 सेमी. त्रिज्या का एक वृत्त खींचें। वृत्त में 3, 5., 8., 10 तथा 6 सेमी. लंबाई की दो–दो जीवाएँ खींचें। चाँदे की सहायता से इन जीवाओं द्वारा केन्द्र पर बने कोणों की माप करें और दी गई तालिका में लिखें।

जीवा की लंबाई	3 सेमी.	5 सेमी.	6 सेमी.	8 सेमी.	10 सेमी.
कोण					

उपरोक्त तालिका को पूर्ण करने पर आप पाएँगे कि एक वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

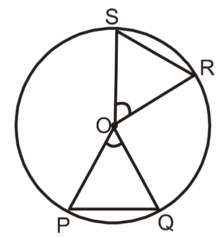
वृत्त के कुछ प्रमेय

हमने ज्यामितीय कथनों को सिद्ध करना सीखा है। अब हम वृत्त के बारे में कुछ कथनों को जो उसके गुण बताते हैं सिद्ध करने के तरीके देखेंगे। पहला कथन हम वही लेते हैं जो हमने ऊपर देखा। किसी वृत्त में बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

प्रमेय – 1

कथन – किसी वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

ज्ञात है – एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। इसकी दो बराबर जीवाएँ PQ और RS हैं।



अकृति–18

सिद्ध करना है – $\angle POQ = \angle ROS$

उपपत्ति – ΔPOQ तथा ΔROS में

FDKES8

$OP = OR$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OQ = OS$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$PQ = RS$ (ज्ञात है)

अतः $\Delta POQ \cong \Delta ROS$ (भु.भु.भु. सर्वांगसमता)

$\therefore$ $\angle POQ = \angle ROS$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

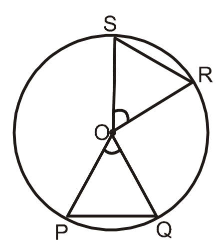
क्या इस कथन का विलोम भी सत्य है, अर्थात् यदि एक वृत्त की जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हों, तो वे जीवाएँ बराबर होती हैं। आइए इस कथन को सिद्ध करके देखते हैं।

प्रमेय – 2

कथन – यदि एक वृत्त की जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हों, तो वे जीवाएँ बराबर होती हैं।

ज्ञात है – एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। इसकी दो जीवाएँ PQ और RS हैं तथा $\angle POQ = \angle ROS$

सिद्ध करना है – $PQ = RS$



आकृति–19

उपपत्ति – ΔPOQ तथा ΔROS में,

$OP = OR$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OQ = OS$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle POQ = \angle ROS$ (दिया है)

अतः $\Delta POQ \cong \Delta ROS$ (भु.को.भु. सर्वांगसमता)

$\therefore$ $PQ = RS$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

> यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों, तो उनके संगत चाप सर्वांगसम होते हैं तथा विलोमतः यदि दो चाप सर्वांगसम हों, तो उनके संगत जीवाएँ बराबर होती हैं।

उदाहरणः–1. आकृति–20 में जीवा AB और BC बराबर हैं तथा $\angle AOB = 35°$ है तो $\angle AOC$ ज्ञात कीजिए।

हलः– $\angle AOB = \angle BOC$ (वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।)

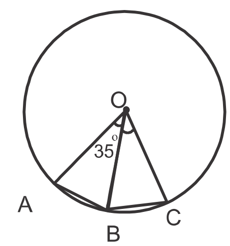
$\angle BOC = 35°$ ($\angle AOB = 35°$ दिया है।)

अतः $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$

$= 35° + 35°$

$= 70°$

$\therefore$ $\angle AOC = 70°$



आकृति–20

उदाहरणः–2. एक वृत्त के अन्तर्गत समपंचभुज खींचा गया है। समपंचभुज की प्रत्येक भुजा केन्द्र पर कितने अंश का कोण बनाएगी?

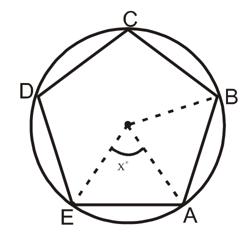
हलः– समपंचभुज की पाँचों भुजाएँ बराबर होती हैं अतः वे वृत्त के केन्द्र पर बराबर कोण बनाती हैं।

माना समपंचभुज की प्रत्येक भुजा केन्द्र पर $x°$ का कोण बनाती है।

अतः $5x° = 360°$ (क्यों?)

$$x° = \frac{360°}{5}$$

$\therefore$ $x° = 72°$



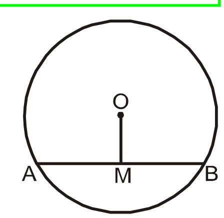
आकृति–21

करके देखें

1. एक वृत्त के अंतर्गत समबहुभुज खींचा गया है। समबहुभुज की प्रत्येक भुजा केंद्र पर $60°$ का कोण अंतरित करती है तो समबहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

केन्द्र से जीवा पर लंब

कागज पर एक वृत्त खींचिए। इसका केन्द्र O तथा AB इसकी एक जीवा है। केन्द्र से जीवा AB पर लंब डालिए (आकृति 22) जो AB से M पर मिलता हो। AM और BM के बारे में आप क्या कह सकते हैं?



आकृति–22

क्या वे बराबर हैं ? कैसे पता करेंगे ? यहाँ हम गणित के कौन से तर्कों का प्रयोग करें? क्या हम त्रिभुजों की सर्वांगसमता का प्रयोग कर सकते हैं ?

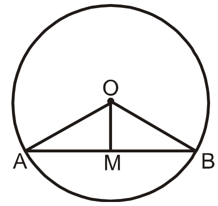
प्रमेय – 3

कथन – किसी वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

ज्ञात है – एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा AB उसकी एक जीवा है तथा $OM \perp AB$

सिद्ध करना है – $AM = MB$

रचना – O को A और B से मिलाइए



आकृति–23

उपपत्ति – ΔOMA तथा ΔOBM में,

$OA = OB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OM = OM$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle OMA = \angle OMB$ (समकोण हैं)

$\Delta OMA \cong \Delta OMB$ (समकोण–कर्ण भुजा सर्वांगसमता से)

अत : $AM = MB$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

इस प्रमेय का विलोम क्या है ? क्या वृत्त के केन्द्र से एक जीवा को समद्विभाजित करने के लिए खींची गई रेखा जीवा पर लंब होती है?

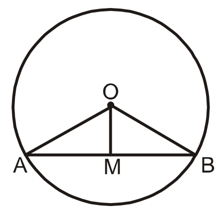
प्रमेय – 4

कथन – एक वृत्त के केन्द्र और जीवा के मध्य बिंदु को मिलाने वाला रेखाखंड जीवा पर लंब होता है।

ज्ञात है – एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। AB उसकी एक जीवा है तथा M जीवा का मध्य बिंदु है।

सिद्ध करना है – $OM \perp AB$

रचना – O को A और B से मिलाइए।



आकृति–24

उपपत्ति – ΔOMA तथा ΔOMB में

$OA = OB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$AM = MB$ (दिया है)

$OM = OM$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\Delta OMA \cong \Delta OMB$ (भु.भु.भु. सर्वांगसमता)

अत : $\angle OMA = \angle OMB$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

$\angle OMA + \angle OMB = 180^\circ$ (रेखीय युग्म अभिगृहीत)

$\angle OMA + \angle OMA = 180^\circ$ $(\angle OMA = \angle OMB)$

$2\angle OMA = 180^\circ$

$\angle OMA = 90^\circ$

अत : $OM \perp AB$

आइए अब हम वृत्त के इन गुणों का उपयोग कर कुछ उदाहरण हल करते हैं।

उदाहरण:–3. एक वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी. है तो केन्द्र से 3 सेमी. की दूरी पर स्थित जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल:– ΔOAC में $OA = 5$ सेमी., $OC = 3$ सेमी. है।

पाइथागोरस प्रमेय से

$OA^2 = OC^2 + AC^2$

$5^2 = 3^2 + AC^2$

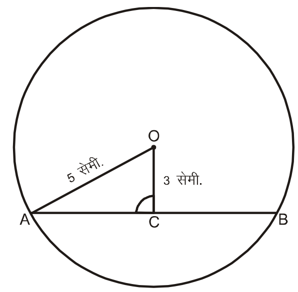
$AC^2 = 5^2 - 3^2$

$AC^2 = 25 - 9$

$AC^2 = 16$

$AC = 4$

अतः जीवा $AB = 2 \times AC = 8$ सेमी.



आकृति–25

उदाहरणः–4. किसी वृत्त के केन्द्र से 5 सेमी. की दूरी पर स्थित जीवा की माप 24 सेमी. है। वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए।

हलः– $OR = 5$ सेमी., जीवा $PQ = 24$ सेमी.

$PR = \frac{1}{2} PQ$ सेमी.

$= \frac{1}{2} \times 24$

$= 12$ सेमी.

ΔOPR में पाइथागोरस प्रमेय से,

$OP^2 = PR^2 + OR^2$

$= 12^2 + 5^2$

$= 144 + 25$

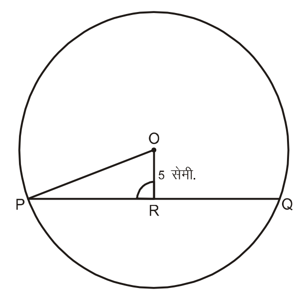
$= 169$

$OP = 13$

अतः वृत्त का व्यास $= 2 \times OP$

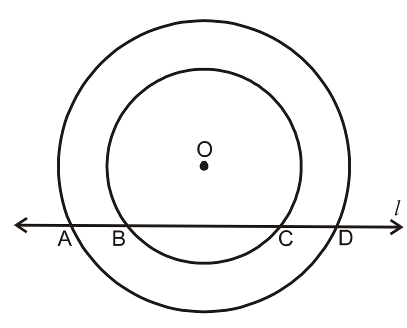
$= 2 \times 13$

$= 26$ सेमी.



आकृति–26

उदाहरणः–5. एक रेखा l दो संकेन्द्रीय वृत्तों (एक ही केन्द्र वाले वृत्त), को A, B, C और D बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है (देखिए आकृति–27)। यदि $AD = 18$ सेमी. तथा $BC = 8$ सेमी. हो तो AB का मान ज्ञात कीजिए। वृत्तों का केन्द्र O है।



आकृति–27

हलः– केन्द्र O से रेखा l पर लंब OM खींचिए (देखिए आकृति–28)।

$OM \perp BC$

$\therefore \quad BM = MC \quad \ldots\ldots (i)$

$BM + MC = BC$

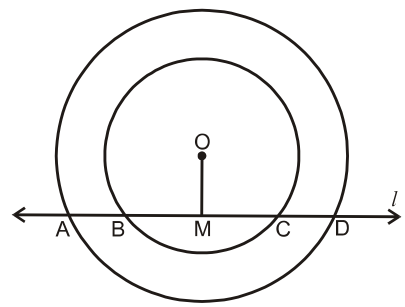
$BM + BM = 8$

$2BM = 8$

$BM = 4$ सेमी.

इसी प्रकार $\quad OM \perp AD$

$AM = MD \quad \ldots\ldots (ii)$



आकृति–28

$AM + MD = AD$

$2AM = 18$

$AM = 9$ सेमी.

अतः $\quad AB = AM - BM$

$= 9 - 4$

$= 5$ सेमी.

उदाहरण–6. एक वृत्त की दो जीवाएँ PQ और RS समान्तर हैं और AB, जीवा PQ का लम्ब समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि AB जीवा RS को भी समद्विभाजित करती है।

हलः– हम जानते हैं कि वृत्त की जीवा का लम्बार्द्धक वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

AB जीवा PQ का लम्ब समद्विभाजक है।

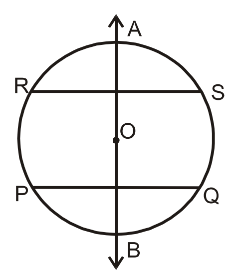
$\therefore$ AB वृत्त के केन्द्र से होकर जाएगा।

$AB \perp PQ$ और $PQ \parallel RS \Rightarrow AB \perp RS$

अतः $AB \perp RS$ और AB वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

$\therefore$ AB जीवा RS का भी लंब समद्विभाजक होगा।

अतः AB जीवा RS को भी समद्विभाजित करेगा।



आकृति–29

करके देखें

$5x$ त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र से $6x$ लंबाई की जीवा पर डाले गए लंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 1

1. वृत्त की जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए, यदि

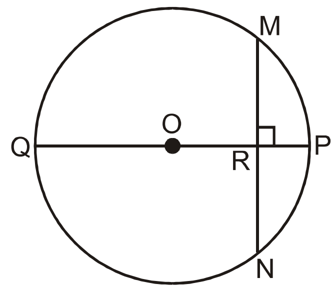
(i) त्रिज्या = 13 सेमी. तथा जीवा की केन्द्र से दूरी = 12 सेमी.

(ii) त्रिज्या = 15 सेमी. तथा जीवा की केन्द्र से दूरी = 9 सेमी.

2. वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए यदि जीवा की लंबाई तथा केन्द्र से दूरी क्रमशः

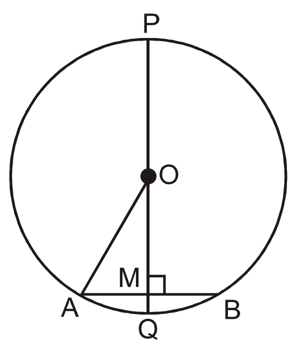
(i) 8 सेमी. और 3 सेमी. (ii) 14 सेमी. और 24 सेमी.

3. आकृति–30 में, PQ वृत्त का व्यास है। $MN \perp PQ$ तथा PQ=10 सेमी. और PR=2सेमी. है तो MN की लंबाई ज्ञात कीजिए।



आकृति–30

4. आकृति–31 में जीवा AB= 18सेमी. है तथा PQ, जीवा AB की लंबसमद्विभाजक है जो जीवा को M बिंदु पर मिलती है, यदि MQ=3 सेमी. हो तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



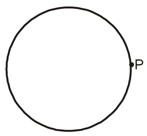
आकृति–31

5. एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, की दो जीवाएँ PQ और QR हैं तथा $\angle PQO = \angle OQR = 55^\circ$ । सिद्ध कीजिए कि PQ=QR.

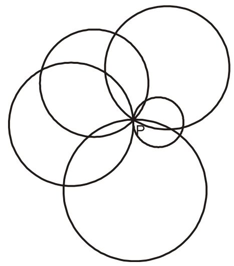
6. केन्द्र O वाले एक वृत्त में AB और AC दो समान जीवाएँ है। यदि $OD \perp AB$ और $OE \perp AC$ तो सिद्ध कीजिए कि ΔADE समद्विबाहु त्रिभुज है।

तीन असंरेख बिंदुओं से होकर जाने वाला वृत्त

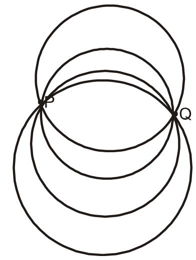
कागज पर एक बिंदु P लें। परकार की सहायता से एक वृत्त खींचें जो बिंदु P से होकर जाता है। क्या हम बिंदु P से होकर जाने वाला एक और वृत्त खींच सकते हैं? ऐसे कितने वृत्त खींचे जा सकते हैं ? (देखिए आकृति–33)।



आकृति–32



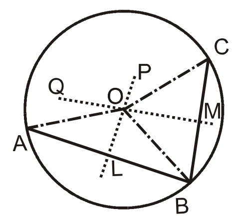
आकृति–33



आकृति–34

आप देख सकते हैं कि ऐसे अनेक वृत्त खींचे जा सकते हैं। इसी तरह दो बिंदुओं P व Q से होकर जाने वाले अनेक वृत्त खींचे जा सकते हैं (देखिए आकृति–34)। क्या तीन असंरेख बिंदुओं P, Q व R से होकर जाने वाले अनेक वृत्त खींचे जा सकते हैं?

प्रमेय – 5



आकृति–35

कथन – तीन असंरेख बिंदुओं से होकर एक और केवल एक वृत्त खींचा जा सकता है।

ज्ञात है – A, B और C तीन असंरेख बिंदु हैं।

सिद्ध करना है – A, B और C से एक और केवल एक वृत्त खींचा जा सकता है।

रचना – बिंदु A को B से तथा B को C से मिलाइए। AB और BC के लम्बार्द्धक क्रमशः PL और QM खींचिए। माना PL और QM एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। O को A,B और C से मिलाइए।

उपपत्ति – बिंदु O, AB के लम्बार्द्धक PL पर स्थित है।

$\therefore$ OA = OB ----- (i) (किसी रेखाखण्ड के लम्बार्द्धक में स्थित प्रत्येक बिंदु रेखाखण्ड के अंत बिंदुओं से समान दूरी पर होता है।)

इसी प्रकार O, BC के लंबार्द्धक MQ पर स्थित है।

$\therefore$ OB = OC ----- (ii)

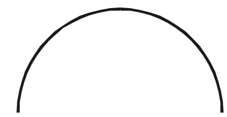
OA = OB = OC = r (माना) (PL और QM एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद करेंगे।) O एकमात्र बिंदु है जो A, B और C से समान दूरी पर होगा।

अतः तीन असंरेख बिंदुओं से एक और केवल एक वृत्त होकर जाता है।

हम इस तथ्य का उपयोग त्रिभुज के तीनों शीर्ष से होकर एक वृत्त खींचने में करते हैं। इस वृत्त को त्रिभुज ABC का परिवृत्त और इसके केन्द्र को त्रिभुज का परिकेन्द्र कहा जाता है।

करके देखें

एक वृत्त का चाप दिया गया है (देखिए आकृति–36)।
वृत्त का केन्द्र ज्ञात कर वृत्त को पूरा कीजिए।



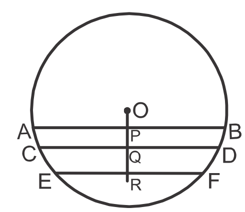
आकृति–36

सोचें व चर्चा करें

क्या तीन संरेख बिंदुओं से होकर जाने वाला कोई वृत्त खींचा जा सकता है?

जीवाएँ और केन्द्र से उनकी दूरियाँ

एक वृत्त में असंख्य जीवाएँ होती हैं। किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। वृत्त पर एक दूसरे के समान्तर जीवाएँ खींचिए (देखिए आकृति–37)। क्या आप जीवा की लंबाई तथा जीवा की केन्द्र से दूरी में कोई सम्बन्ध देखते हैं? दी गई आकृति में जीवा AB, CD व EF को केन्द्र से दूरी के घटते क्रम में लिखिए। आप देखेंगे कि जीवा की लंबाई बढ़ते जाने पर उसकी केन्द्र से दूरी कम होती जाती है। व्यास वृत्त की सबसे बड़ी जीवा है। उसकी केन्द्र से दूरी शून्य है। क्या एक वृत्त पर बराबर जीवाएँ लें तो उनकी केन्द्र से दूरी समान होगी? आइए अब हम इस कथन की सत्यता की जाँच करते हैं।

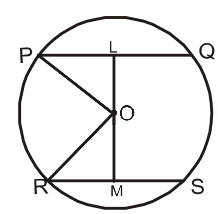


आकृति–37

प्रमेय – 6

कथन – किसी वृत्त (अथवा सर्वांगसम वृत्तों) की बराबर जीवाएँ केन्द्र से (या केन्द्रों से) समान दूरी पर होती हैं।

ज्ञात है – वृत्त में PQ और RS दो समान जीवाएँ हैं तथा O से PQ और RS पर क्रमशः OL और OM लंब डाला गया है।



आकृति–38

सिद्ध करना है – $OL = OM$

रचना – O को P तथा R से मिलाइए।

उपपत्ति – $PQ = RS$ (ज्ञात है)

$\frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}RS$

$PL = RM$ (केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समान भागों में बाँटता है।)

$OP = OR$ (एक ही वृत्त की त्रिज्या)

$\angle OLP = \angle OMR = 90°$ (रचना से)

$\Delta OLP \cong \Delta OMR$ (R.H.S सर्वांगसमता प्रमेय से)

$\therefore \quad OL = OM$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

करके देखें

एक वृत्त के केन्द्र से समदूरस्थ जीवाएँ लंबाई में बराबर होती हैं। उपपत्ति दें।

आइए अब हम उपरोक्त परिणामों का उपयोग कर कुछ उदाहरण हल करते हैं –

उदाहरणः–7. एक वृत्त की त्रिज्या 20 सेमी. है। दो बराबर और समांतर जीवाओं के बीच की दूरी 24 सेमी. है। जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हलः–

$OM = ON$ ---- (i) (बराबर जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होती हैं।)

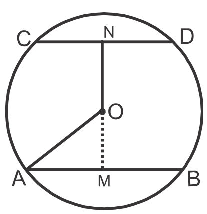
$MN = OM + ON$

$MN = OM + OM$ (i) से

$24 = 2\ OM$

$OM = 12$ सेमी.

$OA = 20$ सेमी.



आकृति–39

ΔOAM में,

$OA^2 = OM^2 + AM^2$

$AM^2 = OA^2 - OM^2$

$= 20^2 - 12^2$

$= 400 - 144$

$= 256$

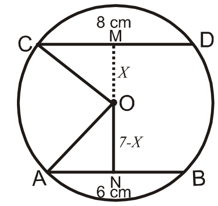
$AM = 16$

अतः जीवा की लंबाई $AB = 2 \times AM$

$= 2 \times 16$

$= 32$ सेमी.

उदाहरणः–8. एक वृत्त की 6 सेमी. तथा 8 सेमी. लंबी दो जीवाएँ AB और CD समांतर हैं और केन्द्र की विपरीत दिशा में स्थित हैं। यदि AB और CD के बीच की दूरी 7 सेमी. हो, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



आकृति–40

हल:– यहाँ $AB = 6$ सेमी.

$$AN = \frac{1}{2}AB$$

$$= \frac{1}{2} \times 6$$

$AN = 3$ सेमी.

(केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।)

इसी प्रकार $CD = 8$ सेमी

$$CM = \frac{1}{2}CD$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ सेमी.}$$

ΔOAN में

$$OA^2 = ON^2 + AN^2$$

$$OA^2 = (7-x)^2 + 3^2 \quad (\because MN=7CM, \text{ माना } OM=x \text{ तब } ON=7-x)$$

ΔOCM में,

$$OC^2=OM^2+CM^2$$

$$OC^2 = x^2 + 4^2$$

$\because$ $OA = OC$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\therefore$ $OA^2 = OC^2$

अत: $(7-x)^2 + 3^2 = x^2 + 4^2$

$$x^2 - 14x + 58 = x^2 + 16$$

$$-14x = 16 - 58$$

$$14x = 42$$

$x = 3$ सेमी.

अत: वृत्त की त्रिज्या

$$OA^2 = (7-x)^2 + 3^2$$

$$= (7-3)^2 + 3^2$$

$$= 16 + 9$$

$$= 25$$

$OA = 5$ सेमी.

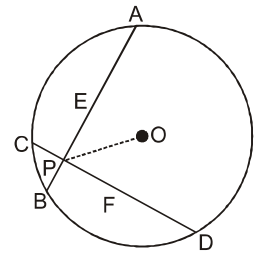
वृत्त की त्रिज्या $OA = 5$ सेमी.

प्रश्नावली 2

1. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि वृत्त का केन्द्र $\angle BAC$ के समद्विभाजक पर स्थित है।

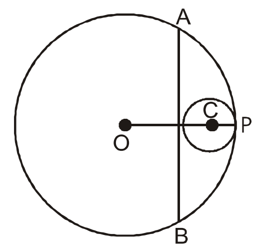
2. 10 सेमी. और 24 सेमी. की दो समांतर जीवाएँ वृत्त के केन्द्र के विपरीत ओर हैं। जीवाओं के बीच की दूरी 17 सेमी. है। वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए।

3. एक वृत्त का केन्द्र O है तथा $\angle APD$ का कोण समद्विभाजक PO है (देखिए आकृति–41)। सिद्ध कीजिए AB=CD.



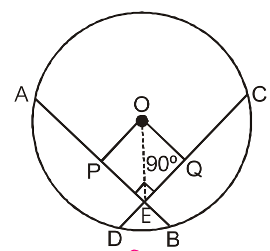
आकृति–41

4. दो वृत्त हैं जिनका केन्द्र O और C है तथा त्रिज्या क्रमशः 13 सेमी. और 3 सेमी. है (देखिए आकृति–42)। यदि OC का लंबसमद्विभाजक, बड़े वृत्त को A और B पर मिलता है तो ABकी लंबाई ज्ञात कीजिए।



आकृति–42

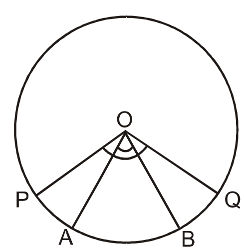
5. आकृति–43 में केन्द्र O वाले एक वृत्त में AB और CD दो समान जीवाएँ बिंदु E पर समकोण पर मिलती है। यदि Pऔर Q जीवा AB और CD के मध्य बिंदु हों तो सिद्ध कीजिए कि OPEQ एक वर्ग है।



आकृति–43

वृत्त के चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोण –

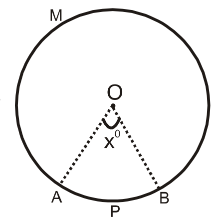
वृत्त पर कोई दो बिन्दु A और B हों तो वृत्त दो चापों में बँट जाता है । लघु चाप AB के अंत बिंदु A और B को केन्द्र O से मिलाइए। चाप AB के द्वारा केन्द्र पर बना $\angle AOB$ केन्द्रीय कोण कहलाता है। पुनः वृत्त पर दो बिंदु P और Q इस प्रकार लेते हैं कि उनसे बने लघु चाप PQ की लंबाई, लघु चाप AB से अधिक हो तथा वह केंद्र O पर $\angle POQ$ बनाता हो (देखिए आकृति–44)। क्या चाप की लंबाई तथा चाप द्वारा केन्द्र पर बनाए गए कोण में कोई संबंध देख पा रहे हैं? आकृति–44 में आप देख सकते हैं कि चाप की लंबाई अधिक होने पर केन्द्र में बना कोण भी अधिक होता है।



आकृति–44

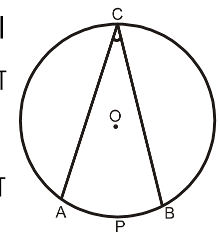
सोचें एवं चर्चा करें

एक वृत्त के लघुचाप APB का अंश माप (आकृति–45) $x°$ हो तो दीर्घ चाप AMB का अंश माप $(360° - x°)$ होता है। क्यों?



आकृति–45

वृत्त के चाप के अंत बिंदुओं को वृत्त की शेष परिधि में स्थित किसी बिंदु से मिलाइए। जैसे आकृति–46 में दिखाया गया है तब $\angle ACB$ चाप APB द्वारा परिधि के C बिंदु पर बनाया गया कोण कहलाता है।



आकृति–46

आइए अब हम एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण तथा वृत्त के परिधि के शेष भाग के किसी बिंदु पर अंतरित कोण में संबंध देखते हैं।

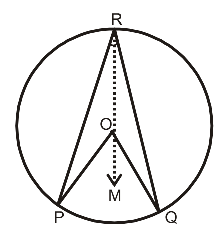
प्रमेय – 7

कथन – वृत्त के किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण, वृत्त के परिधि के शेष भाग के किसी बिंदु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।

ज्ञात है – वृत्त के एक चाप PQ द्वारा केन्द्र पर बना कोण $\angle POQ$ और शेष परिधि के R बिंदु पर बना कोण $\angle PRQ$ है।

सिद्ध करना है – $\angle POQ = 2\angle PRQ$

रचना – बिंदु R को केन्द्र O से मिलाते हुए M तक आगे बढ़ाया।



आकृति–47

उपपत्ति –

ΔPOR में,

$OP = OR$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle OPR = \angle ORP$ (त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।)

$\angle POM = \angle OPR + \angle ORP$ (बहिष्कोण प्रमेय)

$\angle POM = 2\angle ORP$ ....(1)

ΔQOR में,

$OQ = OR$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle OQR = \angle ORQ$ (त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

$\angle QOM = \angle ORQ + \angle OQR$ (बहिष्कोण प्रमेय)

$\angle QOM = 2\angle ORQ$ ....(2)

अतः $\angle POM + \angle QOM = 2\angle ORP + 2\angle ORQ$ ....(1) व (2) को जोड़ने पर

$$\angle POQ = 2(\angle ORP + \angle ORQ)$$

$$\angle POQ = 2\angle PRQ$$

आइए अब हम प्रमेय (7) की एक स्थिति पर विचार करते हैं जब चाप एक अर्द्धवृत्त हो।

प्रमेय – 8

कथन – वृत्त की परिधि के किसी बिंदु पर व्यास द्वारा अंतरित कोण समकोण होता है।

ज्ञात है – वृत्त पर व्यास द्वारा अंतरित कोण $\angle LNM$ है।

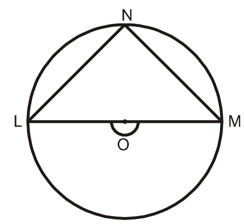
सिद्ध करना है – $\angle LNM = 90°$

उपपत्ति – $\angle LOM = 180°$ (सरल रेखा)

$\angle LOM = 2\angle LNM$ (प्रमेय 7 से)

$\therefore \quad 2\angle LNM = 180°$

या $\quad \angle LNM = \dfrac{180°}{2} = 90°$



आकृति–48

अतः हम कह सकते हैं कि एक वृत्त की परिधि के किसी बिंदु पर व्यास द्वारा अंतरित कोण समकोण होता है।

उदाहरणः–9. आकृति–49 में O वृत्त का केन्द्र तथा $\angle OPR = 30°$ तथा $\angle OQR = 40°$ है। तब $\angle POQ$ ज्ञात कीजिए।

हलः– ΔPOQ में,

$OP = OR$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

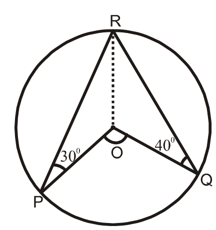
$\therefore \quad \angle OPR = \angle ORP = 30°$ (समद्विबाहु त्रिभुज के कोण)

इसी प्रकार ΔOQR मे,

$\angle OQR = \angle ORQ = 40°$

अतः $\quad \angle PRQ = \angle ORP + \angle ORQ$

$= 30° + 40°$



आकृति–49

$\angle PRQ = 70°$

$\therefore \quad \angle POQ = 2\angle PRQ$ (केन्द्र पर बना कोण शेष खण्ड में बने कोण का दुगुना होता है।)

$\angle POQ = 2 \times 70° = 140°$

उदाहरणः–10. आकृति–50 में AB वृत्त का व्यास और O केन्द्र है। यदि $\angle OAP = 50°$ तो

$\angle OPB$ ज्ञात कीजिए।

हलः– ΔAOP में

$OA = OP$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

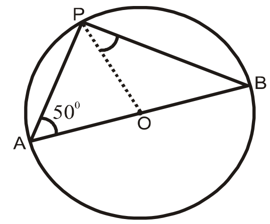
$\therefore \quad \angle OAP = \angle OPA = 50°$

$\angle APB = 90°$ (व्यास द्वारा अंतरित कोण)

अतः $\angle APB = \angle OPA + \angle OPB$

$90° = 50° + \angle OPB$

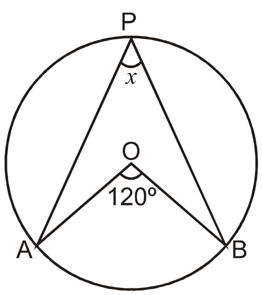
$\therefore \quad \angle OPB = 40°$



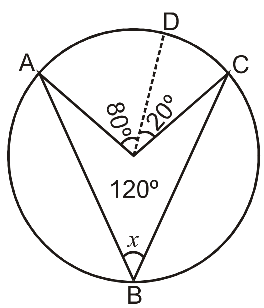
आकृति–50

करके देखें

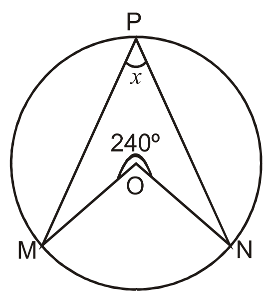
दी गई आकृतियों में x का मान ज्ञात कीजिए



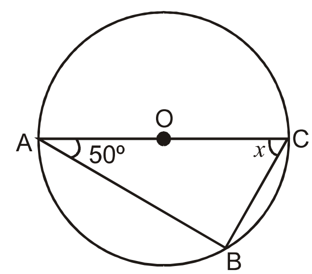
आकृति–51



आकृति–52



आकृति–53



आकृति–54

आइए अब हम वृत्त के एक ही खण्ड में बने कोणों के बीच संबंध देखते हैं।

प्रमेय – 9

कथन – वृत्त के एक ही खण्ड में बने कोण आपस में बराबर होते हैं।

ज्ञात है – वृत्त का केन्द्र O, वृत्त के एक ही खण्ड में बने $\angle ACB$ और $\angle ADB$ हैं

सिद्ध करना है – $\angle ACB = \angle ADB$

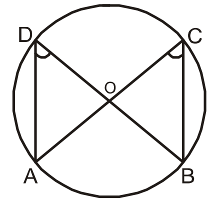
उपपत्ति – $\angle AOB = 2\angle ACB$ (चूंकि वृत्त के किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त की परिधि के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।)

$\angle AOB = 2\angle ADB$

अतः $2\angle ACB = 2\angle ADB$

$\angle ACB = \angle ADB$

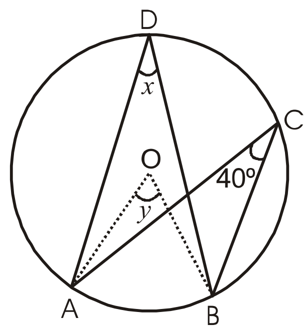
अतः हम कह सकते हैं कि वृत्त के एक ही खण्ड में बने कोण आपस में बराबर होते हैं।



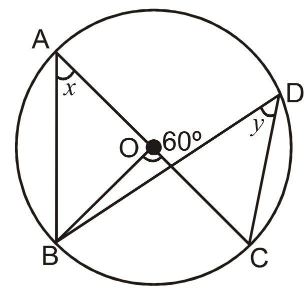
आकृति–55

करके देखें

दी गई आकृति में x और y का मान ज्ञात कीजिए



आकृति–56



आकृति–57

उदाहरण:–11. आकृति–58 में $\angle CAB = 25°$ और $\angle ADB = 35°$ हैं। तब $\angle ABC$ ज्ञात कीजिए।

हल:– यहाँ आकृति में $\angle ADB = \angle ACB$ (एक ही वृत्तखण्ड के कोण)

$\therefore \quad \angle ACB = 35°$

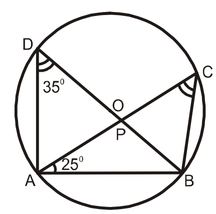
ΔABC में,

$\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = 180°$

$\angle ABC + 35° + 25° = 180°$

$\angle ABC = 180° - 60°$

$\angle ABC = 120°$



आकृति–58

उदाहरण:–12. सिद्ध कीजिए कि समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं में से किसी एक भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त त्रिभुज के आधार को समद्विभाजित करता है।

हल:– ΔABC में $AB = AC$ तथा AB को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त BC को बिंदु D पर काटता है।

चूँकि वृत्त पर व्यास द्वारा बना कोण समकोण होता है।

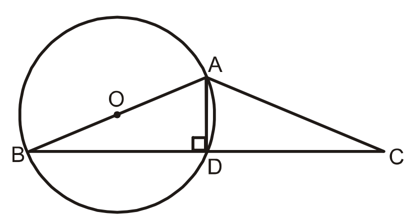
$\therefore \quad \angle ADB = 90°$

परन्तु $\quad \angle ADB + \angle ADC = 180°$

$90° + \angle ADC = 180°$

$\angle ADC = 90°$

ΔADB और ΔADC में,



आकृति–59

$AB = AC$ (दिया है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

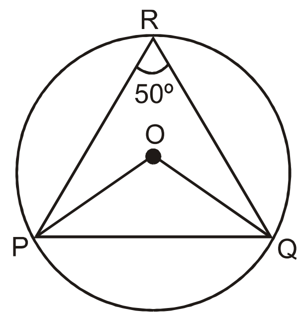
और $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$

$\therefore$ $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ (समकोण–कर्ण–भुजा सर्वांगसमता)

$BD = DC$

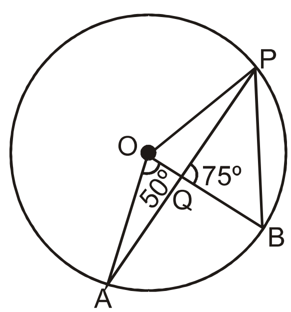
प्रश्नावली 3

1. आकृति–59 में, O वृत्त का केन्द्र है, PQ एक जीवा है। यदि $\angle PRQ = 50^\circ$ हो तो $\angle OPQ$ ज्ञात कीजिए।



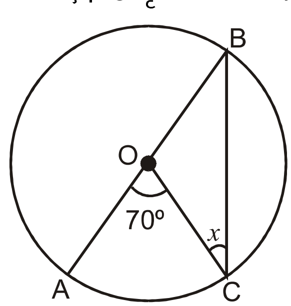
आकृति–60

2. आकृति में $\angle PBO$ का मान ज्ञात कीजिए यदि $\angle AOB = 50^\circ$ तथा $\angle PQB = 75^\circ$ है।



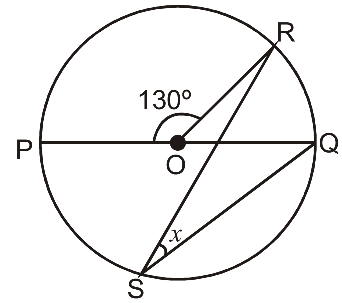
आकृति–61

3. आकृति में x का मान ज्ञात कीजिए। O वृत्त का केन्द्र है।



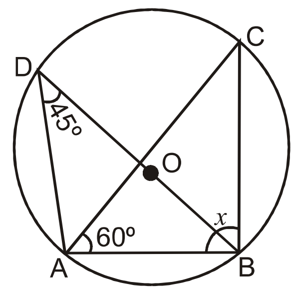
आकृति–62

4. यदि O वृत्त का केन्द्र है तो x का मान ज्ञात कीजिए।



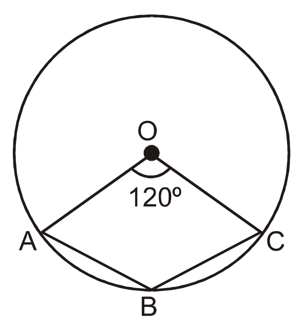
आकृति–63

5. यदि O वृत्त का केन्द्र है तो दी गई आकृति में x का मान ज्ञात कीजिए।



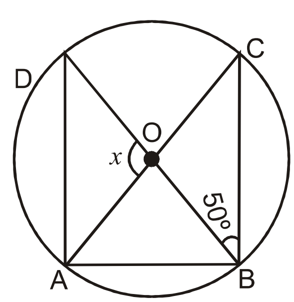
आकृति–64

6. आकृति में $\angle ABC$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति–65

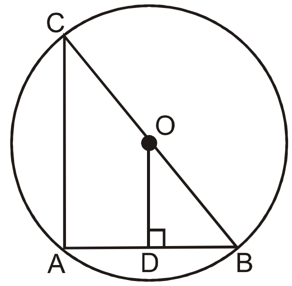
7. आकृति में x का मान ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि $AD \parallel BC$.



आकृति–66

8- आकृति में, O वृत्त का केन्द्र तथा $OD \perp AB$ यदि OD=5 सेमी. हो तो AC का मान

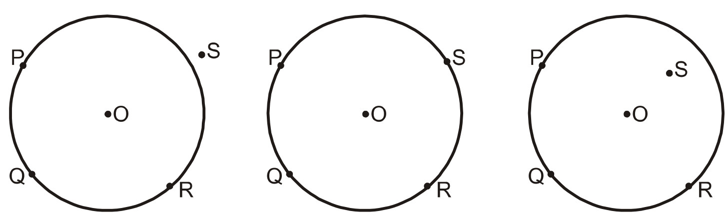
ज्ञात कीजिए।



आकृति–67

चक्रीय चतुर्भुज

आपने देखा है कि तीन असंरेख बिन्दुओं से होकर एक और केवल एक ही वृत्त खींचा जा सकता है। क्या हम चार असंरेख बिंदुओं (जिनमें कोई तीन बिंदु संरेख नहीं हैं) को लेकर एक वृत्त खींच सकते हैं? कोई तीन असंरेख बिंदु P, Q, R लेकर एक वृत्त खींचने पर हमें चौथे बिंदु S की स्थिति निम्न प्रकार प्राप्त हो सकती है।

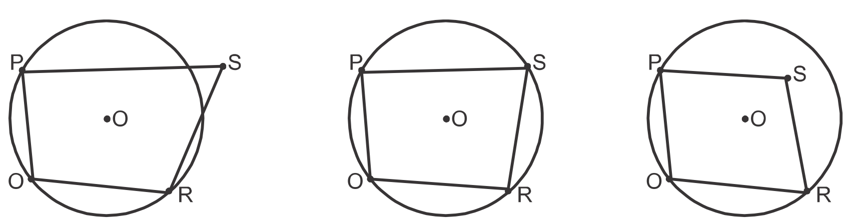


स्थिति I स्थिति II स्थिति III

आकृति–68

स्थिति I में बिंदु S वृत्त के बाह्य भाग में, स्थिति II में वृत्त पर तथा स्थिति III में वृत्त के अन्तः भाग में स्थित है। अतः हम कह सकते हैं कि चार असंरेख बिंदु से होकर एक वृत्त खींचने पर चारों बिंदु एक वृत्त में हो सकते हैं और नहीं भी।

उपरोक्त आकृति में बिंदु P, Q, R, S को मिलाने पर चतुर्भुज प्राप्त होगा। (देखिए आकृति–69)



स्थिति I स्थिति II स्थिति III

आकृति–69

स्थिति II में प्राप्त चतुर्भुज PQRS के चारों शीर्ष वृत्त पर स्थित हैं। यदि किसी चतुर्भुज के चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित होते हैं तो वह चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है। क्या इस चतुर्भुज का कोई विशेष गुण होता है जो अन्य चतुर्भुज में सामान्यतः नहीं होता है?

करके देखें

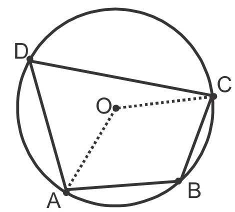
किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। वृत्त पर कोई चार बिंदु लेकर चतुर्भुज बनाइए। उनके सम्मुख कोणों को माप कर उनका योगफल ज्ञात कीजिए।

आप पाएँगे कि ऐसा चतुर्भुज जिसके चारों शीर्ष वृत्त पर हो उनके सम्मुख कोणों का योगफल $180°$ होता है।

आइए अब हम उपरोक्त कथन का तार्किक रुप ज्ञात करेंगे।

प्रमेय – 10

कथन – चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल $180°$ होता है।



आकृति–70

ज्ञात है – ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है – $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

रचना – O से A और C को मिलाइए।

उपपत्ति – चाप ABC का केन्द्र पर बना कोण $\angle AOC = 2\angle ADC$ (i)

चाप CDA का केन्द्र पर बना कोण $\angle COA = 2\angle ABC$ (ii)

अतः $\angle AOC + \angle COA = 2(\angle ADC + \angle ABC)$

$$360° = 2(\angle D + \angle B)$$

$$\angle B + \angle D = \frac{360°}{2}$$

$$\angle B + \angle D = 180°$$

चतुर्भुज ABCD में,

$$\angle A + \angle C + \angle B + \angle D = 360°$$

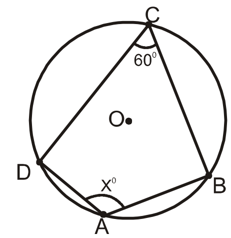
$$\angle A + \angle C + 180° = 360°$$

$$\angle A + \angle C = 180°$$

अतः हम कह सकते हैं कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल $180°$ होता है।

क्या इस कथन का विलोम भी सत्य है? हाँ, यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी एक युग्म का योग $180°$ हो तो चतुर्भुज चक्रीय चतुर्भुज होता है, अर्थात् चतुर्भुज के चारों शीर्ष से होकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।

उदाहरणः–13. दी गई आकृति–71 में x का मान ज्ञात कीजिए।



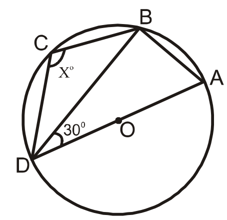
आकृति–71

हलः– $\angle A + \angle C = 180^o$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180^o होता है।)

$x + 60^o = 180^o$

$x = 120^o$

उदाहरणः–14. दी गई आकृति–72 में x का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति–72

हलः– $\angle ABD = 90^o$ (वृत्त पर व्यास द्वारा बना कोण)

$\angle ABD + \angle BDA + \angle DAB = 180^o$

$90^o + 30^o + \angle DAB = 180^o$

$\angle DAB = 180^o - 120^o$

$\angle DAB = 60^o$

$\angle DCB + \angle DAB = 180^o$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग)

$x + 60^o = 180^o$

$x = 120^o$

उदाहरणः–15. त्रिभुज ABC के भुजा BC पर बिंदु P इस प्रकार स्थित है कि AB=AP । बिंदु A और C से क्रमशः BC और PA के समांतर रेखाएँ खींचे जो बिंदु D पर मिलें (देखिए आकृति–73)। सिद्ध कीजिए कि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

आकृति–73

हलः– ΔABP में

AB=AP (दिया है)

अतः $\angle ABP = \angle APB$
(समान भुजा के सम्मुख कोण)

AP।।CD तथा AD।।BC (दिया है)

अतः APCD एक समांतर चतुर्भुज है।

$\angle APC = \angle ADC$
(समांतर चतुर्भज के सम्मुख कोण)

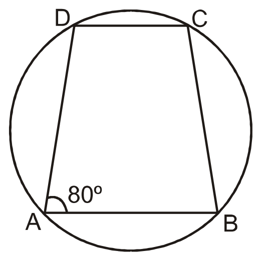
चूंकि $\angle APB + \angle APC = 180^o$ (रेखीय युग्म अभिगृहीत से)

$\angle ABP + \angle ADC = 180^o$ ($\angle APB = \angle ABP$ और $\angle APC = \angle ADC$)

किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी एक युग्म का योग 180^o हो तो चतुर्भुज, चक्रीय चतुर्भुज होता है।

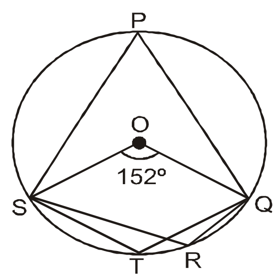
प्रश्नावली 4

1. दी गई आकृति में AB || CD यदि $\angle DAB = 80^o$ तो चतुर्भज के शेष अंतःकोणों का मान ज्ञात कीजिए।



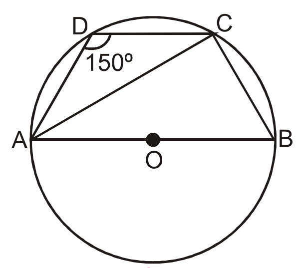
आकृति–74

2. दी गई आकृति में $\angle QRS$ तथा $\angle QTS$ ज्ञात कीजिए।



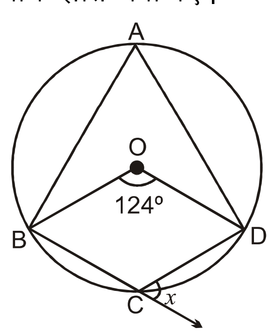
आकृति–75

3. दी गई आकृति में $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसकी भुजा AB वृत्त का व्यास है। यदि $\angle ADC = 150^o$ हो तो $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।



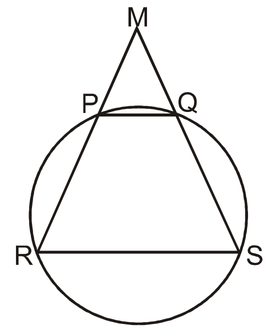
आकृति–76

4. दी गई आकृति में x का मान ज्ञात कीजिए।



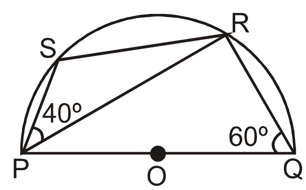
आकृति–77

5. एक वृत्त की दो समांतर जीवाएँ PQ और RS हैं तथा रेखाएँ RP और SQ , बिंदु M पर प्रतिच्छेद करती हैं(देखिए आकृति–78)।
सिद्ध कीजिए कि $MP = MQ$



आकृति–78

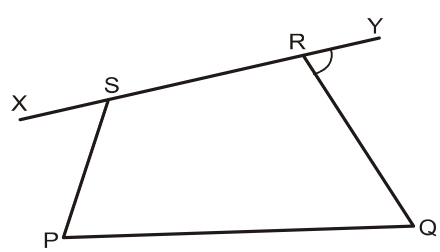
6. दी गई आकृति में PQ अर्द्धवृत्त का व्यास है। यदि $\angle PQR = 60^o$ तथा $\angle SPR = 40^o$ हो तो $\angle QPR$ और $\angle PRS$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति–79

7. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज के विकर्ण वृत्त के व्यास हों तो सिद्ध कीजिए कि वह एक आयत होगा।

8. आकृति–80 में PQRS एक चतुर्भुज है। यदि $\angle P = \angle QRY$ है तो सिद्ध कीजिए कि PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है।



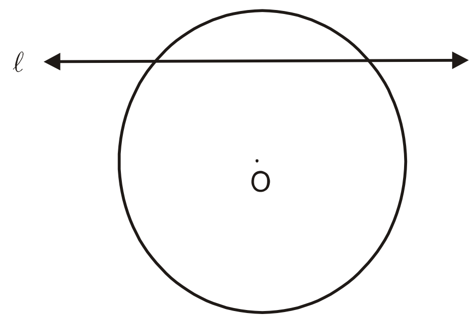
आकृति–80

9. यदि एक समलंब चतुर्भुज की असमान्तर भुजाएँ बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वह चक्रीय चतुर्भुज होगा।

FE46VI

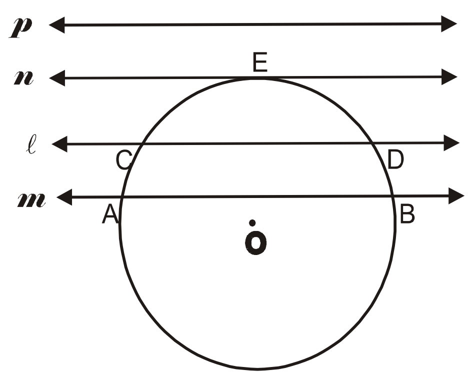
वृत्त की स्पर्श रेखाएँ और छेदक रेखाएँ

कागज पर किसी भी त्रिज्या का वृत्त तथा एक रेखा l लें जैसे आकृति–81 में दिखाया गया है। अब रेखा l के समान्तर कुछ रेखाएँ खींचिए।



आकृति–81

दी गई आकृति–82 में रेखा m और वृत्त में दो उभयनिष्ठ बिंदु A, B हैं । इसी प्रकार रेखा l और वृत्त में दो उभयनिष्ठ बिंदु C, D हैं। रेखा n और वृत्त में केवल एक ही उभयनिष्ठ बिंदु E है तथा रेखा p और वृत्त में कोई उभयनिष्ठ बिंदु नहीं है।

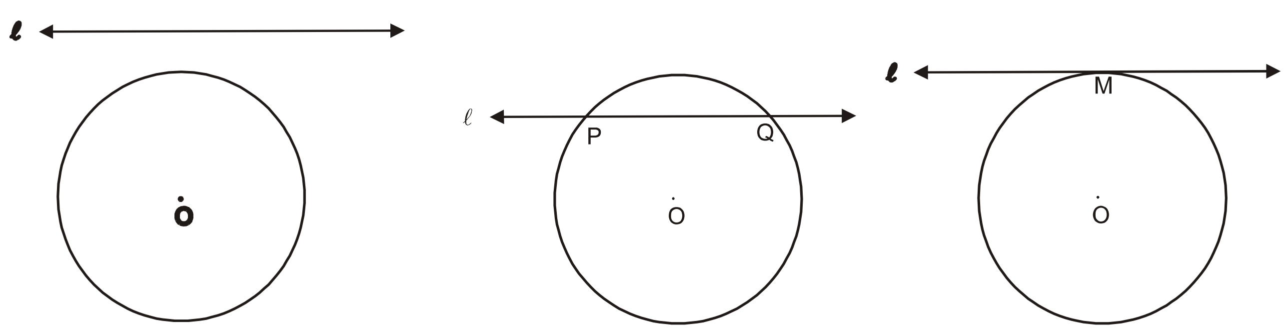


आकृति–82

हम देखते हैं कि कोई रेखा किसी वृत्त के सापेक्ष निम्न तीन स्थितियों में हो सकती है।

आकृति–83 (i) में रेखा l वृत्त को प्रतिच्छेद नहीं करती अर्थात् रेखा l व वृत्त का कोई भी उभयनिष्ठ बिंदु नहीं है।

आकृति–83 (ii) में रेखा l वृत्त को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है अर्थात् रेखा l और वृत्त में दो उभयनिष्ठ बिंदु P और Q हैं। इस स्थिति में हम l को वृत्त की छेदक रेखा कहते हैं।



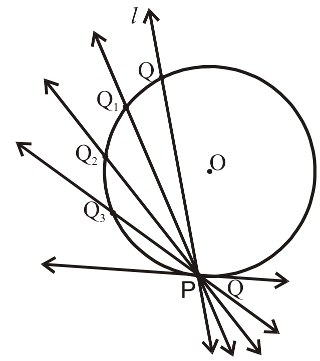
(i) (ii) (iii)

आकृति–83

आकृति–83 (iii) में रेखा l और वृत्त को एक बिंदु पर केवल स्पर्श करती है अर्थात् रेखा l और वृत्त में एक ही उभयनिष्ठ बिंदु M है। इसी स्थिति में हम रेखा l को वृत्त की स्पर्श रेखा तथा

उभयनिष्ठ बिंदु M को स्पर्श बिंदु कहते हैं।

आकृति–84 में रेखा l वृत्त को दो बिंदुओं P व Q पर प्रतिच्छेद कर रही है। रेखा l को बिंदु P पर स्थिर रखते हुए किसी आकृति–84 में रेखा l वृत्त को दो बिंदुओं P व Q पर प्रतिच्छेद कर रही है। रेखा l को बिंदु P पर स्थिर रखते हुए किसी भी एक दिशा में लगातार घुमाते जाने पर एक स्थिति ऐसी होगी कि प्रतिच्छेदी बिंदु, बिंदु P पर संपाती हो जाता है। इस स्थिति में छेदक रेखा को हम वृत्त की स्पर्श रेखा कहते हैं और बिंदु P को स्पर्श बिंदु।



आकृति–84

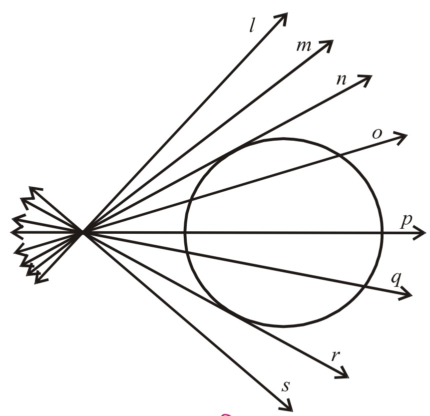
किसी वृत्त की स्पर्श रेखा, छेदक रेखा की एक विशिष्ट दशा है जब संगत जीवा के दोनों सिरे संपाती हो जाएँ। अर्थात किसी वृत्त की स्पर्श रेखा वह रेखा है जो वृत्त को एक बिंदु पर स्पर्श करती है।

सोचें व चर्चा करें

वृत्त पर स्थित किसी बिंदु पर एक ही स्पर्श रेखा खींची जा सकती है। क्यों?

करके देखें

नीचे दी गई आकृति में प्रतिच्छेदी रेखा, छेदक और स्पर्श रेखाओं को पहचान कर अपनी कापी में उनके नाम लिखें।



आकृति–85

स्पर्श रेखा तथा स्पर्श बिंदु से होकर जाती हुई त्रिज्या

एक बिंदु व एक रेखा के बीच की दूरी (जब बिंदु रेखा में न हो) न्यूनतम तब होती है जब वह लंबवत होती है। क्या स्पर्श बिंदु से केन्द्र की दूरी न्यूनतम होगी अर्थात् स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंब होगी?

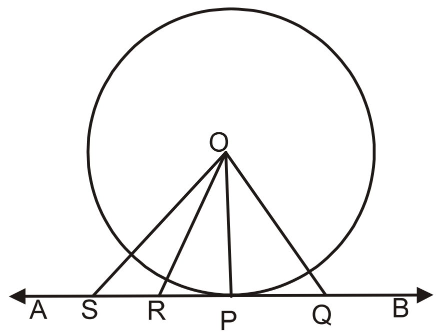
प्रमेय – 11

वृत्त की स्पर्श रेखा पर, स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या लंब होती है।

ज्ञात है – एक वृत्त का केन्द्र O है तथा स्पर्श रेखा AB स्पर्श बिंदु P पर वृत्त को स्पर्श करती है।

सिद्ध करना है – $OP \perp AB$

रचना – AB पर P के अतिरिक्त अन्य बिंदु Q, R, S लीजिए और केन्द्र O से मिलाइए।



आकृति–86

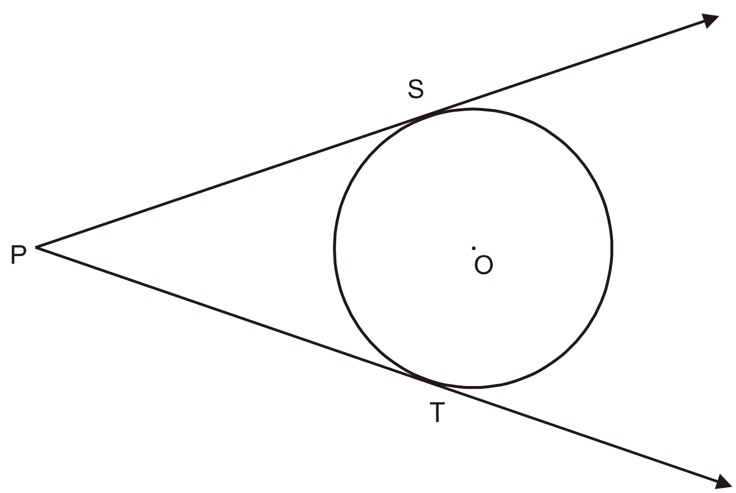
उपपत्ति – बिंदु Q, R, S वृत्त के बाहर स्थित हैं, वृत्त के बाह्य भाग में स्थित बिंदु की केन्द्र से दूरी त्रिज्या से बड़ी होती है। अतः OP की लंबाई OQ, OR, OS में प्रत्येक से छोटी होगी। अतः दूरी OP, बिंदु O से AB के अन्य बिंदुओं से न्यूनतम दूरी पर है।

$\therefore OP \perp AB$

हम इस तथ्य का उपयोग वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा खींचने में करते हैं जब हमें वृत्त का केन्द्र बिंदु ज्ञात हो।

वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु से कितनी स्पर्श रेखाएँ–

वृत्त के बाह्य भाग में एक बिंदु P लीजिए। वृत्त पर बिंदु P से स्पर्श रेखाएँ खींचने का प्रयत्न कीजिए (देखिए आकृति–87)। आप पाएँगे कि वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से वृत्त पर दो और केवल दो स्पर्श रेखाएँ खींच सकते हैं। बाह्य बिंदु P से वृत्त के स्पर्श बिंदु तक की दूरी को, स्पर्श रेखा की लंबाई कहते हैं। आकृति में क्या PS और PT में कोई संबंध है? PS और PT की लंबाइयाँ मापें।



आकृति–87

आप पाएँगे कि $PS = PT$ । आइए इस तथ्य की पुष्टि के लिए उपपत्ति देखते हैं।

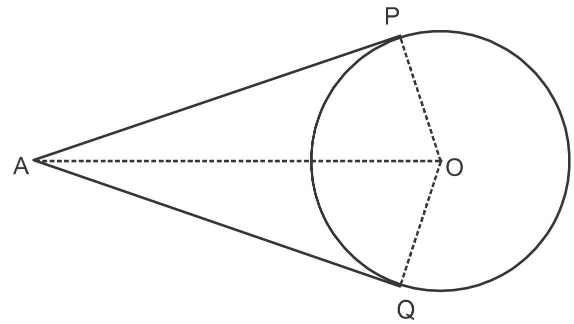
प्रमेय – 12

बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं।

ज्ञात है – AP और AQ बाह्य बिंदु A से वृत्त पर खींचे गए दो स्पर्श रेखाखण्ड हैं।

सिद्ध करना है – $AP = AQ$

रचना – वृत्त के केन्द्र O से A ,P, Q को मिलाइए।



आकृति–88

उपपत्ति – ΔOPA तथा ΔOQA में,

$OP = OQ$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OA = OA$ (उभयनिष्ठ भुजाएँ)

$\angle APO = \angle AQO = 90^\circ$ (स्पर्श बिंदु से जाती हुई त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लंब होती है।)

$\Delta OPA \cong \Delta OQA$ (समकोण–कर्ण–भुजा सर्वांगसमता)

अतः $AP = AQ$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

उपरोक्त प्रमेय की उपपत्ति में $\Delta OPA \cong \Delta OQA$ अतः $\angle OAP = \angle OAQ$ आप कह सकतें हैं कि वृत्त का केन्द्र $\angle PAQ$ के कोणार्द्धक पर स्थित है। इस तथ्य का उपयोग ऐसे वृत्त खींचने में किया जा सकता है जो दो प्रतिच्छेदी रेखाओं को स्पर्श करता है। विशेष रूप से एक ऐसा वृत्त भी खींचा जा सकता है जो त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करेगा। इस वृत्त को त्रिभुज का अंतःवृत्त और इसके केन्द्र को त्रिभुज का अंतःकेन्द्र कहा जाता है।

उदाहरणः–16. दी गई आकृति–89 में $OP = 13$ सेमी. तथा वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी. है। बिंदु P से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा PT तथा PS की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हलः– ΔOPT में,

$\angle OTP = 90^\circ$

समकोण ΔOPT में

$OP^2 = OT^2 + PT^2$

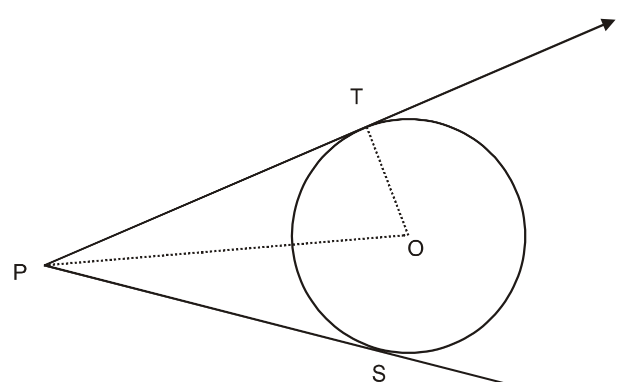
या $13^2 = 5^2 + PT^2$

या $PT^2 = 13^2 - 5^2$

$PT^2 = 169 - 25$

$PT^2 = 144$

$PT = 12$ सेमी.



आकृति–89

हम जानते हैं कि

$PS = PT$

अतः $PS = 12$ सेमी

अतः स्पर्श रेखा $PT = PS = 12$ सेमी.

उदाहरणः–17. दी गई आकृति–90 में O वृत्त का केन्द्र है तथा PA और PB वृत्त की स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं $\angle APB = 60°$ हो तो $\angle AOB$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः– चतुर्भुज AOPB में,

$\angle OAP = \angle OBP = 90°$

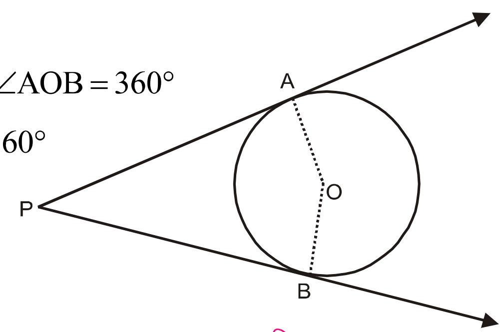
तथा $\angle OAP + \angle APB + \angle PBO + \angle AOB = 360°$

$90° + 60° + 90° + \angle AOB = 360°$

$240° + \angle AOB = 360°$

$\angle AOB = 360° - 240°$

$\angle AOB = 120°$



आकृति–90

उदाहरणः–18. दी गई आकृति–73 में P, Q तथा R एक वृत्त के बाह्य बिंदु हैं, जिसका केन्द्र O है। स्पर्श रेखा PA, QB तथा RC की लंबाइयाँ क्रमशः 3 सेमी,,4 सेमी, और 5 सेमी, हैं। ΔPQR का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हलः– वृत्त के बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाईयाँ बराबर होती हैं।

$\therefore$ $PC = PA = 3$ सेमी.

$QA = QB = 4$ सेमी.

$RB = RC = 5$ सेमी.

$PQ = PA + AQ$

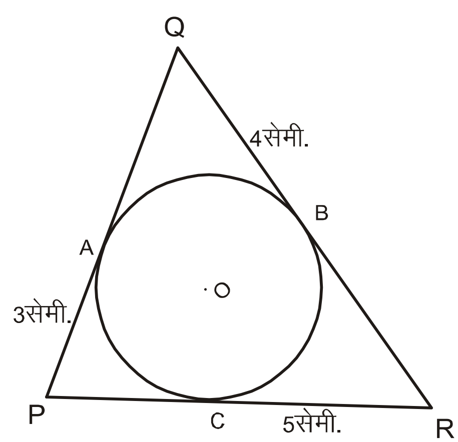
$PQ = 3 + 4 = 7$ सेमी.

$QR = QB + BR$

$QR = 4 + 5 = 9$ सेमी.

$PR = PC + CR$

$PR = 3 + 5 = 8$ सेमी.



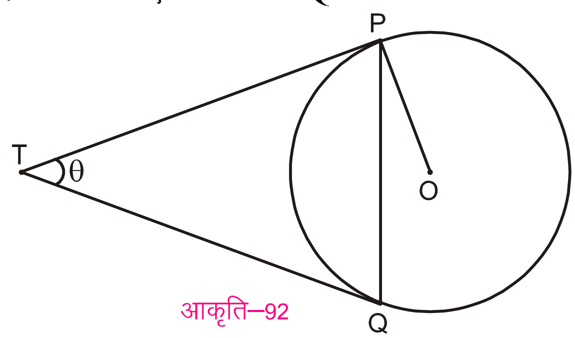
आकृति–91

अतः ΔPQR की परिमाप $= PQ + QR + PR$

$= 7 + 9 + 8$ सेमी.

$= 24$ सेमी.

उदाहरणः—19. केन्द्र O वाले वृत्त पर, एक बाह्य बिंदु T से दो स्पर्श रेखाएँ TP तथा TQ खींची गई हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ है।



आकृति—92

हलः— माना $\angle PTQ = \theta$

$TP = TQ$ (प्रमेय 12 से)

अतः ΔTPQ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें

$\angle TPQ + \angle TQP = 180^\circ - \theta$

$\therefore \quad \angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta)$

$\angle TPQ = 90^\circ - \frac{1}{2}\theta$

$\because \quad \angle OPT = 90^\circ$ है। (प्रमेय 11 से)

$\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ$

$= 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\theta\right)$

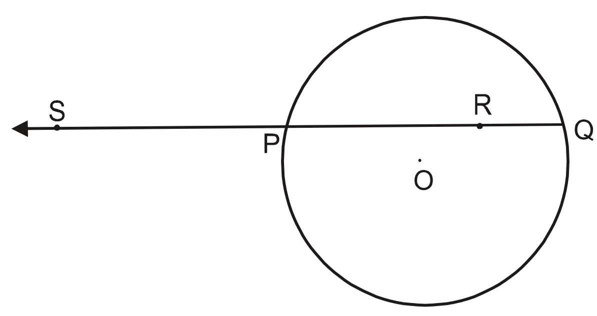
$= \frac{1}{2}\theta$

$= \frac{1}{2}\angle PTQ$

अतः $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ सिद्ध हुआ।

जीवा के खण्ड

PQ एक वृत्त की जीवा है और R वृत्त के अंदर PQ पर स्थित एक बिंदु है। तब यह कहा जाता है कि बिंदु R जीवा PQ को दो खण्डों PR और RQ में अंतः विभाजित करता है। इसी प्रकार यदि S वृत्त के बाहर रेखा PQ पर स्थित एक बिंदु हो तब यह कहा जाता है कि बिंदु S जीवा PQ को दो खण्डों SP और SQ में बाह्य विभाजित करता है।



आकृति—93

स्पर्श रेखा और छेदक रेखा के बीच संबंध

हमने वृत्त के बाह्य बिंदु से खींची गयी दो स्पर्श रेखाओं के बीच संबंध देखा है । क्या वृत्त के बाह्य बिंदु से खींची गयी छेदक रेखा तथा स्पर्श रेखा में कोई संबंध है?

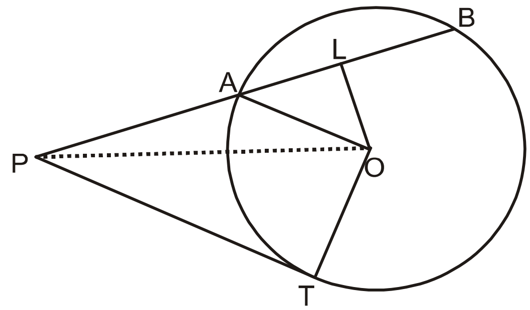
प्रमेय – 13

कथन – यदि PAB वृत्त की छेदक रेखा हो जो वृत्त को A और B पर प्रतिच्छेद करती है और PT एक स्पर्श रेखाखण्ड हो तो $PA \times PB = PT^2$

दिया है – वृत्त की छेदक रेखा PAB जो वृत्त को A और B पर प्रतिच्छेद करती है और PT पर स्पर्श रेखाखण्ड है।

सिद्ध करना है – $PA \times PB = PT^2$

रचना – AB पर लंब OL खींचिए। OP, OT और OA को मिलाइए।



आकृति–94

उपपत्ति –

$$PA \times PB = (PL - AL)(PL + LB)$$

$$= (PL - AL)(PL + AL)$$

(केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है)

$$= PL^2 - AL^2$$

$$= PL^2 - (OA^2 - OL^2) \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$$= PL^2 - OA^2 + OL^2$$

$$= PL^2 + OL^2 - OA^2 \qquad (\Delta OPL \text{ में पाइथागोरस प्रमेय से})$$

$$= OP^2 - OA^2$$

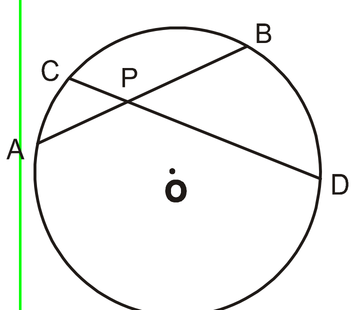
$$= OP^2 - OT^2 \qquad (OA = OT = \text{त्रिज्या})$$

$$= PT^2 \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

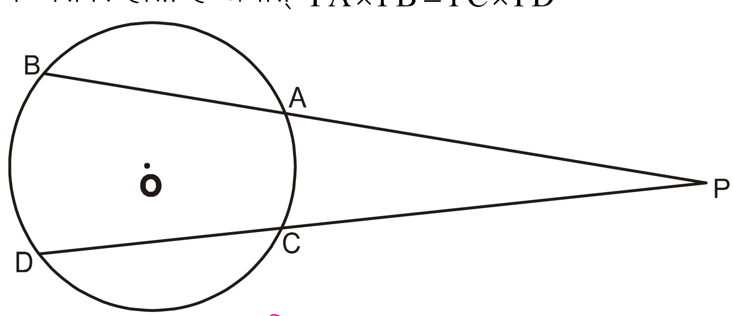
$$\therefore \quad PA \times PB = PT^2$$

करके देखें

यदि किसी वृत्त की जीवाएँ एक दूसरे को वृत्त के अंतर्गत या बहिर्गत प्रतिच्छेद करती हैं तो किसी एक जीवा के खण्डों से बनने वाले आयत का क्षेत्रफल दूसरी जीवा के खण्डों से बनने वाले आयत के क्षेत्रफल के बराबर होता है अर्थात् $PA \times PB = PC \times PD$



आकृति–95



आकृति–96

उदाहरणः–20. AB तथा CD वृत्त की दो जीवाएँ है, जो बिंदु P पर वृत्त को अंतःभाग में काटती हैं। यदि PA = 2 सेमी., PB = 3 सेमी., तथा PC = 4 सेमी., है ती PD की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हलः– दिया है,

PA = 2 सेमी., PB = 3 सेमी., तथा PC = 4 सेमी.,

माना PD = x सेमी.

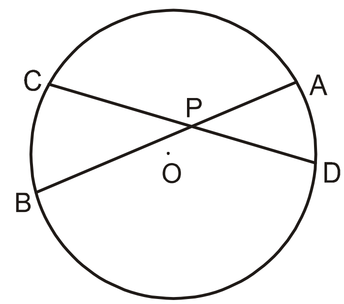
हम जानते हैं कि $PA \times PB = PC \times PD$

$$2 \times 3 = 4 \times x$$

$$x = \frac{6}{4}$$

$x = 1.5$ सेमी.

PD = 1.5 सेमी.



आकृति–97

उदाहरणः–21. जीवाएँ PQ तथा RS वृत्त के बाहर एक बिंदु M पर एक दूसरे को काटती हैं। यदि MQ = 3 सेमी. MP = 8 सेमी., तथा MS = 4 सेमी. है, तो MR और जीवा RS की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हलः– दिया गया है, MQ = 3 सेमी. MP = 8 सेमी., तथा MS = 4 सेमी.

माना MR = x सेमी.

हम जानते हैं कि $MQ \times MP = MS \times MR$

$$3 \times 8 = 4 \times MR$$

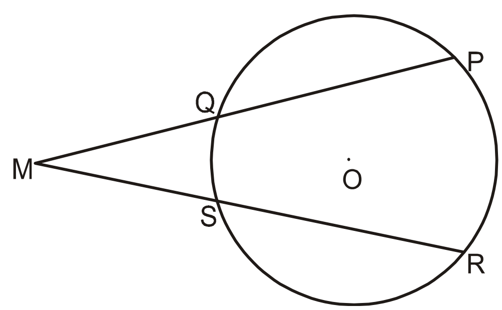
$$MR = \frac{24}{4}$$

MR = 6 सेमी

जीवा RS = MR - MS

= 6 - 4

जीवा = 2 सेमी.



आकृति–98

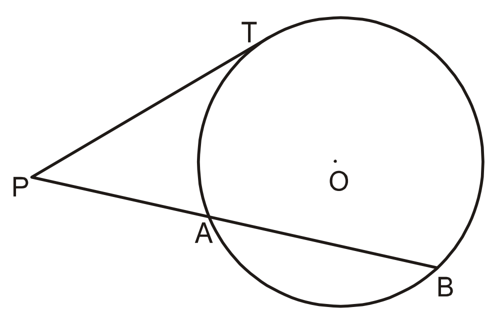
उदाहरणः–22. दी गई आकृति–99 में PA = 4 सेमी. तथा PB = 9 सेमी. तो PT की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हलः– हम जानते हैं कि $PA \times PB = PT^2$

$$4 \times 9 = PT^2$$

$$PT^2 = 36$$

PT = 6 सेमी.



आकृति–99

एक स्पर्श रेखा तथा जीवा द्वारा बनाए गए कोण

माना एक वृत्त का केन्द्र O है तथा AB इस वृत्त के बिंदु P पर स्पर्श रेखा है। बिंदु P से वृत्त की जीवा PQ खींचिए । दीर्घ चाप PQ में एक बिंदु R लीजिए।

दीर्घ चाप PRQ, जीवा PQ द्वारा बनाया गया वृत्तखंड का एकांतर वृत्तखंड कहलाता है।

आकृति–100 में, $\angle QPB = x°$ हो तो $\angle OPQ = 90° - x°$ (क्यों ?)

$\angle OPQ = \angle OQP = 90° - x°$ ($\because$ OP = OQ = त्रिज्या)

ΔPOQ में

$\angle POQ = 180° - [(90° - x°) + (90° - x°)]$

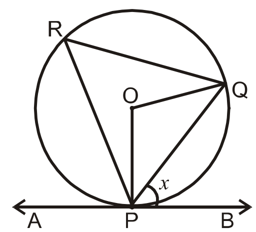
$= 180° - [180° - 2x°]$

$= 2x°$

$\angle PRQ = \frac{1}{2} \angle POQ$

$= \frac{1}{2} \times 2x°$

$= x°$



आकृति–100

अतः हम कह सकते हैं कि ''किसी जीवा द्वारा, दी गई स्पर्श रेखा के साथ उनके स्पर्श बिंदु पर बना कोण, उस जीवा द्वारा एकान्तर वृत्तखण्ड में बने कोण के बराबर होता है।''

यह भी एक प्रमेय है जिसका उपयोग वृत्त की स्पर्श रेखा खींचने में करते हैं जब वृत्त के केन्द्र का पता न हो।

उदाहरणः–23. दी गई आकृति–101 में PQ वृत्त की स्पर्श रेखा है यदि AOB वृत्त का व्यास है तथा $\angle SAB = 50°$ है तो $\angle ASP$ ज्ञात कीजिए।

हलः– $\angle BSQ = \angle SAB = 50°$

(एकान्तर वृत्तखण्ड के परिणाम द्वारा)

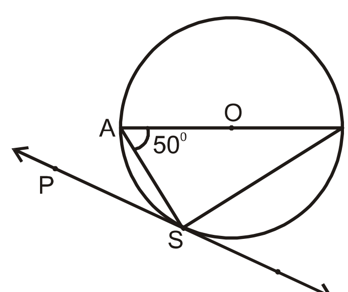
$\angle ASB = 90°$

(व्यास द्वारा बना कोण)

$\angle ABS + \angle ASB + \angle BAS = 180°$

$\angle ABS + 90° + 50° = 180°$

$\angle ABS = 40°$



आकृति–101

$\because$ $\angle ASP = \angle ABS$ (एकान्तर वृत्तखण्ड के परिणाम द्वारा)

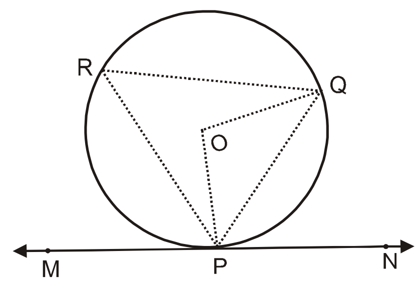
$\therefore$ $\angle ASP = 40°$

उदाहरणः–24. स्पर्श रेखा MN वृत्त को बिंदु P पर स्पर्श करती है। PQ जीवा इस प्रकार है कि $\angle QPN = 52°$ तब $\angle POQ$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ O वृत्त का केन्द्र है।

हलः– बिंदु R वृत्त की परिधि पर एक बिंदु है केन्द्र O को P और Q से मिलाए। इसी प्रकार R को P तथा Q से।

$\angle QPN = \angle PRQ = 52°$ (चूँकि किसी जीवा द्वारा, दी गई स्पर्श रेखा के साथ उनके स्पर्श बिंदु पर बना कोण, उस जीवा द्वारा एकान्तर वृत्तखण्ड में बने कोण के बराबर होता है।)

$\angle POQ = 2\angle PRQ$ (केन्द्र पर बना कोण वृत्त के परिधि के शेष भाग में बने कोण का दुगुना होता है।)



आकृति–102

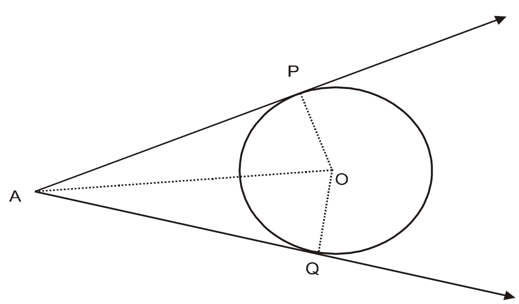
$\angle POQ = 2 \times 52°$

$\angle POQ = 104°$

प्रश्नावली 5

1. एक बिंदु P से जो वृत्त के केन्द्र से 10 सेमी. दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 8 सेमी. है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

2. दी गई आकृति–103 में $\angle POQ = 100°$, AP तथा AQ वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। $\angle PAO$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति–103

3. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।

4. एक वृत्त एक चतुर्भुज ABCD के चारों भुजाओं को स्पर्श करती है। सिद्ध कीजिए कि

   $AB + CD = BC + DA$

5. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिंदु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण का संपूरक होता है।

6. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के दो समांतर स्पर्श रेखाओं के बीच खींची गई एक अन्य स्पर्श रेखा का अंतःखण्ड, केन्द्र पर समकोण अंतरित करता है।

हमने सीखा

1. उन सभी बिंदुओं का समूह जो तल मे एक नियत बिंदु से समान दूरी पर स्थित हो तथा एक बंद आकृति बनाता हो वृत्त कहलाता है।
2. एक वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती है।
3. एक वृत्त की जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हों तो वे जीवाएँ बराबर होती है।
4. वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।
5. एक वृत्त के केन्द्र से एक जीवा को समद्विभाजित करने के लिए खींची गई रेखा जीवा पर लंब होती है।
6. तीन अंसरेख बिंदुओं से होकर एक और केवल एक वृत्त खींचा जा सकता है।
7. एक वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर होती हैं।
8. वृत्त के किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण, वृत्त के परिधि के शेष भाग के किसी बिंदु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।
9. वृत्त के परिधि के किसी बिंदु पर व्यास द्वारा अंतरित कोण समकोण होता है।
10. वृत्त के एक ही खण्ड में बने कोण आपस में बराबर होते हैं।
11. चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी एक युग्म का योग 180° होता है।

12. यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी एक युग्म का योग 180° हो तो वह चतुर्भुज चक्रीय चतुर्भुज होता है।

13. स्पर्श बिंदु से खींची गई त्रिज्या वृत्त की स्पर्श रेखा पर लंब होती है।

14. बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती है।

15. किसी जीवा द्वारा, दी गई स्पर्श रेखा के साथ उनके स्पर्श बिंदु पर बना कोण, उस जीवा द्वारा एकान्तर वृत्तखण्ड में बने कोण के बराबर होता है।

उत्तरमाला 1

1. (i) 10 सेमी. (ii) 24सेमी.

2. (i) 5 सेमी. (ii) 25 सेमी.

3. 8 सेमी.

4. 15 सेमी.

उत्तरमाला 2

2. 26 सेमी.

4. 24 सेमी.

उत्तरमाला 3

1. 40^o

2. 80^o

3. 35^o

4. 25^o

5. 75^o

6. 120^o

7. 80^o

8. 10 सेमी.

उत्तरमाला 4

1. $\angle DCB = 100^o$, $\angle ABC = 80^o$, $\angle ADC = 100^o$

2. $\angle QRS = 104^o$, $\angle QTS = 104^o$

3. $\angle BAC = 60^o$

4. 62^o

6. $\angle QPR = 30^o$, $\angle PRS = 20^o$

उत्तरमाला 5

1. 6 सेमी.

2. 40^o