अध्याय 15

ठोस आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन

[Surface Area and Volume of Solids]

FGG5BC

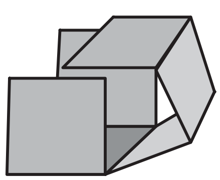
परिचय (Introduction)

हम त्रिविमीय संसार में रहते हैं। जिन त्रिविमीय आकृतियों को हम देख सकते हैं या स्पर्श कर सकते हैं उन आकृतियों की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई को मापा जा सकता है। कई बार हमें इन आकृतियों के अवयवों जैसे– आयतन, क्षेत्रफल आदि को मापने की आवश्यकता होती है। जैसे जमीन खरीदते–बेचते समय, मूर्ति बनाने में कितना सामान लगेगा पता करने में इत्यादि।

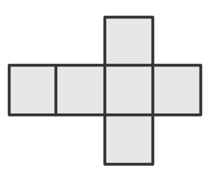
त्रिविमीय आकृतियों के क्षेत्रफल और आयतन पता करने के पहले, हम इन आकृतियों को खोलकर देखते हैं।

त्रिविमीय आकृति बनाने के लिए पृष्ठीय जाल

कमली और मांगी के पास पुट्ठे का एक घनाकार डिब्बा था। उन्होंने कैंची की सहायता से डिब्बे की कोर को काटा और फैलाकर रख दिया। इस खुली हुई आकृति के बारे में उन्होंने आपस में चर्चा की। कुछ समय बाद उन्होंने सेलो टेप (cello tape) की सहायता से इन खुले हुए भागों को जोड़कर डिब्बे को वापस बना लिया और बहुत खुश हुए। उन्होंने मांगी के पिता को डिब्बा दिखाया और अपने द्वारा किये गये कार्य की चर्चा की।



आकृति – 1

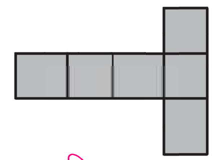


आकृति – 2

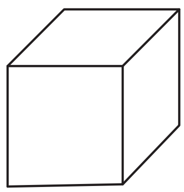
मांगी के पिता बहुत खुश थे परंतु उन्होंने पूछा कि क्या डिब्बा और अलग तरह से भी खोला जा सकता है? फिर उन्होंने डिब्बे को खोला और आकृति (3) प्राप्त किया। मांगी और कमली ने तुरंत ही उस आकृति को वापस रखने की कोशिश की।

कमली और मांगी से मांगी के पिता ने पुट्ठे को एक–एक घनाकार डिब्बों के किनारों को काटकर खुली आकृति बनाने के लिए कहा, दोनों ने नीचे दी गई आकृतियाँ बनाईं।

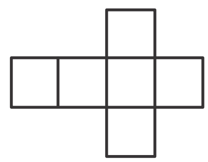
दोनों से मांगी के पिता ने इस गतिविधि के द्वारा आकृति बनाने के तरीकों पर चर्चा की यहाँ हमने पाया कि जब हम पुट्ठे के घनाकार डिब्बे की कोरों को काटते हैं और उसे फैला कर रखते हैं तो हमें दो



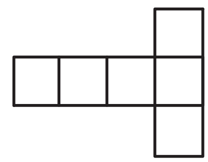
आकृति – 3



आकृति – 4



आकृति – 5



आकृति – 6

विभिन्न प्रकार की समतल आकृतियाँ प्राप्त हो सकती हैं। इन समतल आकृतियों को घन का पृष्ठीय जाल (Net) कहते हैं। किसी त्रिविमीय आकृति का पृष्ठीय जाल (Net) द्विविमीय आकृति होती है। आकृति–5 और आकृति–6 एक ही घन के दो पृष्ठीय जाल को प्रदर्शित करते हैं। क्या हम इसी घन के और अधिक पृष्ठीय जाल प्राप्त कर सकते हैं?

करके देखें

1. पुट्ठे के घनाकार डिब्बे लीजिए और उनकी कोरों को काटते हुए अलग–अलग ढंग से खोलिए। आप कितने प्रकार के विभिन्न खुली (समतल) आकृतियाँ पाते हैं?
2. घन का पृष्ठीय जाल (Net) बनाइए।

   हम पुट्ठे के घनाकार डिब्बे से ग्यारह भिन्न–भिन्न पृष्ठीय जाल प्राप्त कर सकते हैं। एक घनाभ का पृष्ठीय जाल कैसा होगा?
3. एक पुट्ठे से 4सेमी. भुजा वाला घनाकार डिब्बा तैयार कीजिए।
4. एक पुट्ठे का घनाभाकार डिब्बा तैयार कीजिए जिसकी भुजाएँ 12 सेमी., 6 सेमी. और 8 सेमी. है।

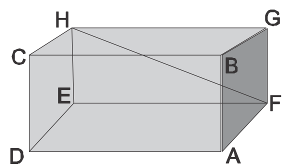
घन और घनाभ के भाग (Parts of a Cube and Cuboid)

(i) घन और घनाभ के पृष्ठ, कोर और शीर्ष (Face,Edge and Vertex)

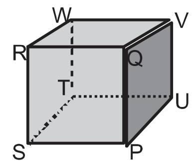
पिछली कक्षाओं में हम घन, घनाभ और बेलन के बारे में पढ़ चुके हैं । इस अध्याय में हम घन और घनाभ के भागों के बारे में जानेंगे।

पता लगाएँ (Explore)

दिए गए घन और घनाभ के चित्र को देखिए। यहाँ ABCDEFGH घनाभ और



आकृति – 7



आकृति – 8

PQRSTUVW घन है। घन और घनाभ का नामकरण शीर्षों के आधार पर होता है। क्या आप घन और घनाभ के पृष्ठ, कोर और शीर्षों को गिनकर उनके नाम बता सकते हैं?

घन या घनाभ के पृष्ठों व शीर्षों के बीच क्या संबंध है?

आकृति (7, 8) का अवलोकन करते हुए मित्रों से चर्चा करें और अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखें।

आपके अवलोकन के बिंदु निम्नलिखित हैं–

दिए गए घनाभ ABCDEFGH के कुछ अवलोकन एवं संबंध–

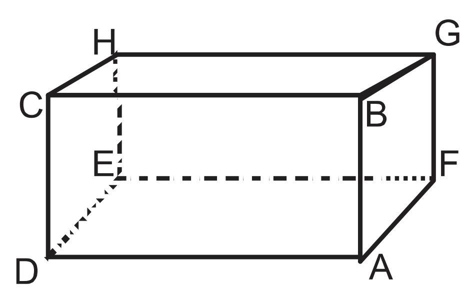
- घनाभ के 8 शीर्ष हैं, जो A,B,C,D,E,F,G और H हैं।
- घनाभ की 12 कोर हैं। घनाभ में सम्मुख कोर बराबर होते हैं। जैसे ऊपर दिए घनाभ (आकृति 7) में कोर AB व DC, EF व HG आदि सम्मुख कोर बराबर हैं।
- घनाभ के 6 पृष्ठ हैं, जो ABCD, EFGH, AFGB, DEHC, AFED और BGHC हैं।

ABCD और EFGH आपस में बराबर हैं। इसी प्रकार AFGB और DEHC, AFED और BGHC बराबर हैं।

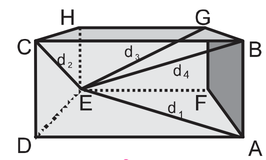
आकृति 7 व 8 का अवलोकन करें और बताएँ कि कौन–कौन सी कोरों की लंबाईयाँ और कौन –कौन से पृष्ठ आपस में बराबर हैं?

(ii) घन और घनाभ के विकर्ण (Diagonal of a Cube and Cuboid) :-

शिक्षक ने विद्यार्थियों से पूछा– चॉक के डिब्बे व कक्षा की आकृति कैसी है? सभी विद्यार्थियों ने उत्तर दिया कि घनाभ जैसी है तब शिक्षक ने पांच विद्यार्थियों को बुलाकर उन्हें चॉक के डिब्बे में पेंसिल रखने को कहा। विद्यार्थियों ने कहा कि पेंसिल किसी भी तल पर रखने पर डिब्बे में नहीं आती। ABCDEFGH चॉक का एक डिब्बा है। इस डिब्बे में पेंसिल को तल BGHC पर रखने पर हम देखते हैं कि पेंसिल डिब्बे के अन्दर नहीं समा पाती क्योंकि पेंसिल की लंबाई डिब्बे की लंबाई से अधिक है। तब क्या पेंसिल को डिब्बे के अन्दर रखा नहीं जा सकता ? लेकिन यदि पेंसिल को BGHC पर इस प्रकार रखें कि उसके सिरे BH या GC



की ओर हो तब एक संभावना बनती हैं कि शायद पेंसिल डिब्बे में समा जाए क्योंकि आप देखते हैं कि BGHC में BH या GC की लंबाई BG व BC से अधिक है। (एक चॉक का या अन्य कोई खाली डिब्बा ले कर देखें जो घनाभ के आकार का हो) यदि पेंसिल को ऐसा रखने के बाद भी वह डिब्बे में समा नहीं पाती तब क्या पेंसिल को रखने का कोई और तरीका हो सकता है जिससे पेंसिल के डिब्बे में समा सकने की संभावना हो?



आकृति – 9

अब यदि पेंसिल को इस प्रकार रखें कि उसके सिरे DG या AH या FC या EB की ओर रहे तब हम देखते हैं कि पेंसिल के डिब्बे में समा जाने की संभावना और भी बढ़ जाती है। यानी यह दूरी डिब्बे के अन्दर की सबसे लंबी दूरी होती है। यह दूरी चॉक के डिब्बे (घनाभ) का आकाशीय विकर्ण है। यानी AH,DG,FC,EB घनाभ ABCDEFGH के आकाशीय विकर्ण हैं। इन्हें हम घनाभ का विकर्ण कहते हैं। घनाभ ABCDEFGH में उसके तल के विपरीत कोनों की दूरियाँ जैसे AE व DF,DH व EC इत्यादि घनाभ के पृष्ठीय विकर्ण हैं।

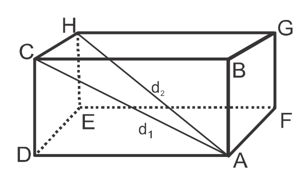
तब शिक्षक ने कक्षा के सभी विद्यार्थियों से कहा कि किसी घनाभाकार डिब्बे में धागे की सहायता से आकृति 9 में दर्शाई गई दूरियों $d_1, d_2, d_3,$ व d_4 को मापकर देखें कि उनमें कौन–सी दूरी सबसे अधिक है। इन दूरियों को हम क्या कहेंगे?

d_1, d_2 और d_3 को घनाभ का विकर्ण कहते हैं, परंतु d_4 क्या है? क्या हम इसे भी विकर्ण कह सकते हैं? यह भी एक विकर्ण है किन्तु बाकी से अलग। यह घनाभ के किसी भी तल पर स्थित नहीं है।

इस प्रकार $d_1, d_2, d_3,$ और d_4 विकर्ण हैं,जिसमें परंतु ये दो भिन्न प्रकार के हैं। d_1, d_2, d_3 किसी पृष्ठ पर बने विकर्ण हैं इसलिए इन्हें पृष्ठीय विकर्ण कहते हैं तथा d_4 पूरे घनाभ में हैं इसलिए इसे घनाभ का विकर्ण (diagonal of cuboid) या आकाशीय विकर्ण कहते हैं।

घनाभ का पृष्ठीय और आकाशीय विकर्ण (face and space diagonal)

यदि हम पुट्ठे की डिब्बे को देखेंगे तो पाएँगे कि विकर्ण दो प्रकार के हैं एक डिब्बे के पृष्ठ पर तथा दूसरा पूरे घनाभ में है जो विकर्ण डिब्बे के पृष्ठ पर बनते हैं, वे पृष्ठीय विकर्ण कहलाते हैं और जो विकर्ण पूरे डिब्बे (अर्थात त्रिविमीय आकृति) में बनते हैं, वे घनाभ के विकर्ण कहलाते हैं।



आकृति – 10

ज्यामिति में घन या घनाभ का पृष्ठीय विकर्ण एक ही पृष्ठ के शीर्षों को तथा घनाभ का विकर्ण अलग–अलग पृष्ठों को मिलाने वाला रेखाखंड होता है। दिए गए घनाभ (आकृति–10) में AH घनाभ का विकर्ण तथा AC पृष्ठीय विकर्ण है।

हम घन या घनाभ के कुल 16 विकर्ण प्राप्त कर सकते हैं जिसमे 12 पृष्ठीय विकर्ण तथा 4 घन और घनाभ के विकर्ण हैं।

करके देखें

1. अपनी कॉपी पर एक घन और घनाभ बनाइए और इनके विकर्णों के नाम लिखिए। घन और घनाभ के पृष्ठीय तथा घन और घनाभ के विकर्णों की संख्या गिनकर अलग–अलग लिखिए।

घन एवं घनाभ के विकर्णों की लंबाई पता करना
(Finding out the Diagonal of cube and cuboid)

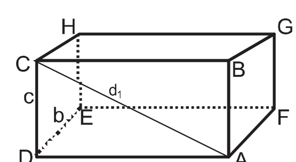
घनाभ (Cuboid)

किसी कमरे में कमरे की लंबाई ,चौड़ाई और ऊँचाई से भी अधिक लंबाई के बाँस को रखना है। यदि हमें कमरे की लंबाई,चौड़ाई,ऊँचाई और बाँस की लंबाई पता हो तब यह कैसे जान पाएँगे कि वह बाँस कमरे में रखा जा सकेगा या नहीं ? या हम यह कैसे बताएँ कि अधिकतम कितनी लंबाई का बाँस कमरे के भीतर रखा जा सकेगा? यानी किसी घनाभ के आकार के डिब्बों में अधिकतम कितनी लंबाई की छड़ी,पेंसिल या लकड़ी का टुकड़ा रखा जा सकता है यह पता करने के लिए हमें घनाभ की लंबाई ,चौड़ाई,ऊँचाई और उसके आकाशीय विकर्ण में संबंध को जानना होगा। हम घन और घनाभ के पृष्ठीय विकर्ण तथा घन या घनाभ के विकर्णों के बारे में जान चुके हैं ।अब हम यह जानेंगे कि यदि घनाभ की भुजाएँ दी गई हों तो उनके पृष्ठीय विकर्ण तथा घनाभ के विकर्णों की लंबाई की गणना कैसे करें?

पृष्ठीय विकर्ण (Face diagonal)

पृष्ठीय विकर्ण की लंबाई कैसे ज्ञात करेंगे?

हम जानते हैं कि ΔADC एक समकोण त्रिभुज है जहाँ $AD = a$ इकाई और $DC = c$ इकाई



आकृति – 11

है इसलिए बोधायन–पाइथागोरस प्रमेय से हम पाते हैं कि

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2}$$

$$d_1 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

अतः पृष्ठीय विकर्ण (AC) की लंबाई $= \sqrt{a^2 + c^2}$ इकाई

इसी प्रकार हम पृष्ठीय विकर्ण AE और AG ज्ञात कर सकते हैं।

$$AE = d_2 = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ इकाई}$$

$$AG = d_3 = \sqrt{b^2 + c^2} \text{ इकाई}$$

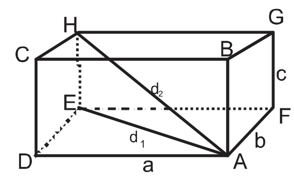
अतः ऐसे घनाभ जिसकी तीनों भुजाएँ अलग–अलग लंबाई की हैं में 3 अलग–अलग लंबाई के पृष्ठ विकर्ण होते हैं।

घनाभ का विकर्ण

दिए गए घनाभ (आकृति 11) की भुजाएँ a इकाई, b इकाई और c इकाई हैं। AH घनाभ का एक विकर्ण है। हम घनाभ के विकर्ण AH की लंबाई की गणना कैसे करेंगे?

आकृति 11 में AE एक पृष्ठीय विकर्ण है और इसकी लंबाई $\sqrt{a^2+b^2}$ इकाई होगी।

ΔAEH एक समकोण त्रिभुज है।(आकृति 12) हम बोधायन–पाइथागोरस प्रमेय से घनाभ का विकर्ण AH की लंबाई ज्ञात कर सकते हैं।



आकृति – 12

$$AH = \sqrt{AE^2 + EH^2}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)+c^2}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

इसलिए घनाभ के विकर्ण (AH) की लंबाई

$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ इकाई

अतः घनाभ के आकाशीय विकर्ण की लंबाई = $\sqrt{(\text{लंबाई})^2+(\text{चौड़ाई})^2+(\text{ऊँचाई})^2}$ इकाई

क्या अन्य 3 आकाशीय विकर्ण की लंबाई भी इतनी ही है? यह विकर्ण पहचानें।

विकर्ण हैं.......,.........,........

बोधायन–पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करके पता करें।

घन (Cube) -

यदि घन की भुजा a इकाई हो तो घन के पृष्ठीय विकर्ण की लंबाई $=\sqrt{a^2+a^2}$

$=\sqrt{2a^2}$

$=a\sqrt{2}$ इकाई

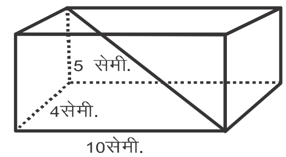
घन के सभी पृष्ठीय विकर्ण एक ही लंबाई के हैं।

घन का आकाशीय विकर्ण $=\sqrt{a^2+a^2+a^2}$

$= \sqrt{3a^2}$

$=a\sqrt{3}$ इकाई

उदाहरणः—1. एक घनाभ की लंबाई 10 सेमी., चौड़ाई 4 सेमी. तथा ऊँचाई 5 सेमी. है तो आकाशीय विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए?



आकृति – 13

हलः— घनाभ की लंबाई, चौड़ाई व ऊँचाई दी गई है। हमें घनाभ के आकाशीय विकर्ण की लंबाई ज्ञात करनी है।

हम जानते हैं कि

घनाभ का विकर्ण = $\sqrt{(\text{लंबाई})^2 + (\text{चौड़ाई})^2 + (\text{ऊँचाई})^2}$

$= \sqrt{(10)^2 + (4)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{100 + 16 + 25}$

$= \sqrt{141}$

$= 11.87$ सेमी.

अतः घनाभ के विकर्ण की लंबाई 11.87 सेमी. होगी।

उदाहरणः—2.

6 सेमी. भुजा वाले घन के पृष्ठीय विकर्ण व घन के आकाशीय विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए?

हलः— घन की भुजा 6 सेमी. दी गई है। हमें पृष्ठीय व घन के आकाशीय विकर्ण की लंबाई ज्ञात करनी है।

हम जानते हैं कि घन का पृष्ठीय विकर्ण $= a\sqrt{2}$ इकाई, जहाँ a घन की भुजा है।

अतः घन का पृष्ठीय विकर्ण $= 6\sqrt{2}$ सेमी.

चूँकि घन का विकर्ण $= a\sqrt{3}$ इकाई

अतः घन का विकर्ण $= 6\sqrt{3}$ सेमी.

प्रश्नावली—1

1. एक घनाभ 8 मी. लंबा, 4 मी. चौड़ा और 2 मी. ऊँचा है। घनाभ के सभी विकर्णों की लंबाई ज्ञात कीजिए?
2. एक घन के पृष्ठीय विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा $12\sqrt{3}$ से. मी. है। उसका आकाशीय विकर्ण कितना होगा?
3. उस बड़े से बड़े खंभे की लंबाई ज्ञात कीजिए जो 10 मी. लंबा, 10 मी. चौड़ा और 5 मी. ऊँचे कमरे में रखा जा सकता है?

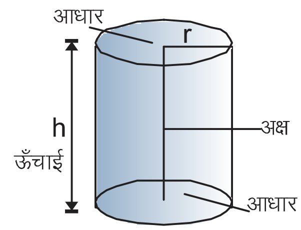
FGQ1CZ

बेलन (Cylinder)

बेलन एक त्रिविमीय आकृति है जिसमें दो सर्वांगसम एवं समांतर वृत्तीय पृष्ठ, एक वक्र पृष्ठ के द्वारा आपस में जुड़े होते हैं।

बेलन के उदाहरण – पाइप, ट्यूब लाइट इत्यादि।

वृत्तीय पृष्ठों के बीच की लंबवत दूरी को बेलन की ऊँचाई तथा वृत्तीय पृष्ठ को बेलन का आधार कहते हैं। वृत्तीय पृष्ठों (आधार) के केन्द्रों को मिलाने वाला रेखाखंड बेलन का अक्ष कहलाता है।



आकृति – 14

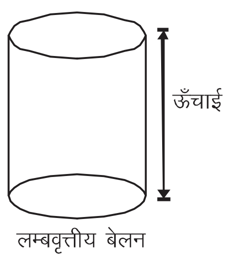
बेलन के प्रकार (Types of Cylinder)

लंबवृत्तीय और तिर्यक बेलन

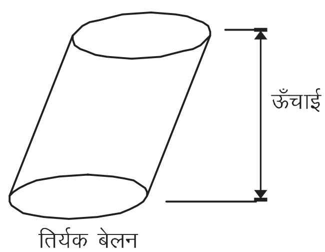
जब दो आधार ठीक एक दूसरे के ऊपर हों तथा अक्ष आधार के साथ समकोण बनाता हो तो उसे " लंब वृत्तीय बेलन " कहते हैं।(आकृति 15) यदि लंब वृत्तीय बेलन के एक आधार को थोड़ा सा खिसका दिया जाये जिससे अक्ष आधार के लंबवत न हो तो उसे तिर्यक बेलन (Oblique Cylinder) कहते हैं।(आकृति 16)

बेलन का पृष्ठीय जाल (Net of Cylinder)

एक ऐसा बेलन लें जिसके दोनों सिरे बंद हों। माना इस बेलन के आधार की त्रिज्या r



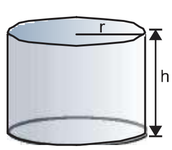
आकृति – 15



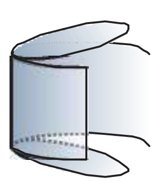
आकृति – 16

तथा ऊँचाई h इकाई है। जब हम बेलन (आकृति–17)की कोर को काटकर फैलाते हैं (आकृति 18, 19) तब हमें बेलन का पृष्ठीय जाल (net) प्राप्त होता है।

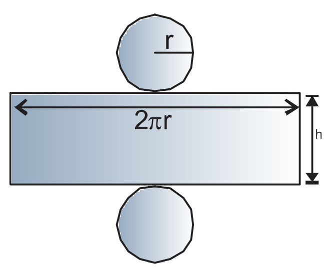
बेलन के पृष्ठीय जाल में, आयत की लंबाई (बेलन का वक्र तल) $2\pi r$ इकाई तथा चौड़ाई (बेलन की ऊँचाई) h इकाई और दोनों वृत्तीय सतहों की त्रिज्या r इकाई है।



आकृति – 17



आकृति – 18



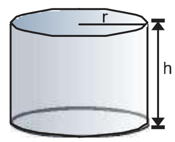
आकृति – 19

करके देखें

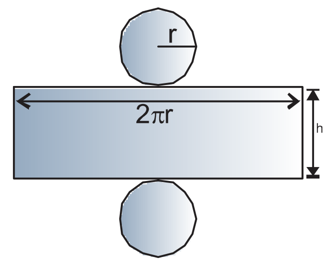
1. 7 सेमी. ऊँचाई तथा 2 सेमी. त्रिज्या के आधार वाले बेलन का पृष्ठीय जाल (net) बनाइए।
2. ड्राईंग पेपर का उपयोग करते हुए 7 सेमी. ऊँचाई तथा 2 सेमी. त्रिज्या वाले बेलन बनाइए।

लंब वृत्तीय बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल (Surface area of right circular cylinder)

यहाँ r त्रिज्या तथा h ऊँचाई के बेलन का पृष्ठीय जाल (Net) आकृति 20(ii) के समान दिखेगा। इस संदर्भ में आयत की चौड़ाई बेलन की ऊँचाई h के बराबर तथा आयत की लंबाई वृत्त की परिधि $2\pi r$ के बराबर है।



आकृति – 20(i)



आकृति – 20(ii)

अतः बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

= $2\pi rh$ वर्ग इकाई

और बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल + दोनों आधारों का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

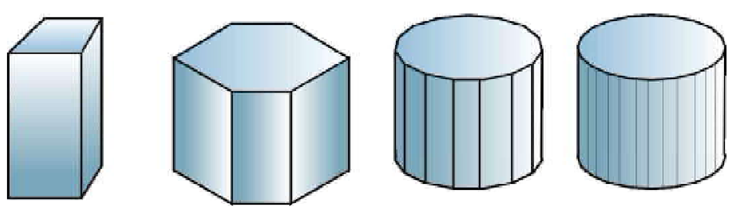
$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

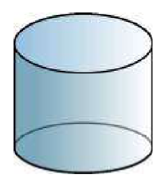
$= 2\pi r(h + r)$ वर्ग इकाई

जहाँ r बेलन के आधार की त्रिज्या तथा ऊँचाई h है।

लंब वृत्तीय बेलन का आयतन (Volume of a Right Circular Cylinder)

हम जानते हैं कि घनाभ का आयतन, घनाभ के आधार का क्षेत्रफल और उसकी ऊँचाई का गुणनफल होता है। नीचे दी गई आकृति–21 एक घनाभ है जिसके आधार में भुजाओं की संख्या के बढ़ने से आकृति –21 में क्रमिक परिवर्तन हो रहा है। आप देख सकते हैं कि यह धीरे–धीरे लंब वृत्तीय बेलन बनता जाता है। यह इसलिए कि आधार धीरे–धीरे वृत्त के और करीब जाता रहता है।जब इसके आधार की भुजाओं की संख्या असीमित हो जाती है तब यह आधार वृत्त बन जाता है और पूरी आकृति लंब वृत्तीय बेलन (आकृति–22) बन जाती है।


आकृति – 21


आकृति – 22

इसलिए हम कह सकते हैं कि बेलन के आयतन का सूत्र हम घनाभ से प्राप्त कर सकते हैं। बेलन का आयतन उसके आधार के क्षेत्रफल और उसकी ऊँचाई के गुणनफल के बराबर होता है।

माना बेलन के आधार की त्रिज्या r इकाई तथा ऊँचाई h इकाई हो तो

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$ घन इकाई

करके देखें

1. एक कागज की शीट लें। उसे लंबाई की तरफ से मोड़कर एक बेलन बनाएँ। प्राप्त बेलन का क्षेत्रफल एवं आयतन प्राप्त करें। अब इसी शीट को चौड़ाई की ओर से मोड़कर प्राप्त बेलन का आयतन एवं क्षेत्रफल प्राप्त करें। प्राप्त आयतन और क्षेत्रफल के बारे में आप क्या कह सकते हैं?
2. पाँच रुपए के कुछ सिक्के लें और अलग–अलग संख्या में सिक्कों को एक के ऊपर एक जमाएँ। इस तरह से प्राप्त आकृति का क्षेत्रफल एवं आयतन निकालें। क्षेत्रफल एवं आयतन प्राप्त करने के लिए आपने किन–किन तरीकों का उपयोग किया?

वक्रपृष्ठ व आयतन की गणना

अकसर आयतन मापने के लिए बेलनाकार बर्तनों का उपयोग होता है। इसके अलावा यह पता करना होता है कि किसी धातु की बेलनाकार वस्तु को बनाने में कितनी धातु लगेगी अथवा किसी बेलनाकार डिब्बे पर रंग करने में कितना रंग खर्च होगा अथवा कितना कागज इसे पूरी तरह लपेट लेगा? इस सबके लिए हमें बेलन के वक्रपृष्ठ व आयतन की गणना करनी होगी। आइए,देखें यह गणना कैसे करते हैं।

उदाहरणः–3. एक लंबवृत्तीय बेलन के आधार की परिधि 44 सेमी. है, यदि बेलन की ऊँचाई 10 सेमी. है तो बेलन का वक्रपृष्ठ और आयतन ज्ञात कीजिए।

हलः– मान लीजिए कि बेलन के आधार की त्रिज्या r सेमी. और ऊँचाई h सेमी. है।

दिया है बेलन की ऊँचाई h = 10 सेमी.

बेलन के आधार की परिधि $2\pi r$ = 44 सेमी.

$$r = \frac{44}{2\pi}$$

$$r = \frac{44}{2} \times \frac{7}{22}$$

$$r = 7 \quad \text{सेमी.}$$

बेलन का वक्रपृष्ठ $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 10$$

बेलन का वक्रपृष्ठ = 440 वर्ग सेमी.

बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 10$$

बेलन का आयतन = 1540 घन सेमी.

उदाहरणः—4. दो बराबर ऊँचाई वाले लंबवृत्तीय बेलनों के आधार की त्रिज्या 3 : 4 के अनुपात में हैं। इनके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए

हलः— मान लीजिए कि दोनों बेलनों की त्रिज्याएँ क्रमशः r_1 और r_2 तथा ऊँचाई h है।(क्यों) चूँकि बेलन के आधार की त्रिज्याएँ क्रमशः 3 : 4 के अनुपात में है

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{4}$$

या $r_1 = 3r, r_2 = 4r$ (क्यों ?)

अतः पहले बेलन का आयतन $= \pi {r_1}^2 h$

तथा दूसरे बेलन का आयतन $= \pi {r_2}^2 h$

$\therefore$ दोनों बेलनों का आयतन का अनुपात $\dfrac{\pi {r_1}^2 h}{\pi {r_2}^2 h} = \dfrac{{r_1}^2}{{r_2}^2}$

$$\frac{\pi {r_1}^2 h}{\pi {r_2}^2 h} = \frac{(3r)^2}{(4r)^2}$$

$$= \frac{9r^2}{16r^2}$$

$$= \frac{9}{16}$$

उदाहरणः—5. आयशा को विज्ञान प्रोजेक्ट के अंतर्गत बेलनाकार बहुरूपदर्शक (kaleido-scope) का वक्रपृष्ठ बनाने के लिए कितने क्षेत्रफल के चार्ट पेपर (Chart paper) की आवश्यकता होगी, यदि उसकी त्रिज्या 2.1 सेमी. और लंबाई 20 सेमी. हो।

हलः— दिया है

बेलनाकार बहुरूपदर्शक की त्रिज्या $r = 2.1$ सेमी.

बहुरूपदर्शक की लंबाई $h = 20$ सेमी.

आवश्यक चार्ट पेपर का क्षेत्रफल = बहुरूपदर्शक के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20$$

$$= 264 \text{ वर्ग सेमी.}$$

प्रश्नावली 2

1. एक बेलन के आधार की त्रिज्या 14 सेमी. और ऊँचाई 10 सेमी. है। बेलन के वक्रपृष्ठ तथा संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल 3696 वर्ग सेमी. है। यदि बेलन के आधार की त्रिज्या 14 सेमी. है तो बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
3. 14 सेमी. ऊँचाई वाले बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल 88 वर्ग सेमी. है। बेलन के आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।
4. एक बेलनाकार स्तंभ का व्यास 50 सेमी. और ऊँचाई 3.5 मी. है। बेलन के वक्रपृष्ठ की रंगाई का लागत मूल्य ज्ञात कीजिए यदि दर 12.50 रू. प्रति वर्ग मीटर है।
5. एक रोलर का व्यास 84 सेमी. और लंबाई 120 सेमी. है। पूरे मैदान को एक बार चलने में रोलर 500 चक्कर लगाता है तो मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 3 सेमी. और ऊँचाई 14 सेमी. है।
7. एक बेलन के आधार का क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी. और ऊँचाई 10 सेमी. है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

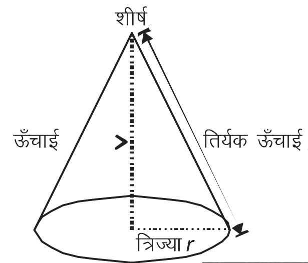
8 एक बेलन के आधार की परिधि 88 सेमी. और ऊँचाई 10 सेमी. है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

9. एक बेलन का आयतन 3080 घन सेमी. और ऊँचाई 20 सेमी. है। बेलन की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
10. एक 35 सेमी. ऊँचाई वाले जार (Vessel) में 11 लीटर जूस आता है। जार का व्यास ज्ञात कीजिए। (1 लीटर= 1000 घन सेमी.)
11. एक पतले बेलनाकार टीन में 1 लीटर पेंट आता है। यदि टीन का व्यास 14 सेमी. है तो टीन की ऊँचाई क्या होगी? (लीटर= 1000घन सेमी.)
12. एक अस्पताल में हर मरीज को प्रतिदिन 7 सेमी. व्यास वाले बेलनाकार बर्तन में सूप दिया जाता है। यदि बेलनाकार बर्तन में सूप 4 सेमी. की ऊँचाई तक भरा जाता हो तो अस्पताल में प्रतिदिन 50 मरीजों के लिए कितनी मात्रा में सूप बनाया जाता है?

13. एक तांबे के छड़ का व्यास 1 मी. और लंबाई 8 मी. है जिसे पिघलाकर 18 मीटर पतला तार खींचा गया है तार की मोटाई ज्ञात कीजिए।
14. 7 मी. व्यास का एक कुआँ 20 मी. गहरा खोदा गया और उससे निकली मिट्टी से 22 मी. $\times$14 मी. का एक प्लेटफार्म बनाया गया है। इस प्लेटफार्म की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
15. एक घनाभ जिसकी भुजाएँ 5.5 सेमी.,10सेमी. और 3.5 सेमी. है को पिघलाकर 1.75 सेमी. व्यास तथा 2 सेमी. मोटाई के कितने सिक्के बनाये जा सकते हैं?
16. बेलन का आयतन और वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल क्रमशः 24750 घन सेमी. और 3300 वर्ग सेमी. हैं। बेलन के आधार की त्रिज्या और उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

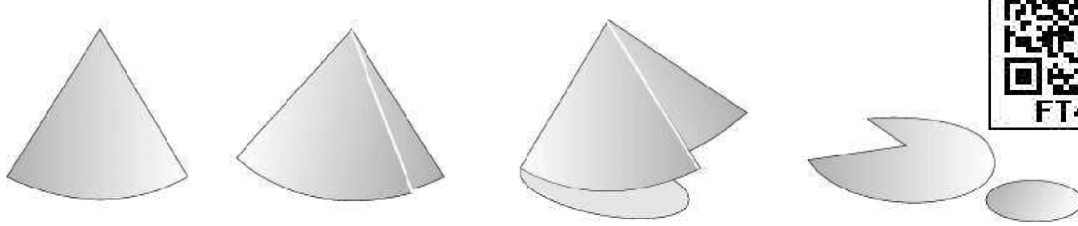
शंकु (cone)

शंकु एक ऐसी त्रिविमीय आकृति है, जिसमें एक वृत्तीय आधार और एक शीर्ष होता है। यह दो रेखाखण्डों से जुड़े हुए होते हैं। शीर्ष से आधार की परिधि को जोड़ने वाला रेखाखण्ड, शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) होता है। शंकु के शीर्ष से शंकु के आधार के केन्द्र को मिलाने वाला रेखाखण्ड, अगर शंकु के आधार पर लंब हो, तो उसे लंब वृत्तीय शंकु कहते हैं।



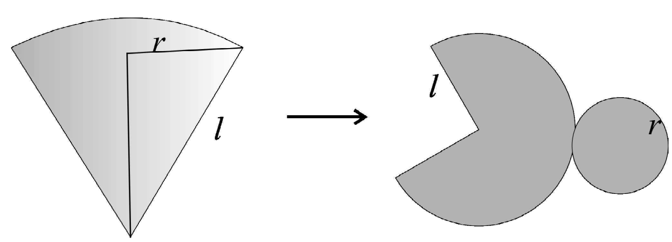
आकृति – 23

FT49TJ


आकृति – 24

1. शंकु का पृष्ठीय जाल

नीचे की शांकव की आकृतियों को देखिए। यदि हम शंकु को उसकी तिर्यक ऊँचाई एवं उसके आधार के किनारे से काटकर खोलें तो वह दी गई आकृतियों के समान दिखाई देगा।



आकृति – 25

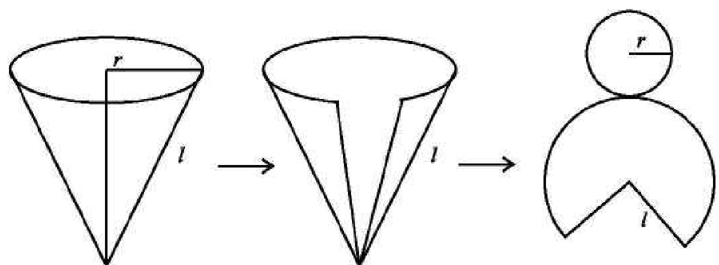
शंकु के पृष्ठीय जाल में l इकाई त्रिज्या वाले वृत्त के त्रिज्याखंड एवं r इकाई त्रिज्या वाला वृत्त सम्मिलित है।

2. शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल

यदि शंकु के आधार की त्रिज्या r इकाई तथा उसकी तिर्यक ऊँचाई l इकाई हो तो पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल तथा आधार का क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा।

हमने चर्चा की है कि यदि हम शंकु को काटकर खोलते है तो हमें वक्र पृष्ठ प्राप्त होते हैं।

शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल



आकृति – 26(i) आकृति – 26(ii) आकृति – 26(iii)

प्राप्त करना होगा।

शंकु के पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल $=$ l इकाई त्रिज्या वाले वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}(2\pi r)l$$

$= \pi rl$ वर्ग इकाई

शंकु के आधार का क्षेत्रफल $=$ r त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi r^2$ वर्ग इकाई

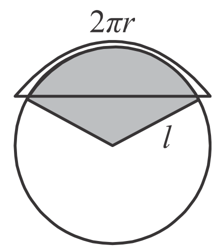
अतः शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ $=$ शंकु के पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल + शंकु के आधार का क्षेत्रफल

$$= \pi rl + \pi r^2$$

$$= \pi r(r+l)$$

अतः शंकु के संपूर्ण पृष्ठ जिसके आधार की त्रिज्या r इकाई एवं तिर्यक ऊँचाई l इकाई हो $\pi r(r+l)$ है।

नोट :–



ऊपर के शंकु का वृत्ताकार आधार की परिधि $2\pi r$ है। यह एक ऐसे वृत्त का त्रिज्याखंड है जिसकी त्रिज्या l है। हम जानते हैं कि छायांकित त्रिज्याखंड के क्षेत्रफल तथा वृत्त के क्षेत्रफल का अनुपात, त्रिज्याखंड के चाप की लंबाई तथा वृत्त की परिधि के अनुपात के बराबर होता है।

अर्थात

$$\frac{\text{वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल}}{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}} = \frac{\text{त्रिज्याखंड के चाप की लंबाई}}{\text{वृत्त की परिधि}}$$

$$\frac{\text{वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल}}{\pi l^2} = \frac{\text{त्रिज्याखंड के चाप की लंबाई}}{2\pi l}$$

$$\text{वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\text{त्रिज्याखंड के चाप की लंबाई} \times \pi l^2}{2\pi l}$$

$$\text{वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\text{त्रिज्याखंड के चाप की लंबाई} \times l}{2}$$

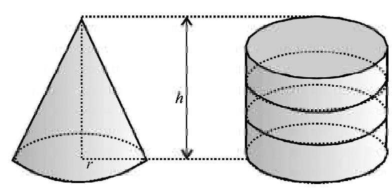
$$\text{वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल} = \frac{2\pi r \times l}{2}$$

$$\text{वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल} = \pi r l$$

जहाँ $2\pi r$ वृत्त के त्रिज्याखंड के चाप की लंबाई है तथा l वृत्त की त्रिज्या है।

3. शंकु का आयतन

शंकु एवं बेलन के आयतन के बीच संबंध को समझने के लिये आइए एक क्रियाकलाप करें। समान आधार एवं समान ऊँचाई वाला एक शंकु एवं एक बेलन बनाइए।

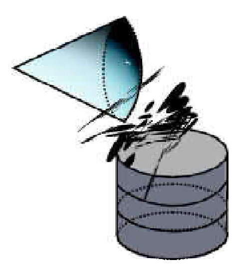


आकृति – 28

शंकु को बारीक रेत से भरिए और फिर उसी रेत को बेलन में डाल दीजिए। क्या बेलन रेत से भर गया?

बेलन को रेत से भरने के लिये आपको यह प्रक्रिया कितनी बार दोहरानी पड़ेगी?

बेलन को पूरा भरने के लिये हमें यह प्रक्रिया तीन बार दोहरानी पड़ती है । इस प्रकार शंकु व बेलन के आधार का क्षेत्रफल एवं ऊँचाई समान होने की स्थिति में बेलन का आयतन शंकु के आयतन का तीन गुना होता है।


आकृति – 29

अतः $3\times$शंकु का आयतन $=$बेलन का आयतन

$$\text{शंकु का आयतन} = \frac{1}{3}(\text{बेलन का आयतन}) = \frac{1}{3}(\text{आधार का क्षेत्रफल} \times \text{ऊँचाई})$$

क्योंकि बेलन का आयतन आधार (वृत्त) का क्षेत्रफल एवं ऊँचाई का गुणनफल होता है।

अतः शंकु का आयतन $=\frac{1}{3}\times A\times h$ जहाँ A आधार का क्षेत्रफल है और h बेलन की ऊँचाई है।

आधार का क्षेत्रफल $A=\pi r^2$

अतः शंकु का आयतन $=\frac{1}{3}\times\pi r^2 h$ घन इकाई

बेलन का आयतन जिसके आधार की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h हो $\pi r^2 h$ होती है। अतः शंकु का आयतन, बेलन के आयतन का एक तिहाई होता है जिनके आधार की त्रिज्याएँ एवं ऊँचाई समान होती हैं।

उदाहरणः–6. एक शंकु का व्यास 12 सेमी. और ऊँचाई 8 सेमी. है। शंकु का वक्रपृष्ठ और आयतन ज्ञात कीजिए।

हलः– माना शंकु की त्रिज्या r सेमी., ऊँचाई h सेमी. और तिर्यक ऊँचाई l सेमी. है।

दिया है शंकु की ऊँचाई h =8 सेमी.

शंकु का व्यास 2r =12 सेमी.

शंकु का त्रिज्या r =6 सेमी.

शंकु की तिर्यक ऊँचाई $l=\sqrt{h^2+r^2}$

$$=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}$$

$$=\sqrt{100}=10 \text{ सेमी.}$$

शंकु का वक्रपृष्ठ $=\pi rl$

$$=\pi\times 6\times 10=60\pi \text{ वर्ग सेमी.}$$

शंकु का आयतन $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$=\frac{1}{3}\times\pi\times 6\times 6\times 8$$

$$=96\pi \text{ घन सेमी.}$$

उदाहरणः–7. एक शंकु के आकार के तंबू में 65π वर्ग मीटर कपड़ा लगा है। तंबू की तिर्यक ऊँचाई 13 मीटर है तो उसकी ऊँचाई तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हलः– माना शंकु की त्रिज्या r मी., ऊँचाई h मी. और तिर्यक ऊँचाई l मी. है।

दिया है शंकु की तिर्यक ऊँचाई l = 13 मीटर

शंकु के आकार के तंबू में लगे कपड़े का क्षेत्रफल, शंकु के वक्रपृष्ठ के क्षेत्रफल के बराबर होगा (क्यों)

शंकु के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $=65\pi$

$$\pi rl = 65\pi$$

$$r = \frac{65\pi}{\pi l}$$

$$r = \frac{65}{13}$$

$$r = 5 \text{ मी.}$$

तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$$l^2 = h^2 + r^2$$

$$h^2 = l^2 - r^2$$

$$= (13)^2 - (5)^2$$

$$= 169 - 25$$

$$h^2 = 144$$

$$h = 12 \text{ मी.}$$

शंकु के आधार के तंबू की त्रिज्या 5 मी. और ऊँचाई 12 मी. है।

प्रश्नावली 3

1. एक लंब वृत्तीय शंकु के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी तिर्यक ऊँचाई 10 सेमी. तथा आधार की त्रिज्या 7 सेमी. हो।
2. यदि किसी शंकु के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल 77 π वर्ग सेमी. है तथा उसका आधार का व्यास 14 से. मी. हो तब उस शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
3. यदि शंकु की तिर्यक ऊँचाई 21 सेमी. तथा आधार का व्यास 14 सेमी. हो तो उसके संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. यदि एक जोकर की शंक्वाकार टोपी के आधार की त्रिज्या 7 सेमी. तथा ऊँचाई 24 सेमी. हो तो ऐसी 10 टोपी बनाने के लिए लगने वाली शीट का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. एक शंक्वाकार तंबू की ऊँचाई 5 मी. तथा आधार की त्रिज्या 12 मी. हो तो उसकी तिर्यक ऊँचाई तथा तंबू को बनाने में लगने वाले तिरपाल(केनवास) का लागत मूल्य ज्ञात कीजिये यदि उसका मूल्य 70 रू. प्रति वर्ग मीटर हो।
6. उस शंकु का आयतन ज्ञात कीजिये जिसके आधार का क्षेत्रफल 300 वर्ग सेमी. तथा ऊँचाई 15 सेमी. हो।
7. शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए यदि उसका आयतन 550 घन सेमी. तथा उसका व्यास 10 सेमी. हो।

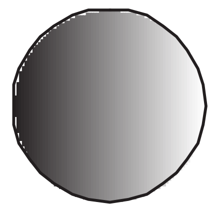
8. किसी शंक्वाकार कप के आधार की परिधि 22 सेमी. तथा ऊँचाई 6 सेमी. हो तो उसमें अधिकतम कितना पानी रखा जा सकता है।
9. यदि एक मीटर लंबी धातु की छड़ (जो बेलनाकार है) की त्रिज्या 3.5 सेमी. है, को पिघलाकर ऐसे कितने शंकु बनाये जा सकते हैं जिसकी त्रिज्या 1 सेमी. और ऊँचाई 2.1 सेमी. हो।
10. एक समकोण त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 21 सेमी., 28 सेमी. तथा 35 सेमी. है यदि उसे 28 सेमी. वाले भुजा को अक्ष मानकर घुमाया जाय तो बनने वाली आकृति का नाम तथा उसका आयतन ज्ञात कीजिये।
11. यदि एक शंकु व एक बेलन के आधार की त्रिज्या तथा ऊँचाई समान हो तो उनके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिये।

FTD5V7

गोला (Sphere)

एक वृत्त को व्यास के परितः घुमाने पर जो आकृति प्राप्त होती है उसे गोला कहते हैं।

गोला एक ऐसी ठोस आकृति है जिस पर स्थित हर बिंदु उसके केन्द्र से एक निश्चित दूरी पर स्थित होता है।

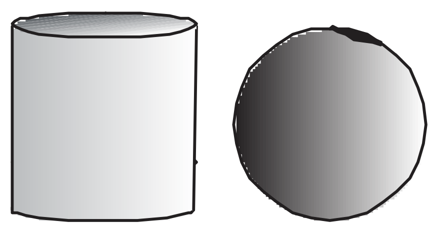


आकृति – 31

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

गतिविधिः–1

हमें पता है कि पृष्ठीय क्षेत्रफल किसी भी ठोस (वस्तु) आकृति के बाहरी आवरण को बताती है। हम बेलन और गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल की तुलना कर सकते हैं।



आकृति – 32

एक बेलन और गोला लें जिसमें कि बेलन के आधार की त्रिज्या और गोले की त्रिज्या समान हो और बेलन की ऊँचाई गोले की त्रिज्या की दुगुनी हो साथ ही एक रस्सी भी लें।

बेलन की आधी ऊँचाई पर चिह्न लगाइए और बेलन के तल अथवा शीर्ष से मध्य चिह्न तक रस्सी से बेलन को लपेटे। अब इस रस्सी को काटें और इसे गोले पर लपेटे।

आप पाएँगे कि इस रस्सी के द्वारा गोले का आधा भाग ढँक जाएगा।

अतः इस गतिविधि से हम यह कह सकते हैं कि बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल के समान है जब बेलन के आधार की त्रिज्या और गोले की त्रिज्या बराबर हो और बेलन की ऊँचाई गोले के व्यास के बराबर हो।

अतः हम कह सकते हैं कि,

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

$= 2\pi r h$

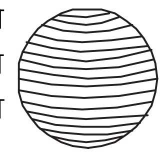
$= 2\pi r(2r)$

$= 4\pi r^2$ वर्ग इकाई

इसलिए गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$ वर्ग इकाई, जहां r गोले की त्रिज्या है।

गतिविधिः— 2

एक डोरी लीजिए और उसे गेंद पर पूरी तरह लपेट दीजिए (बीच में कोई भी जगह छूटने न पाए और न ही डोरी एक—दूसरे के ऊपर हो) आकृति 33 देखिए। अगर हम इस डोरी से वृत्त बनाएं जिसकी त्रिज्या गोले की त्रिज्या के बराबर हो, तो आप पाएँगे कि हम ऐसे 4 वृत्त बना पा रहें हैं (आकृति 34) जिसका क्षेत्रफल πr^2 होगा।



आकृति – 33

अतः गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\times$ वृत्त का क्षेत्रफल

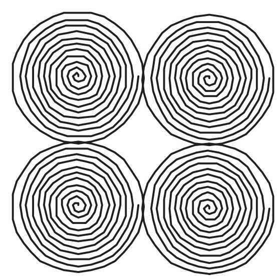
$= 4\pi r^2$

इसलिए गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$ वर्ग इकाई, जहाँ r गोले की त्रिज्या है।
तब एक अर्द्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल निम्नलिखित तरीके से प्राप्त किया जा सकता है ।

अर्द्धगोले के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\times$(गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल)

$= \frac{1}{2}(4\pi r^2)$

$= 2\pi r^2$



आकृति – 34

अर्द्धगोले के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$ वर्ग इकाई

अतः

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल	$= 4\pi r^2$ वर्ग इकाई
अर्द्धगोले के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल	$= 2\pi r^2$ वर्ग इकाई
अर्द्धगोले के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल	$= 3\pi r^2$ वर्ग इकाई

गोले का आयतन

गोले का आयतन उसकी त्रिज्या के घन के समानुपाती होता है। जैसे—जैसे त्रिज्या बढ़ती है आयतन तेजी से बढ़ता है। आयतन का मान $\frac{4}{3}\pi r^3$ द्वारा दिया जाता है।

उदाहरणः–8. किसी लोहे के गोले की त्रिज्या 7 सेमी. है, तो उसका वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात कीजिए।

हलः– दिया है गोले की त्रिज्या $r =$ 7 सेमी.

गोले के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4\times\frac{22}{7}\times(7)^2$$

$$= 4\times\frac{22}{7}\times 7\times 7$$

$= 616$ वर्ग सेमी.

गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(7)^3$$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 7\times 7\times 7$$

$= 1437.33$ घन सेमी.

उदाहरणः–9. 14 सेमी. व्यास वाले अर्द्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

हलः– मान लीजिए अर्द्धगोले की त्रिज्या r सेमी. है।

दिया है अर्द्धगोले का व्यास = 14 सेमी.

$\therefore$ $2r =$ 14 सेमी.

या $r =$ 7 सेमी.

$\because$ अर्द्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

$$= 3\times\frac{22}{7}\times(7)^2$$

= 462 वर्ग सेमी.

उदाहरणः–10. 2 से. मी. त्रिज्या वाली 64 गोलियों को पिघलाकर एक बड़ा गोला बनाया गया। बड़े गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हलः– मान लीजिए छोटे गोले की त्रिज्या r से. मी. है।

दिया है $r =$ 2 सेमी.

प्रत्येक छोटे गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{32}{3}\pi$ घन सेमी.

$\because$ 64 छोटे गोले का आयतन = $64\times\frac{32}{3}\pi$

$$=\frac{2048\pi}{3}$$

इन 64 छोटे गोले को पिधलाकर बड़ा गोला बनाया है, अतः बड़े गोले का आयतन 64 छोटे गोले के आयतन के बराबर होगा। मान लीजिए बड़े गोले की त्रिज्या R सेमी. है।

बड़े गोले का आयतन = 64 छोटे गोले का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2048\pi}{3}$$

$$R^3=\frac{2048\pi\times3}{3\times4\pi}$$

$$R^3=512$$

$R=$ 8 सेमी.

इसलिए बड़े गोले की त्रिज्या = 8 सेमी.

उदाहरणः—11. धातु के बने एक गोले की त्रिज्या 3 सेमी. है। यदि धातु का घनत्व 8 ग्राम /सेमी.^{3} हो तो गोले का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हलः— हम जानते हैं कि आयतन और घनत्व का गुणनफल द्रव्यमान के बराबर होता है। इसलिए हम पहले गोले का आयतन ज्ञात करेंगे।

मान लीजिए कि गोले की त्रिज्या r सेमी. है।

$r=$ 3 सेमी.

गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(3)^3$$

$$=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times3\times3\times3$$

= 113.14 सेमी.^{3}

चूँकि धातु का घनत्व 8 ग्राम/सेमी.^{3} है अर्थात 1 सेमी.^{3} धातु का द्रव्यमान 8 ग्राम है

$\therefore$ गोले का द्रव्यमान = आयतन $\times$ घनत्व

= 113.14 $\times$ 8

= 905.12 ग्राम

= 0.9051 किग्रा. (लगभग)

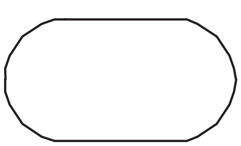
प्रश्नावली 4

1. एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 21 सेमी. है।
2. एक ग्लोब का व्यास 14 सेमी. है, पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी. है, गोले का व्यास ज्ञात कीजिए।
4. एक गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 3 सेमी. है।
5. 2 सेमी. त्रिज्या वाले 21 गोलियों को पिघलाकर बड़ा गोला बनाया जाता है इस नये गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।
6. एक ठोस गोले को जिसकी त्रिज्या 10.5 सेमी. है, को पिघलाकर कुछ छोटे शंकु बनाए गये जिनमें कि प्रत्येक कि त्रिज्या 3.5 सेमी. और ऊँचाई 3 सेमी. है। बनाए गए शंकु की संख्या ज्ञात कीजिए।
7. हवा भरने पर गोलाकार गुब्बारे की त्रिज्या 7 सेमी. से बढ़कर 14 सेमी. हो जाती है। दोनों स्थिति में गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।
8. एक गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी. है।
9. दो गोलों के आयतनों का अनुपात 64:27 है। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
10. एक ठोस गोले की त्रिज्या 12 सेमी. है। इस गोले से 6 सेमी. त्रिज्या के कितने गोले बन सकते हैं।
11. यदि किसी गोले का आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल बराबर है तो उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
12. मिट्टी का एक शंकु जिसकी ऊँचाई 24 सेमी. और आधार की त्रिज्या 6 सेमी. है जो एक बच्चा गोले में परिवर्तित कर देता है। इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
13. लोहे के तीन गोलियों को जिनकी त्रिज्याएँ 6 सेमी., 8 सेमी. और 10 सेमी. है को पिघलाकर एक बड़ा ठोस गोला बनाया जाता है। बनाए गए नये गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

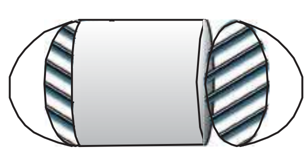
संयोजित ठोसों का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

(Surface area and volume of a combination of solids)

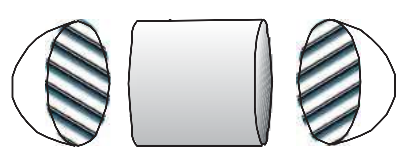
हमारे दैनिक जीवन में अनेक संयोजित ठोस दिखाई देते हैं जैसे एक कैप्सूल जो एक बेलन और दो अर्द्धगोलों का संयोजन है, ये अर्द्धगोले बेलन के छोरों में लगे होते हैं। इसी प्रकार



आकृति–35



आकृति–36



आकृति–37

खिलौना जिसका आधार अर्द्धगोला तथा उसके ऊपर शंकु होता है। इसलिए संयोजित ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन की गणना की आवश्यकता होती है।

आइए आकृति 35 में दिखाए गए पात्र(container) पर विचार कीजिए। हमें इस पात्र को बनाने के लिए आवश्यक लोहे की चादर का क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात करना है परंतु पात्र ऐसी आकृति का नहीं है जिसके लिए हमने यह गणना कर ली है। यदि कोई ठोस आकृति 36 में दिखाए आकार का हो तो फिर हम क्या करें?

ऐसी स्थितियों में हम आकृति को ऐसे छोटे–छोटे भागों में बाँट लेते हैं जिनका आयतन व क्षेत्रफल आदि निकाल सकते हैं और समस्या का हल प्राप्त कर सकते हैं। हम देख सकते हैं कि यह कैप्सूल एक ठोस बेलन के छोरों पर अर्द्धगोलों को जोड़ कर बनाया गया है। यदि हम पात्र को काटते हैं तो यह आकृति 36,37 के अनुसार दिखेगी।

अतः पात्र को बनाने के लिए आवश्यक लोहे की चादर का क्षेत्रफल = पहले अर्द्धगोले के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल + बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल + दूसरे अर्द्धगोले के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल

पात्र का आयतन = पहले अर्द्धगोले का आयतन + बेलन का आयतन + दूसरे अर्द्धगोले का आयतन

उदाहरणः–12. लोहे का एक बर्तन जिसे खोखले अर्द्धगोले के ऊपर, खोखला बेलन जोड़कर बनाया गया है। अर्द्धगोले का व्यास 14 सेमी. और बर्तन की कुल ऊँचाई 13 सेमी. हैं। बर्तन को बनाने के आवश्यक लोहे की चादर का क्षेत्रफल तथा बर्तन में धारित तरल का आयतन ज्ञात कीजिए। (लोहे की चादर की मोटाई नगण्य है।)

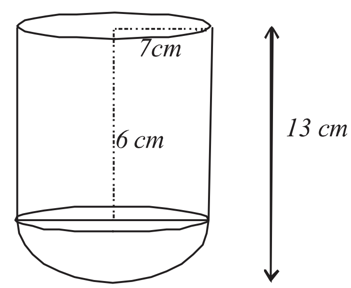
हलः–

अर्द्धगोले का व्यास = 14 सेमी.

$\therefore$ अर्द्धगोले की त्रिज्या = 7 सेमी.

बेलनाकार भाग की ऊँचाई = 13–7

= 6 सेमी.



आकृति – 38

बेलनाकार भाग के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 6$$

$= 264$ वर्ग सेमी.

अर्द्धगोले का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

= 308 वर्ग सेमी.

इसलिए बर्तन को बनाने के लिए आवश्यक

लोहे की चादर का क्षेत्रफल = बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल + अर्द्धगोले का क्षेत्रफल

$= 264$ वर्ग सेमी. $+ 308$ वर्ग सेमी.

$= 572$ वर्ग सेमी.

बेलनाकार भाग का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 6$$

$= 924$ घन सेमी.

और, अर्द्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$$

$= 718.6$ घन सेमी.

अतः बर्तन में धारित पानी की मात्रा $=$ बेलन का आयतन $+$ अर्द्धगोले का आयतन

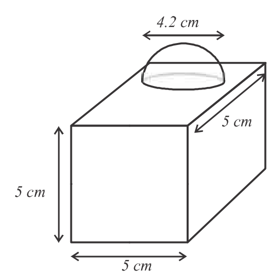
$= 924$ घन सेमी. $+ 718.6$ घन सेमी.

$= 1642.6$ घन सेमी.

FTM1HU

प्रश्नावली 5

1. दी गई आकृति (आकृति 39) दो ठोसों, एक घन तथा एक अर्द्धगोले से बनी है। आकृति में आधार एक घन है जिसकी कोर 5सेमी. तथा एक अर्द्धगोला है जो ऊपर लगा है इसगका व्यास 4.2 सेमी. हो तो दी गई आकृति का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 22/7$)



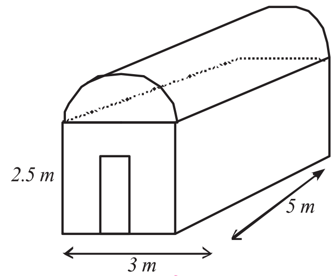
आकृति–39

2. एक खिलौना जो कि शंकु की आकृति का है, की त्रिज्या 5 सेमी. है। वह एक समान त्रिज्या के अर्द्धगोले के ऊपर लगा है। खिलौने की कुल ऊँचाई 17 सेमी. है। उस खिलौने का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. अर्द्धगोले पर शंकु के आकार का एक ठोस स्थित है। इन दोनों की त्रिज्याएँ 1 सेमी. के बराबर है। शंकु की ऊँचाई, उसकी त्रिज्या के बराबर है। ठोस का आयतन π के रूप में ज्ञात कीजिए।

4. गोलाकार शीशे के एक बर्तन की बेलनाकार गर्दन 4 सेमी. लंबी एवं 2सेमी. व्यास वाली है। गोलाकार भाग का व्यास 6 सेमी. है तो उसमें भरे हुए पानी की मात्रा ज्ञात कीजिए।

5. आकृति–40 में दिखाए हरित गृह(ग्रीन हाउस) के ऊपरी सिरे के दोनों भाग अर्द्धवृत्ताकार हैं,इन्हें इस ग्रीन हाऊस को कपड़े से ढंककर बनाया गया है। इसमें 1.2 मी. $\times$ 0.5 मी. साइज का एक लकड़ी का दरवाजा है। हरित गृह को पूर्ण रूप से ढकने में लगने वाले कुल कपड़े का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति–40

हमने सीखा

1. किसी त्रिविमीय आकृति जैसे घनाभ, बेलन, शंकु आदि का पृष्ठीय जाल समझना व आकारों का पृष्ठीय जाल समझना व बनाना।
2. घनाभ,घन व अन्य आकारों के तल,शीर्ष,पृष्ठ व कोर पहचानना व समझना।
3. घनाभ व घन के विभिन्न विकर्णों को पहचानना,समझना।
4. त्रिविमीय आकृतियाँ जैसे बेलन, शंकु, गोला आदि का क्षेत्रफल एवं आयतन ज्ञात करना।
5. संयोजित ठोसों का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात करना।

उत्तरमाला–1

1. $2\sqrt{21}$ मी.	2. 36 सेमी.	3. 15 मी.

उत्तरमाला–2

1. 880 वर्ग सेमी. एवं 2112 वर्ग सेमी.	2. 42 सेमी.	3. 2 सेमी	4. 68.75रु
5. 1584 वर्गमीटर	6. 396 घन सेमी.	7. 1540 घन सेमी.	8. 6160 घन सेमी.
9. 7 सेमी.	10. 20 सेमी.	11. 6.49 सेमी.	12. 7700 घन सेमी.
13. 2/3	14. 2.5 मीटर	15. 35	16. 15 सेमी. एवं 35 सेमी.

उत्तरमाला–3

1. 220 वर्ग सेमी.	2. $6\sqrt{2}$ सेमी.	3. 616 वर्ग सेमी.	4. 5500 वर्ग सेमी.
5. 34320 रु.	6. 1500 घन सेमी.	7. 21 सेमी.	8. 77 घन सेमी.
9. 1750	10. 12936 घन सेमी.	11 1 : 3	

उत्तरमाला–4

1. 5544 वर्ग सेमी.
2. 196π वर्ग सेमी.
3. 7 सेमी.
4. 36π घन सेमी.
5. 224π घन सेमी.
6. 126
7. 1 : 4
8. 179.66 घन सेमी.
9. 16 : 9
10. 8
11. 3 इकाई
12. 6 सेमी.
13. 12 घन सेमी.

उत्तरमाला–5

1. 163.86 वर्ग सेमी.
2. 115π वर्ग सेमी.
3. 22000 रु.
4. π घन सेमी.
5. 44π घन सेमी.
6. 62.9 वर्ग सेमी.