अध्याय 16

आँकड़ों का विश्लेषण
[ANALYZING DATA]

FTVHYH

परिचय (Introduction)

हम प्रतिदिन नई नई सूचनाओं के संपर्क में आते हैं जैसे– इस साल चावल के उत्पादन में 8 प्रतिशत वृद्धि हुई, पिछले वर्ष किस खिलाड़ी ने सबसे बेहतर हॉकी खेली? या फिर मोबाइल कंपनी 'A' ने जनवरी के महीने में कितने मोबाइल बेचे? ऐसी और बहुत सी महत्वपूर्ण जानकारियाँ प्रकाशित होती हैं जिनकी आवश्यकता हमें पड़ती रहती है। जैसे– रेलगाड़ी के आने–जाने का समय, फल–सब्जियों के दाम, पेट्रोल का वर्तमान मूल्य, अनाज तथा डेयरी का उत्पादन, स्टील, कोयला तथा अन्य उत्पादन। इसके अलावा और भी बहुत से आँकड़ें होते हैं, जिनके आधार पर महत्वपूर्ण निर्णय लिए जाते हैं तथा भविष्य की योजनाएँ भी बनाई जाती हैं।

किस्म–किस्म की जानकारियाँ कैसे ढूँढे

क्या हम अभी यह बता सकते हैं कि आने वाले दो दिनों का तापमान कैसा रहेगा? या इस वर्ष राज्य में कितनी मात्रा में चावल का उत्पादन हुआ? या फिर पिछले पाँच वर्षों में पेट्रोल के दामों में कितनी वृद्धि या कमी हुई?

इन सभी के बारे में कुछ कह पाना संभव है किंतु सीधे सीधे नहीं, इन सभी सवालों के जवाब खोजने के लिए हमें इनसे संबंधित आँकड़ों का अध्ययन करना होगा।

अखबारों और पत्रिकाओं में विभिन्न आँकड़े जैसे–फसलों के उत्पादन, मौसम संबंधी जानकारियाँ, खेलों का विवरण, खाद्य वस्तुओं के दाम आदि प्रकाशित होते रहते हैं।

स्वास्थ्य और शिक्षा से संबंधित आँकड़े भी सरकार द्वारा विभिन्न संस्थाओं के माध्यम से एकत्रित किए जाते हैं जैसे– कौन से क्षेत्र में किस बीमारी का फैलाव अधिक है, उससे कितने लोग प्रभावित हैं? इसके आधार पर यह तय करने में मदद मिलती है कि बीमारी की रोकथाम के लिए किस तरह के इंतजाम की आवश्यकता है। आज से 6–7 दशक पहले भारत में यह भी महत्वपूर्ण प्रश्न था कि इस साल देश में अनाज का कितना उत्पादन हुआ, कितने की आवश्यकता है और अनाज की आपूर्ति के लिए, कितना अनाज बाहर से मंगवाना पड़ सकता है। आँकड़ों को विभिन्न अखबारों, पत्र–पत्रिकाओं में प्रकाशित करवाया जाता है, जिससे सबको जानकारी रहे कि कौन–सी योजना किस प्रकार के आँकड़ों को आधार बनाकर लागू की जा रही है तथा किस प्रकार के आँकड़ों के आधार पर निर्णय लिए जा रहे हैं।

करके देखें

1. आपने गणित के अतिरिक्ति अन्य विषयों जैसे– विज्ञान, सामाजिक अध्ययन आदि में भी आँकड़ों का प्रयोग होते हुए देखा होगा। आँकड़ों के कुछ उदाहरण दीजिए।
2. कुछ पत्र–पत्रिकाओं तथा अखबारों का अवलोकन कीजिए तथा इनमें छपे आँकड़ों को इकट्ठा कीजिए। चर्चा कीजिए यह किस–किस के बारे में हैं?
3. आपके स्कूल के ऑफिस में किस तरह के आँकड़ें उपलब्ध हैं? पता कीजिए।
4. स्कूल परिसर में आपने नोटिस बोर्ड पर आँकड़ें देखे होंगे। कौन–कौन से आँकड़ें देखे?

सोचें और चर्चा करें

नीचे दिए गए सवालों के जवाब आप कहाँ–कहाँ से पता लगा सकते हैं?

(1) आपके जिले में कौन–सी बीमारी का फैलाव अधिक है?

(2) वर्तमान वर्ष में आपके जिले की जनसंख्या कितनी है?

(3) वर्तमान वर्ष में सरकार द्वारा बाजार में गेहूँ तथा धान का न्यूनतम मूल्य कितना निर्धारित किया गया है?

कई और सरल सवाल भी

इसी तरह से कई बातें हम अपने बारे में भी जानना चाहते हैं, जैसे क्या आप कक्षा के सभी विद्यार्थियों से तेज दौड़ सकते हैं या फिर आपकी ऊँचाई कक्षा के बाकी छात्रों से तुलना करने पर कम है या अधिक? इस तरह के प्रश्नों का हल हम कैसे ढूँढें?

कुछ छात्र–छात्रा आप से तेज दौड़ते हैं, कुछ धीरे। कुछ आप से लंबे होंगे, कुछ छोटे।

अगर एक कक्षा में 50 विद्यार्थी हैं और उसमें रानी की ऊँचाई 160 सेमी. है तथा बाकी के विद्यार्थियों की ऊँचाई इस प्रकार है :–

161	160	162	159	161	158	162	163
158	158	160	159	160	161	163	160
158	161	158	159	163	159	160	159
158	160	159	162	163	160	159	159
159	162	161	163	159	161	161	160
163	160	163	161	160	158	160	163
160	160						

क्या इन आँकड़ों को देखकर आप यह बता सकते हैं कि रानी की ऊँचाई बाकी विद्यार्थियों की ऊँचाई की तुलना में कहाँ ठहरती है? हर बच्चे की ऊँचाई के साथ उसकी ऊँचाई की तुलना करना मुश्किल है। यदि उपरोक्त आँकड़ों को व्यवस्थित रूप से संग्रहित कर लिया जाए तो तुलना करना आसान हो जाएगा। अतः आँकड़ों को व्यवस्थित करने के लिए हम बारम्बारता सारणी बनाते हैं।

निम्नलिखित बारम्बारता सारणी में इन आँकड़ों को व्यवस्थित किया गया है:–

तालिका–1

ऊँचाई (सेमी.में)	158	159	160	161	162	163
विद्यार्थियों की संख्या	7	10	13	8	4	8

इस बारम्बारता सारणी को देखकर क्या–क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

एक तो यह कि सबसे ज्यादा बच्चे 160 सेमी. वाले समूह में हैं। इसमें 13 बच्चे हैं। 17 बच्चे उन समूहों में हैं जिनकी ऊँचाई रानी की ऊँचाई से कम है। सबसे कम ऊँचाई 158 सेमी. है और इसमें 7 बच्चे हैं।

हम इस सारणी से और क्या–क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? दोस्तों से चर्चा करें व कम से कम 5 और निष्कर्ष लिखें।

इसी तरह हम तेज दौड़ने की बात करें तो हम देखते हैं कि सभी दौड़ने वालों की गति एक बराबर नहीं होती। नीचे दिए गए आँकड़ों में 50 लोगों के दौड़ने की गति किमी.प्रति घंटे में दी गई है। यानी यह बताया गया है कि एक घंटे में वे कितने–कितने किमी. दौड़ते हैं।

तालिका–2

दौड़ने की गति (किमी.प्रति घंटा)	15	11	9	5	6	4
छात्रों की संख्या	5	6	7	8	9	10

यदि नफीसा के दौड़ने की गति 7 किमी./घंटा है तो उपरोक्त तालिका की सहायता से उसकी गति का तुलनात्मक अध्ययन कर सकते हैं। यह भी देख सकते हैं कि कितने लोग उससे तेज दौड़ते हैं और कितने लोग उससे धीरे दौड़ते हैं?

करके देखें

1. नीचे दिए गए सवाल पढ़िए और बताइए कि उनके जवाब ढूँढने के लिए हमें किस प्रकार के आँकड़े चाहिए? चर्चा करके यह भी बताइए कि आँकड़े हमें कहाँ से और कैसे मिलेंगे?

1. पिछले तीन वर्षों में रायपुर में पेट्रोल के दामों में क्या–क्या बदलाव आए?
2. इस साल देश के कौन से राज्य में सबसे कम वर्षा हुई?
3. पिछले पाँच वर्षों में छत्तीसगढ़ में मछली उत्पादन में कितनी वृद्धि हुई?
4. 2011 की जनगणना में किस राज्य की जनसंख्या सबसे अधिक थी?
5. पिछले पाँच वर्षों में आपके गाँव/शहर की जनसंख्या में क्या परिवर्तन आए?
6. छत्तीसगढ़ के किस जिले में स्कूलों की संख्या सबसे अधिक है?
7. पिछले पाँच वर्षों में भारत ने हॉकी में कितने अंतर्राष्ट्रीय मैच खेले?
8. वर्ष 2010 से 2015 तक पूरे भारत में चावल का कितना उत्पादन हुआ?

सोचें एवं चर्चा करें

1. यदि आपके स्कूल में कुल 1000 छात्र हों और यदि आपको अपनी ऊँचाई की तुलना सबसे करनी हो तो यह कैसे करेंगे?

2. यदि आप अपने जिले के छात्रों के साथ अपने दौड़ने की गति की तुलना करना चाहें तो आपको किस प्रकार के आँकड़ों की आवश्यकता होगी? यह भी सोचें कि आप उन्हें कैसे व्यवस्थित करेंगे?

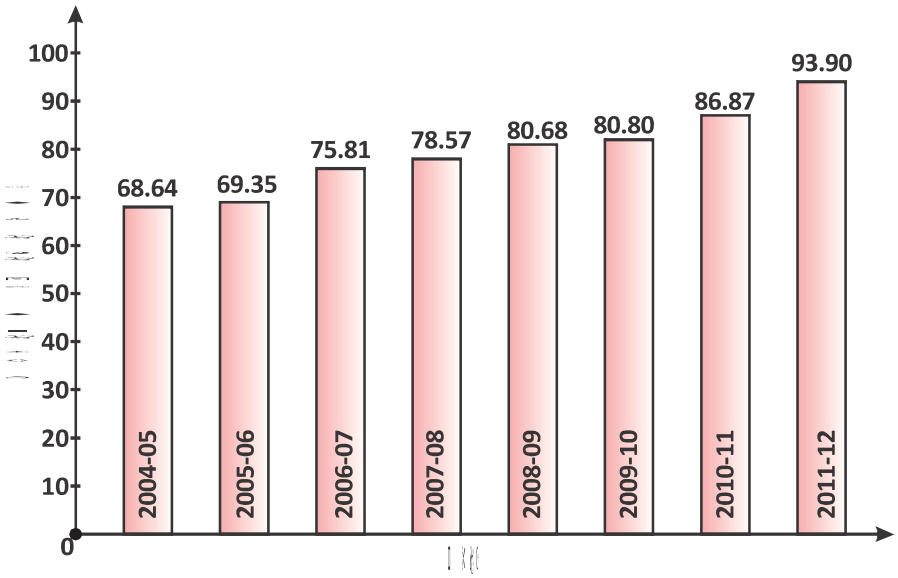
आँकड़ों का चित्रात्मक निरूपण

पिछली कक्षा में आपने आँकड़ों का संग्रहण तथा प्रस्तुतीकरण सीखा है। साथ ही बारम्बारता सारणी तथा आँकड़ों के आलेखीय निरूपण को भी समझा है, जिसमें आपने आयत चित्र, आवृत्ति बहुभुज तथा संचयी आवृत्ति वक्र आदि बनाना सीखा। इन चित्रों के आधार पर हम बहुत–सी जानकारियाँ प्राप्त करते हैं तथा उनसे निष्कर्ष भी निकालते हैं। आइए कुछ इसी तरह के आँकड़ों का अध्ययन करते हैं:–

स्तंभ आलेख का अध्ययन

किसी प्रदेश में विभिन्न वर्षों में हुए गेहूँ के उत्पादन को निम्नलिखित आलेख द्वारा दर्शाया गया है–

इस आलेख को देखने से गेहूँ उत्पादन के बारे में कौन–कौन सी बातें स्पष्ट दिखती हैं? आलेख को पढ़कर निम्नलिखित सवालों के जवाब खोजें।



(i) 2007–08 में गेहूँ उत्पादन कितने टन था?

(ii) किस वर्ष में गेहूँ उत्पादन सबसे अधिक हुआ?

(iii) क्या यह कहा जा सकता है कि प्रत्येक वर्ष गेहूँ उत्पादन में वृद्धि हुई है?

(iv) किन दो वर्षों के बीच गेहूँ उत्पादन में सबसे अधिक परिवर्तन हुआ?

करके देखें

तालिका का अध्ययन

वर्ष 1980 से 1989 तक एक शहर में हुई वर्षा के एकत्रित किए गए आँकड़ों को नीचे की तालिका में दर्शाया गया है।

वर्ष	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
कुल वर्षा (इंचमें)	24.7	21.2	14.5	13.2	12.1	16.8	19.9	29.2	31.6	21.0

वर्षा से संबंधित इन आँकड़ों का अध्ययन कीजिए, स्तम्भालेख बनाइए तथा इनके आधार पर कम से कम पाँच अलग–अलग तरह के निष्कर्ष लिखिए।

माध्य, माध्यिका, बहुलक

आपने आँकड़ों से बने स्तम्भ आलेख व आवृत्ति वक्र से कुछ सवालों के जवाब ढूँढे तथा निष्कर्ष निकाले। क्या स्तम्भ आलेख को देखकर यह बता सकते हैं कि 2005 से 2012 तक गेहूँ का औसत उत्पादन प्रतिवर्ष कितना रहा? क्या हम यह बता पाएँगे कि आँकड़ों को क्रम में रखने पर कौन–सा वर्ष ठीक बीच में आयेगा? फिर दूसरी तालिका से यह जान सकते हैं कि इस शहर में औसतन एक वर्ष में कितनी बारिश होती है या यह कि सामान्यतः कितनी बारिश होने की उम्मीद की जा सकती है। स्तम्भ आलेख देखकर हम आँकड़ों के क्रम व उनके रूख के बारे में नहीं बता सकते। इसके अलावा औसत उत्पादन निकालने के लिए हमें अंकगणितीय औसत चाहिए। आइए, याद करें हम यह कैसे निकालते हैं?

अंकगणितीय औसत या समांतर माध्य (Arithmetic Mean)

अब हम 2005 से 2012 तक गेहूँ के औसत उत्पादन की गणना करने के लिए प्रत्येक वर्ष के गेहूँ के उत्पादन (लाख टन में) को जोड़ेंगे तथा उसे कुल वर्षों से भाग देंगे। आइए देखें कि गेहूँ का औसत उत्पादन कितना रहा?

कुल उत्पादन = 68.64 + 69.35 + 75.81 + 78.57 + 80.80 +80.80 + 86.87 + 93.90

= 634.74 लाख टन

2005 से 2012 तक कुल वर्ष = 8 वर्ष

$$\text{औसत उत्पादन} = \frac{634.74}{8}$$

= 79.34 लाख टन

यहाँ हमने गेहूँ के औसत उत्पादन की गणना की है। आँकड़ों के औसत को सांख्यिकी में समांतर माध्य कहते हैं। यानी जब आँकड़ों का समांतर माध्य ज्ञात करना हो तो आँकड़ों को जोड़कर कुल आँकड़ों की संख्या से भाग देते हैं। सूत्र के रूप में इसे निम्नलिखित ढंग से लिखते हैं–

$$\text{समांतर माध्य} = \frac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$$

यदि प्रेक्षणों को x लिखें तो प्रेक्षणों का योग Σx तथा प्रेक्षणों की संख्या n हो तब

$$\text{समांतर माध्य} = \frac{\sum x}{n}$$

समांतर माध्य को प्रायः A.M.,M अथवा $\bar{X}$ से प्रदर्शित किया जाता है।

असतत श्रेणी वाले आँकड़े

अभी तक हमने जो उदाहरण देखे वे व्यक्तिगत श्रेणी के आँकड़े थे तथा आँकड़ों की संख्या कम थी लेकिन जब आँकड़ों की संख्या बहुत अधिक हों तब समांतर माध्य की गणना कैसे करें?

कक्षा नवमीं की अर्द्धवार्षिक परीक्षा में 35 विद्यार्थियों के गणित विषय के प्राप्तांक निम्नानुसार हैं:–

30, 30, 38, 40, 42, 35, 40, 30, 45, 48,
40, 42, 38, 30, 38, 40, 35, 30, 42, 40,
42, 38, 35, 42, 40, 38, 42, 40, 48, 45,
38, 40, 30, 35, 35

यहाँ न्यूनतम प्राप्तांक 30 तथा अधिकतम प्राप्तांक 48 हैं। हम देख पा रहें हैं कि प्राप्तांक 30,35,38,40,42,45,48 तक सीमित हैं जिनकी ही पुनरावृत्ति हो रही हैं। अतः इन आँकड़ों को निम्नलिखित तरीके से लिखा जा सकता है।

प्राप्तांक(x)	:	30	35	38	40	42	45	48
बारम्बारता(f)	:	6	5	6	8	6	2	2

जब आँकड़ें इस प्रकार से दिए गए हों तब समांतर माध्य की गणना करने के लिए आँकड़ों (प्रेक्षणों) तथा उनके संगत बारम्बारताओं के गुणनफल के योग को बारम्बारताओं के योग से भाग कर देते हैं।

प्राप्तांक(x)	बारम्बारता(f)	प्राप्तांक तथा संगत बारम्बारता का गुणनफल(fx)
30	6	180
35	5	175
38	6	228
40	8	320
42	6	252
45	2	90
48	2	96
	$\sum f = 35$	$\sum fx = 1341$

$$\therefore \text{समांतर माध्य} = \frac{\text{प्रातांक व उनके संगत बारम्बारताओं के गुणनफल का योग}}{\text{बारम्बारताओं का योग}}$$

$$\bar{X} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + f_5x_5 + f_6x_6 + f_7x_7}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7}$$

$$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{1341}{35}$$

$$\bar{X} = 38.31$$

कक्षा नवमीं की अर्द्धवार्षिक परीक्षा में विद्यार्थियों के गणित विषय का औसत प्राप्तांक 38.31 है।

अब हम उन आँकड़ों के समांतर माध्य के बारे में चर्चा करेंगे जिनमें आँकड़ों की पुनरावृत्ति तो हो रही है पर आँकड़ों की संख्या बहुत अधिक है। तब हम उन आँकड़ों को समूह में बाँटकर समांतर माध्य की गणना करते हैं।

आइए इसे एक उदाहरण से सीखें

उदाहरण:–1. एक गाँव के माध्यमिक विद्यालय में 100 विद्यार्थी हैं, उन विद्यार्थियों के घर से विद्यालय की दूरियाँ किमी. में नीचे दी गई हैं। इन आँकड़ों से औसत दूरी ज्ञात कीजिए।

17	1	19	0	4	1	3	2	0	4
5	7	2	8	9	19	2	17	1	18
0	3	2	5	2	8	1	10	1	11
13	8	9	4	15	0	15	3	11	11
2	19	0	14	12	1	12	1	13	1
9	3	6	4	14	3	10	12	4	8
0	7	9	6	5	9	7	8	2	9
5	8	6	7	9	5	5	6	3	8
7	5	0	1	3	0	4	2	0	1
3	0	4	3	2	0	1	0	4	0

हल:– दिए गए आँकड़ों में हम देखते हैं कि कई आँकड़े बहुत बार आए हैं इनमें सबसे छोटी संख्या 0 और सबसे बड़ी 19 है। इन आँकड़ों को हमें समूहों में बाँटना होगा जिससे गणना आसान हो जाए।

आँकड़ों को 4 अंतराल वाले समूहों में बाँटते हैं। जैसे 0 से 4 किमी. तक की दूरी से आने वाले विद्यार्थियों की संख्या 42 , 4 से 8 किमी. तक की दूरी से आने विद्यार्थियों की संख्या 24 है , इत्यादि। इसी तरह हम 8–12 , 12–16, 16–20 अंतराल में छात्र की संख्या पता करते हैं;

विद्यार्थियों के घर से विद्यालय की दूरी किमी.में	विद्यार्थियों की संख्या (f)	मध्यमान (x)	fx
0-4	42	2	84
4-8	24	6	144
8-12	19	10	190
12-16	9	14	126
16-20	6	18	108
	$\sum f_i = 100$		$\sum f_i x_i = 652$

ऊपर हमने अंतरालों का मध्यमान अंतराल की दोनो सीमाओं को जोड़कर 2 से भाग करके निकाला है। अब हम मध्यमान और विद्यार्थियों की संख्या के गुणनफल को जोड़कर विद्यार्थियों की संख्या से भागकर औसत पता कर सकते हैं।

$$\text{औसत} = \frac{\text{विद्यार्थियों की संख्या व मध्यमान के गुणनफल का जोड़}}{\text{विद्यार्थियों की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{84+144+190+126+108}{100}$$

$$= \frac{652}{100}$$

$$= 6.52 \text{ किमी.}$$

'औसत' को हम एक ऐसी संख्या के रूप में देख सकते हैं जो आँकड़ों के पूरे समूह का एक गुण बताती है। जाहिर है यह सबसे कम मान से अधिक तथा सबसे अधिक मान से कम होती है और इन आँकड़ों के बीच में ही होती है। इसे 'अंकगणितीय औसत कहते हैं।

अंकगणितीय औसत की गणना

आइए, इसे कुछ और उदाहरणों से समझते हैं।

नीचे तालिका में पाँच वर्षों के दाल उत्पादन संबंधी आँकड़े दिए गए हैं–

वर्ष	2007–08	2008–09	2009–10	2010–11	2011–12
दाल का उत्पादन (लाख टन में)	14.8	14.6	14.7	18.2	17.2

इन आँकड़ों का समांतर माध्य या औसत ज्ञात करना है। इसे पता करने के लिए, सभी प्रेक्षणों को जोड़ कर उसे वर्षों की कुल संख्या से भाग देना होगा, यानी

$$\text{समांतर माध्य} = \frac{14.8+14.6+14.7+18.2+17.2}{5} \text{ लाख टन}$$

$$= \frac{79.5}{5} = 15.9 \text{ लाख टन}$$

दाल का औसत उत्पादन 15.9 लाख टन है। तालिका में प्रदर्शित प्रत्येक वर्ष का उत्पादन औसत से अलग है। परन्तु औसत के प्रयोग से हम पिछले पाँच साल के उत्पादन को किसी एक ही मान द्वारा दर्शा सकते हैं।

आइए, औसत का एक और उदाहरण देखते हैं।

उदाहरण–2. धमतरी जिले में हुई वर्षा (मि.मी.) के आँकड़े इस प्रकार है। इन आँकड़ों का औसत ज्ञात कीजिए।

880.5, 1474.9, 806.3, 1554.9, 1019,2, 1046.5, 1017.2

हल:– आप जानते है कि

$$\text{माध्य} = \frac{\text{प्रेक्षणों का जोड़}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

इस प्रकार, औसत $= \dfrac{880.5+1474.9+806.9+1554.9+1019.2+1046.5+1017.2}{7}$

$$= \frac{7799.5}{7} = 1114.21 \text{ मिमी.}$$

अतः वर्षा का अंकगणितीय औसत 1114.21 मिमी. है।

औसत का व्यवहार में उपयोग

क्या आप बता सकते हैं कि लड़कियों को सामान्यतः घर में खेलने का कितना समय मिलता है? हम जानते हैं कि रोज खेलने का समय निश्चित नहीं होता, किसी दिन कोई घंटों तक खेलता है और किसी दिन बहुत कम या फिर बिल्कुल नहीं।

इसका मतलब है कि एक दिन के आधार पर आप नहीं बता सकते कि लड़कियाँ प्रतिदिन कितने समय तक खेलती हैं। अगर आप प्रत्येक लड़की के हर रोज खेलने के समय के बारे में आँकड़े एकत्रित करेंगे तो आपके पास बहुत सारे आँकड़े हो जायेंगे। इन्हें व्यवस्थित करना आसान नहीं होगा। इस समस्या को हल करने के लिए हम एक महीने के आँकड़े लेकर उनके प्रतिदिन खेलने का औसत समय पता कर सकते हैं। तालिका–3 देखें। यहाँ हमें 50 लड़कियों के खेलने का समय दिया गया है। क्या आप बता सकते हैं कि अधिकतर लड़कियाँ कितने समय तक खेलती हैं?

तालिका–3 में आप देख सकते हैं कि अधिकतर लड़कियों को खेलने के लिए औसतन 2 घंटे से कम का समय मिलता है। सबसे ज्यादा यानी 12 लड़कियाँ औसतन 2 घंटे खेलती हैं किन्तु सभी लड़कियों के प्रतिदिन खेलने का औसत समय 2 घंटे नहीं है। यहाँ अंकगणितीय औसत निकालने के लिए सभी 50 लड़कियों द्वारा औसतन खेलने में प्रतिदिन बिताए जाने वाले कुल घंटे पता करने होंगे।

तालिका–3

प्रतिदिन खेलने का औसत समय (घंटे में)	लड़कियों की संख्या	50 लड़कियों के खेलने का कुल समय
x_i	f_i	$x_i f_i$
0	4	0
$\frac{1}{2}$	6	3
1	8	8
$1\frac{1}{2}$	9	$13\frac{1}{2}$
2	12	24
$2\frac{1}{2}$	7	$17\frac{1}{2}$
3	4	12
कुल	$\sum f_i = 50$	$\sum f_i x_i = 75$

$$\text{औसत} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$\text{औसत} = \frac{75}{50} \text{ घंटे}$$

$$= 1 \text{ घण्टा } 50 \text{ मिनट}$$

यदि प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ की बारम्बारताएँ क्रमशः $f_1, f_2, f_3, ...f_n$ हों तो इसका अर्थ है कि प्रेक्षण x_1 , f_1 बार आता है, प्रेक्षण x_2, f_2 बार आता है, इत्यादि।

जैसे इस उदाहरण में प्रतिदिन औसतन 0 घंटा खेलने वाली 4 लड़कियाँ हैं और औसतन 1/2 घंटा खेलने वाली 6 लड़कियाँ हैं तो $x_1 = 0, f_1 = 4$ और $x_2 = \frac{1}{2}, f_2 = 6$ होगा।

अब सभी प्रेक्षणों और बारम्बारता के गुणनफल (fx) के मानों का

योग $= f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n$ है तथा

प्रेक्षणों की कुल संख्या $= f_1 + f_2 + ... + f_n$ है।

माध्य निकालने के लिए हम इस योग को बारम्बारता के योग से भाग देंगे। इस प्रकार माध्य हुआ–

माध्य (अंकगणितीय औसत) $= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ जहाँ i का मान 1 से n तक होगा

जोड़ को संक्षिप्त में एक यूनानी अक्षर $\sum$ (सिग्मा) से व्यक्त करते हैं। यह जोड़ को दर्शाता है। इसलिए बारम्बारता के जोड़ को $\sum f_i$ और प्रेक्षणों एवं बारम्बारता के गुणनफल के योग को $\sum f_i x_i$ से दर्शाया है।

इसका अर्थ यह हुआ कि 1 घंटा 50 मिनट का औसत समय प्रत्येक लड़की को हर रोज खेलने के लिए मिलता है। अब बाकी आँकड़ों के साथ इस औसत की तुलना करते हैं।

क्या आप बता सकते हैं कि कितनी लड़कियाँ औसत घंटो से अधिक घंटे खेलती हैं और कितनी लड़कियाँ कम? आप देख सकते हैं कि औसत से कम समय खेलने वाली लड़कियों की संख्या 27 है तथा औसत से ज्यादा खेलने वाली 23 हैं।

इस प्रकार जब हम बड़े पैमाने पर आँकड़ों का अध्ययन करते हैं तब उन्हें व्यवस्थित करने में औसत हमारी मदद करता है। जैसे उपरोक्त उदाहरणों में लड़कियों के खेलने का औसत समय या दौड़ने की औसत गति।

करके देखें

1. पिछले उदाहरण में प्रस्तुत कक्षा के 50 छात्रों की ऊँचाई का औसत ज्ञात कीजिए। अपनी ऊँचाई के साथ उसकी तुलना कीजिए।

2. तालिका–2 में प्रस्तुत कक्षा के 50 छात्रों की दौड़ने की गति का औसत निकालिए। इस औसत से आप क्या–क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

उपरोक्त उदाहरणों में आपने दिए गए प्रेक्षणों का औसत निकालना सीखा परन्तु यदि औसत पहले से दिया गया हो तो क्या अज्ञात प्रेक्षणों को ज्ञात किया जा सकता है।

नीचे दिए गए उदाहरण को देखिए–

उदाहरण–3. नीचे दिए गए प्रेक्षणों का औसत 36 है। अज्ञात प्रेक्षण (f) ज्ञात कीजिए।

25, 39, 35, f, 46

हल:– आप जानते हैं कि–

$$\text{औसत} = \frac{25+39+35+f+46}{5}$$

$$\text{औसत} = \frac{145+f}{5}$$

औसत का मान रखने पर

$$36 = \frac{145+f}{5}$$

$$36 \times 5 = 145 + f$$

$$180 = 145 + f$$

$$180 - 145 = f$$

$$35 = f$$

अतः f का मान 35 हुआ। इस प्रकार सभी प्रेक्षण 25, 39, 35, 35, 46 हुए।

उदाहरण:–4. नीचे दी गई तालिका के आँकड़ों की मदद से छात्रों की औसत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई (सेमी.में)	158	159	160	161	162	163
छात्रों की संख्या	7	10	13	8	4	5

हल:– हमें पता है कि माध्य (अंकगणितीय औसत)

ऊँचाई(सेमी.में)(x_i)	छात्रों की संख्या(f_i)	($f_i x_i$)
158	7	1106
159	10	1590
160	13	2080
161	8	1288
162	4	648
163	5	815
	$\sum f_i = 47$	$\sum f_i x_i = 7527$

अतः अंकगणितीय औसत $= \frac{7527}{47}$

$= 160.15$ सेमी.

यानी छात्रों की औसतन ऊँचाई 160.15 सेमी. है।

करके देखें

1. पहली 15 प्राकृत संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।
2. मार्च–अप्रैल, 2010 के दौरान भुवनेश्वर (उड़ीसा) में पेट्रोल के दाम (रूपये में) नीचे दिए गए हैं। इनका औसत ज्ञात कीजिए।

   61.28, 62.08, 59.35, 56.28, 59.28
3. एक राज्य में 8 वर्षों में हुए चावल उत्पादन (लाख टन) के आँकड़े निम्नलिखित हैं। इन आँकड़ों का औसत ज्ञात कीजिए।

   84.98, 93,34, 71.82, 88.53, 83.13, 91.79, 93.36, 96.69

औसत हमें क्या बताती है?

हमने देखा कि औसत से हमें एक आधार मिल जाता है जो पूरे आँकड़ों का प्रतिनिधित्व करता है। परन्तु क्या अंकगणितीय औसत आँकड़ों को पूरा प्रदर्शित नहीं कर पाती।

नीचे दिए गए कथनों को पढ़िए:–

1. इस साल फरवरी माह में दिन का औसत तापमान 23°C था।
2. पिछले पाँच वर्षों में पेट्रोल के प्रति लीटर दाम का औसत 65.70 रुपये रहा।
3. दसवीं कक्षा के विद्यार्थियों की औसत आयु लगभग 15 वर्ष है।

आपने अक्सर ऐसे कथनों को पढ़ा होगा और सुना भी होगा। एक महीने अथवा दिन का औसत तापमान, पेट्रोल का औसत दाम आदि के मान से हम कुछ बातें समझ सकते हैं और कुछ निष्कर्ष निकाल सकते हैं। किन्तु कई बातें औसत से पता नहीं चलती। जैसे–

कथन–1 में, पूरे महीने तापमान कभी 23°C से अधिक और तो कभी उससे कम रहा होगा। औसत हमें यह नहीं बताता कि तापमान कितना–कितना था। अधिक से अधिक कितना व कम से कम कितना । क्या तापमान में बहुत उतार–चढ़ाव हुआ या वह लगभग एक जैसा ही था।

कथन–2 में भी, पेट्रोल के दाम समय–समय पर बदलते रहे होंगे। प्रत्येक वर्ष औसत दाम 65.70 रूपये नहीं रहा होगा। इससे हम यह नहीं बता सकते कि आज पेट्रोल का दाम क्या है? फिर भी औसत से हम यह अंदाजा लगा पा सकते हैं कि पेट्रोल का दाम प्रति लीटर 64 रुपये से 66 रुपये के इर्द–गिर्द ही रहा होगा अगर हमें यह पता हो कि अकसर पेट्रोल के दामों में अचानक उतार–चढ़ाव नहीं होता है।

कथन–3 में, कुछ विद्यार्थियों की आयु 15 से कम होगी तथा कुछ की अधिक होगी। इससे हमें और अधिक जानकारी नहीं मिलती।

आइए, औसत का एक उदाहरण और देखते हैं–

उदाहरण–5. नीचे तालिका में सात कर्मचारियों के वेतन के आँकड़े दिए हुए हैं–

1400 1500 8400 8700 9000 9200 9400

इन आँकड़ों का औसत निकालकर देखिए–

आप जानते हैं, औसत $= \frac{1400+1500+8400+8700+9000+9200+9400}{7}$

$= \frac{47600}{7} = 6800$ रूपये

आँकड़ों का औसत वेतन 6800 रूपये है।

पर क्या औसत इन आँकड़ों के केन्द्र को सही रूप से प्रस्तुत कर पा रहा है? कोई भी आँकड़ा औसत के करीब नहीं है। इस औसत से हम यह तो पता कर सकते हैं कि हर महीने कुल कितना खर्चा वेतन पर होता है, किन्तु यह नहीं कि एक कर्मचारी को लगभग कितना वेतन मिलता है?

आप देख सकते हैं कि इन आँकड़ों का गणितीय औसत हमें आँकड़ों के वितरण को समझने में मदद नहीं कर पा रहा है।

माध्यिका

जब प्रेक्षणों के मान एक–दूसरे से बहुत अन्तर पर होते हैं, तब माध्य से हम सभी कई अर्थपूर्ण निष्कर्ष नहीं निकाल पाते। यहाँ हम एक नए संख्यात्मक प्रतिनिधि का उपयोग करेंगे जिसे माध्यिका कहते हैं। माध्यिका वह आँकड़ा है जो व्यवस्थित प्रेक्षणों में आए मानों के ठीक बीच में होता है।

आइए एक उदाहरण से माध्यिका को समझते हैं और फिर उसकी उपयोगिता देखेंगे।

उदाहरण 5 के वेतन आँकड़ों को देखिए–

1400, 1500, 8400, 8700, 9000, 9200, 9400

इन आँकड़ों की माध्यिका क्या है? आँकड़ों में कुल सात पद है जिसमें से चौथा पद मध्य पद है। इसलिए इन आँकड़ों की माध्यिका 8700 है। आँकड़ों के प्रेक्षणों का मध्य पद ही हमें माध्यिका देता है। कई बार माध्यिका आँकड़ों का बेहतर प्रतिनिधित्व कर सकती है क्योंकि माध्यिका पर बहुत बड़े एवं बहुत छोटे प्रेक्षणों का असर नहीं पड़ता।

करके देखें

निम्नलिखित आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए–

1. 25, 21, 23, 18, 20, 23, 24
2. 113, 102, 95, 85, 110, 109, 106,110, 115

आइए, माध्यिका के कुछ और महत्वपूर्ण उपयोग समझते हैं।

उदाहरण:–6. किसी दफ्तर में 10 पदों पर नियुक्ति के लिए 21 व्यक्तियों ने इंटरव्यू दिया। इंटरव्यू में उन्हें कुल 50 अंकों में से निम्नलिखित अंक प्राप्त हुए–

25, 23, 45, 40, 42, 38, 32, 43, 47, 36, 28, 37, 35, 34, 42, 21, 27, 18, 39, 41, 40

इनमें से 10 व्यक्तियों को नौकरी के लिए चुना जाना है।

इसके लिए क्या किया जाए?

हम जानते हैं कि 21 में से सर्वाधिक अंक प्राप्त करने वाले 10 व्यक्तियों को चुना जाएगा। इस प्रक्रिया को सरल बनाने के लिए आँकड़ों को बढ़ते क्रम में व्यवस्थित किया जा सकता है जो कि इस प्रकार होगा–

18, 21, 23, 25, 27, 28, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 40, 41, 42, 42, 43, 45, 47

इन आँकड़ों में माध्यिका 11 वाँ पद यानी 37 है जो कि शुरू के 10 व्यक्तियों तथा आखिर के 10 व्यक्तियों के बीच में है। अतः नौकरी के लिए 37 से अधिक अंकों वाले व्यक्तियों का चुनाव किया जायेगा। यहाँ 37 आँकड़ों की माध्यिका है।

अर्थात् यदि प्रेक्षणों की कुल संख्या n हो,

तो प्रेक्षणों का $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ पद ही माध्यिका होगी।

आप देख सकते हैं कि उदाहरण–4 और उदाहरण–5 में कुल प्रेक्षणों की संख्या विषम संख्याएँ हैं। उपरोक्त तरीके से कुल प्रेक्षणों की संख्या विषम होने पर माध्यिका आसानी से ज्ञात कर सकते हैं। परन्तु यदि प्रेक्षणों की कुल संख्या सम हो तो माध्यिका को कैसे पता करेंगे? इसे समझने के लिए एक उदाहरण देखते हैं–

उदाहरणः–7. 10 विद्यार्थियों की ऊँचाई (सेमी.में) निम्नलिखित है–

117, 106, 123, 110, 125, 112, 115, 102, 100, 115

इन आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हलः– माध्यिका ज्ञात करने के लिए आँकड़ों को सबसे पहले बढ़ते हुए क्रम में रखना होगा।

100, 102, 106, 110, 112, 115, 115, 117, 123, 125

यहाँ प्रेक्षणों की संख्या सम है इसलिए न ही पाँचवाँ पद प्रेक्षणों के बिल्कुल मध्य है और न ही छठा पद। प्रेक्षणों का मध्यपद यानी माध्यिका पाँचवें और छठें पद के मध्य में हैं अतः ऐसी परिस्थिति में प्रेक्षणों के मध्य में पड़ने वाले दोनों पद का औसत ही माध्यिका होती है। इस उदाहरण में, पाँचवा पद = 112 सेमी.

छठा पद = 115 सेमी.

$$\text{माध्यिका} = \frac{\text{पाँचवाँ पद} + \text{छठा पद}}{2}$$

$$= \frac{112+115}{2} = 113.5 \text{ सेमी.}$$

इन आँकड़ों की माध्यिका 113.5 सेमी. है।

यानी जब प्रेक्षणों की कुल संख्या सम हो तब माध्यिका को ऐसे समझा जा सकता है–

$$\text{माध्यिका} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$

अभी तक हमने दिए हुए प्रेक्षणों की माध्यिका निकाली। अब दी हुई माध्यिका का प्रयोग कर अज्ञात प्रेक्षणों का मान पता करेंगे।

उदाहरणः–8. आरोही क्रम में व्यवस्थित आँकड़ों 7, 10, 12, p, q, 27, 31 की माध्यिका 17 है। यदि इसमें एक और प्रेक्षण 40 जोड़ दिया जाए तो माध्यिका 18 हो जाती है। p तथा q का मान ज्ञात कीजिए।

हलः– आप जानते हैं कि माध्यिका सदैव प्रेक्षणों के मध्य पद का मान होती है।

प्रेक्षणों 7, 10, 12, p, q, 27, 31 में माध्यिका चौथा पद है। यानी $p = 17$

अब यदि एक और प्रेक्षण 40 इसमें जोड़ दिया जाए तो प्रेक्षण होंगे 7, 10, 12, p, q, 27, 31, 40 अब चूँकि प्रेक्षणों की संख्या सम हो गई है अतः

$$\text{नई माध्यिका} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$

$$18 = \frac{p+q}{2}$$

$$18 = \frac{17+q}{2}$$

$$36 = 17+q$$

$$19 = q$$

अतः p और q के मान क्रमशः 17 तथा 19 हैं।

बहुलक

आपने औसत तथा माध्यिका को समझा। आँकड़ों से निष्कर्ष निकालने का एक और मापक 'बहुलक' है। बहुलक प्रेक्षणों में सबसे अधिक बार आया प्रेक्षण होता है । उदाहरण के लिए किसी परीक्षा में कक्षा 10 के 20 विद्यार्थियों के गणित विषय के प्राप्तांक निम्नलिखित थे:–

40, 25, 40, 35, 36, 45, 45, 40, 35, 39, 41, 42, 40, 25, 40, 42, 35, 38, 40

इन आँकड़ों में हम देखते हैं कि 40 अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या सबसे अधिक 6 है यानी बहुलक 40 हुआ।

आइए एक अन्य उदाहरण से बहुलक को समझें–

उदाहरण:–9. एक दुकानदार अपनी दुकान पर किसी विशेष कम्पनी के पाँच अलग–अलग नम्बर (6, 7, 8, 9, 10) के जूते बेचता है। तीन महीने में हुई बिक्री के आँकड़े इस प्रकार है–

जूते का नम्बर	6	7	8	9	10
बेचे गए जूतों की संख्या	18	24	41	19	9

तीन महीने में दुकानदार ने देखा कि काफी जूते बिक चुके हैं। अब दुकानदार को जूतों के खाली हुए स्टॉक को भरना है। क्या वह औसत या माध्यिका ज्ञात करके यह निर्णय ले पाएगा कि उसे कौन–से नम्बर के जूते जल्दी से जल्दी कम्पनी से मंगवाने होंगे? यह हम औसत व माध्यिका से पता नहीं कर सकते। उसे उस माप के जूते मंगवाने चाहिए जो सबसे ज्यादा बिकते हो।

उपरोक्त रिकॉर्ड को देखकर दुकानदार 8 नम्बर के जूते कम्पनी से मंगवाने का निर्णय लेता है। वह अन्य नम्बर के जूतों के स्टॉक को उनके कम खरीदारों को देखते हुए कुछ समय के लिए टाल देता है। आप देख सकते हैं कि '8' नम्बर के जूते की मांग सबसे अधिक है क्योंकि इनकी बिक्री सबसे ज्यादा हुई है।

अतः यहाँ बहुलक 8 है।

करके देखें

निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

1. 25, 9, 69, 34, 70, 36, 90, 70, 56, 70, 71

2. 56, 39, 94, 36, 39, 15, 39, 40

प्रश्नावली–1

1. निम्नलिखित सवालों के हल खोजने के लिए आप समांतर माध्य तथा माध्यिका में से किसका प्रयोग करेंगे और किसमें इनमें से कोई भी काम नहीं आएगा?
   (i) राज्य में सबसे अधिक लोकप्रिय अखबार कौन–सा है?
   (ii) एक महीने में हुई औसत वर्षा कितनी है?
   (iii) किसी परीक्षा में 100 विद्यार्थियों ने भाग लिया। इन विद्यार्थियों में से अंकों के आधार पर सबसे बेहतर प्रदर्शन करने वाले 50 विद्यार्थी कौन–से हैं?
   (iv) जनवरी के महीने में पेट्रोल का औसत दाम कितना रहा?
   (v) कौन–से खिलाड़ी ने अंतर्राष्ट्रीय क्रिकेट में अभी तक सबसे ज्यादा विकेट लिए हैं?
   (vi) दावत में बुलाए गए 20 व्यक्तियों के लिए कितनी चपातियों की आवश्यकता पड़ेगी, यह तय करने के लिए।
   (vii) किस महीने में ज्यादा बारिश होती है?

2. 10 महीनों में हुई वर्षा (मिमी.) के आँकड़े निम्नलिखित है–

   243.50, 266.00, 347.70, 240.00, 325.20,
   264.80, 356.30, 211.60, 246.90, 282.70

   इन आँकड़ों से औसत वर्षा ज्ञात कीजिए।

3. सबसे पहली 10 सम संख्याएँ कौन–सी है? इनका औसत ज्ञात कीजिए।

4. पाँच अलग–अलग शहरों में चावल के दाम का औसत ज्ञात कीजिए–

शहर	A	B	C	D	E
दाम (रुपये में)	25	28	30	31	32

5. तालिका में अंतर्राष्ट्रीय खेलों (ओलंपिक) में अधिकतम ऊँची कूद के आँकड़े दिए हुए हैं। इन आँकड़ों का औसत, बहुलक तथा माध्यिका ज्ञात कीजिए।

वर्ष	1960	1964	1968	1972	1976	1980	1984	1988	1992	1996	2000	2004
ऊँचाई (मीटर में)	1.85	1.90	1.82	1.92	1.93	1.97	2.02	2.03	2.02	2.05	2.01	2.06

6. आठ विद्यार्थियों का भार (किलोग्राम में) इस प्रकार है–

30, 32, 33, 38, 37, 41, 35, 40

विद्यार्थियों का औसत भार ज्ञात कीजिए।

7. लगातार पाँच वर्षों में किसी स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या निम्नलिखित है–

1150, 1250, 1360, 1275, 1310

इन पाँच वर्षों में स्कूल में औसतन कितने विद्यार्थी थे।

अंकगणितीय औसत, माध्यिका और बहुलक की सीमाएँ

आँकड़ों को समझने के लिए एक प्रतिनिधि मान अंकगणितीय औसत यानी माध्य है। हमने देखा यह आँकड़ों के बारे में हमें बहुत कुछ बताता है, लेकिन इससे कुछ बातें स्पष्ट नहीं हो पाती और इसे आँख मूँदकर इस्तेमाल करने से गड़बड़ हो सकती है। जैसे घर का दरवाजा घर में रहने वाले बड़ों व बच्चों की ऊँचाई का औसत लेकर नहीं बनाया जा सकता और न ही इस आधार पर कि ज्यादा लोग किस ऊँचाई के हैं।

जैसा कि हमने देखा कि इसके अलावा माध्यिका और बहुलक भी कई प्रश्नों का जवाब नहीं बता पाते। यह आँकड़ों को समझने में ज्यादा मददगार होते हैं किन्तु इन्हें भी ध्यान से उपयोग करना होता है। कई विशिष्ट बातें इनमें नहीं दिखती।

वर्गीकृत आँकड़ों में केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापक

ज्यादातर स्थितियों में प्रेक्षणों की संख्या इतनी अधिक होती हैं कि उनको ठीक तरह से पढ़ने और निष्कर्ष निकालने के लिए हमें उन्हें समूहों में बाँटकर (वर्गीकृत करके) छोटा करने की जरूरत होती है। अतः जब हम अवर्गीकृत आँकड़ों को वर्गीकृत आँकड़ों में बदल देते हैं, तब हमें इन्हें पढ़ने एवं निष्कर्ष निकालने के लिए माध्य, माध्यिका और बहुलक पता करने होंगे।

उदाहरण 13 में 10 के वर्ग अंतराल बनाकर वर्गीकृत आँकड़े दिए है। याद रखें कि वर्ग अंतरालों की बारम्बारताएँ निश्चित करते समय किसी ऊपरी वर्ग सीमा में आने वाले प्रेक्षण अगले वर्ग अंतराल में लेते है। जैसे– जिस वर्ष 50 लाख टन चावल का उत्पादन हुआ है, वह 40–50 वर्ग अंतराल में न होकर 50–60 वर्ग अंतराल में होगा।

हमने देखा कि अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य निकालने के लिए हम दिए गए प्रेक्षणों का जोड़ निकालते हैं। लेकिन वर्गीकृत आँकड़ों के लिए हम क्या करेंगे ? उस वर्ग में से कौन–सा मान लें,कौन–सी संख्या चुनें? क्या 40–50 के वर्ग के लिए 40 लें अथवा 50 या कोई और?

अतः यहाँ हमें एक ऐसी संख्या चाहिए जो सभी वर्ग अंतरालों का प्रतिनिधित्व करे। हम यह मान लेते हैं कि पूरे वर्ग अंतराल की बारम्बारता मध्य बिन्दु के चारों ओर केन्द्रित होती है, और हर वर्ग अंतराल का मध्य बिन्दु उस वर्ग का प्रतिनिधि है। इस मध्य बिन्दु (Mid Point) को वर्ग प्रतीक (Class Mark) भी कहते है।

उदाहरणः–10. एक उच्चतर माध्यमिक शाला के छोटे– बड़े बच्चों के वजन के आँकड़े नीचे दिए गए हैं, इसका समांतर माध्य पता करें।

वजन (किग्रा में)	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
बच्चों की संख्या	11	29	6	3	1

हलः– मध्य बिन्दु ज्ञात करने के लिए हमें वर्ग सीमा का उपयोग करना होता है। मध्य बिन्दु, वर्ग की निम्न सीमा तथा उच्च सीमा का औसत होता है। पहले हम मध्य बिंदु निकालेंगे। वर्ग (30–40) का मध्य बिन्दु देखें तो वह 35 होगा, यानी

$$\text{मध्य बिन्दु} = \frac{\text{निम्न वर्ग सीमा + उच्च वर्ग सीमा}}{2} = \frac{30+40}{2} = 35$$

मध्य बिन्दु को हम x_i द्वारा दर्शाते हैं। पहला मध्य बिन्दु $x_1 = 35$

इसी प्रकार हम बाकी वर्गों के मध्य बिन्दु ज्ञात कर सकते हैं जो कि क्रमशः 45, 55, 65 और 75 होंगे। अब प्रत्येक मध्य बिन्दु को प्रत्येक वर्ग की बारम्बारता से गुणा कर इसका उपयोग माध्य ज्ञात करने के लिए करेंगे। नई तालिका इस प्रकार बनेगी–

वजन (किग्रा.)	वर्षों की संख्या (f_i)	मध्य बिन्दु (x_i)	$(f_i x_i)$
30–40	11	35	385
40–50	29	45	1305
50–60	6	55	.....
60–70	3	65	.....
70–80	1	75	.....
योग	**50**		**2290**

तालिका को पूरा कीजिए।

अतः हम पाते हैं कि ऊपर बनी तालिका में $f_i x_i$ का योग यानी $\sum f_i x_i = 2290$ है।

अतः दिए हुए आँकड़ों का माध्य $\bar{X}$ होगा :

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2290}{50} = 45.8 \text{ किग्रा.}$$

यानी औसतन वजन प्रति बच्चा 45.8 किग्रा. हैं।

वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक

ऊपर हमने यह पता लगाया कि औसतन बच्चों का वजन क्या है। यदि हम यह जानना चाहते हैं कि कौन–सा वजन सबसे ज्यादा बच्चों का है, तो हमें इन आँकड़ों का बहुलक पता करना होगा।

आप यह जानते हैं कि बहुलक दिए गए आँकड़ों में से वह मान होता है जो सबसे अधिक बार दोहराया गया होता है। वर्गीकृत आँकड़ों में हम सबसे पहले बहुलक वर्ग की पहचान करते हैं। इन आँकड़ों में वर्ग (40–50) की आवृत्ति सबसे अधिक है अतः यह बहुलक वर्ग है । हमें इससे यह पता चल पाता है कि आँकड़ों का बहुलक इसी वर्ग अंतराल के बीच मौजूद है। इस प्रकार की स्थिति में बहुलक सूत्र में मान रखकर ज्ञात कर लेते हैं।

f_1 और f_0 में जितना अधिक अंतर होगा बहुलक l से उतना ही बड़ा होगा। इसी तरह f_2 और f_1 में जितना कम अंतर होगा बहुलक l से उतना ही बड़ा होगा और $l + d$ के करीब होगा। अगर यह सोचें कि बहुलक का अधिकतम मान कितना हो सकता है तो हम यह देखेंगे कि इसका अधिकतम मान l तथा f_1 व f_0 या f_2 व f_1 के अंतर d के योग के बराबर होगा। यानी बहुलक l और $l + d$ के बीच होगा।

बहुलक ज्ञात करने का सूत्र–

$$\text{बहुलक} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

इस सूत्र में–

l = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पहले की बारम्बारता

f_1 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता

f_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद की बारम्बारता

h = वर्ग अंतराल की माप

उदाहरण:–11. उदाहरण 10 की तालिका में बहुलक वर्ग = 40–50, बहुलक वर्ग की निम्न सीमा $(l) = 40$

बहुलक वर्ग की बारम्बारता $(f_1) = 29$

बहुलक वर्ग से ठीक पहले की बारम्बारता $(f_0) = 11$

बहुलक वर्ग से ठीक बाद की बारम्बारता $(f_2) = 6$

वर्ग माप $(h) = 10$

सूत्र में इन मानों को रखने पर

$$\text{बहुलक} = 40 + \left[\frac{29-11}{2(29)-11-6}\right] \times 10$$

$$= 40 + \left[\frac{18}{58-17}\right] \times 10 = 40 + \frac{18}{41} \times 10$$

$= 44.39$ किग्रा.

यह $l + d$ के करीब है क्योंकि f_0 बड़ा व f_2 छोटा है।

इस प्रकार वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक ज्ञात किया जाता। यह बहुलक के आँकड़ों के करीब हैं।

वर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका

उदाहरण:–12. किसी स्कूल में दसवीं कक्षा की लड़कियों की ऊँचाई इस प्रकार दी गई है–

ऊँचाई (सेमी.)	135–140	140–145	145–150	150–155	155–160
लड़कियों की संख्या	1	2	11	9	7

इन आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल:– दिए गए आँकड़ों की माध्यिका निकालने के लिए आवृत्ति से संचयी आवृत्ति निकालनी होगी। (आप कक्षा–9 में संचयी आवृत्ति निकालना सीख चुके हैं)

ऊँचाई	लड़कियों की संख्या (संचयी बारम्बारता)
140 से कम	1
145 से कम	1 + 2 = 3
150 से कम	3 + 11 = 14
155 से कम	14 + 9 = 23
160 से कम	23 + 7 = 30

यह 'से कम' प्रकार का संचयी बारम्बारता बंटन है जहाँ 140, 145,150,155,160 वर्ग की ऊपरी सीमाएँ हैं।

हम जानते हैं कि दिए गए वर्गीकृत आँकड़ों के मध्य का प्रेक्षण किसी वर्ग अंतराल में स्थित होगा। वह वर्ग अंतराल कैसे पता करें जिसमें मध्य प्रेक्षण स्थित है ?

ऊँचाई	लड़कियों की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता (cf)
135–140	1	1
140–145	2	3
145–150	11	14
150–155	9	23
155–160	7	30

इस माध्यिका वर्ग (Median Class) को निकालने के लिए हम सभी वर्गों की संचयी बारम्बारताएँ और $\frac{n}{2}$ ज्ञात करते हैं। अब हम वह वर्ग खोजते हैं जिसकी संचयी बारम्बारता $\frac{n}{2}$ से अधिक या उससे निकटतम है। यहाँ $n = 30$ है यानी $\frac{n}{2}$=15 हुआ अब 150–155 ही वह वर्ग है जिसकी संचयी बारम्बारता 23 है अर्थात 15 से ज्यादा है तो 15वाँ प्रेक्षण या माध्यिका 150–155 वर्ग में ही आएगा।

अतः 150–155 माध्यिका वर्ग है। माध्यिका वर्ग पता करने के बाद हम निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके माध्यिका निकाल सकते हैं–

$$\text{माध्यिका} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

जहाँ l = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा

n = प्रेक्षणों (कुल आवृत्ति)की संख्या

cf = माध्यिका वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता

f = माध्यिका वर्ग की बारंबारता

h = वर्ग माप (यह मानते हुए कि वर्ग माप बराबर है)

अब $\frac{n}{2}=15$, $l = 150$, $cf = 14$, $f = 9$, $h = 9$

$$\text{माध्यिका} = 150+\left(\frac{15-14}{9}\right)\times 5$$

$$=150+\frac{5}{9}$$

$$=150.55 \text{ सेमी.}$$

अतः लगभग आधी लड़कियों की ऊँचाई 150.55 सेमी.से कम है और शेष आधी लड़कियों की ऊँचाई 150.55 सेमी. से अधिक या उसके बराबर है।

इसी प्रकार हम आँकड़ों को 'से अधिक' के रूप में व्यवस्थित कर सकते हैं। यह तालिका में दिखाया गया है। इससे भी कई निष्कर्ष निकाल सकते हैं,जैसे 150 सेमी. से अधिक 16 लड़कियों की ऊँचाई है,आदि।

ऊँचाई	लड़कियों की संख्या
135 से अधिक या उसके बराबर	30
140 से अधिक या उसके बराबर	29
145 से अधिक या उसके बराबर	27
150 से अधिक या उसके बराबर	16
155 से अधिक या उसके बराबर	7

इस तालिका से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? चर्चा करके 3 निष्कर्ष लिखिए।

रूझान : अंतर्वेषण और बहिर्वेषण (Trend:Interpolation and Extrapolation)

FUNK4F

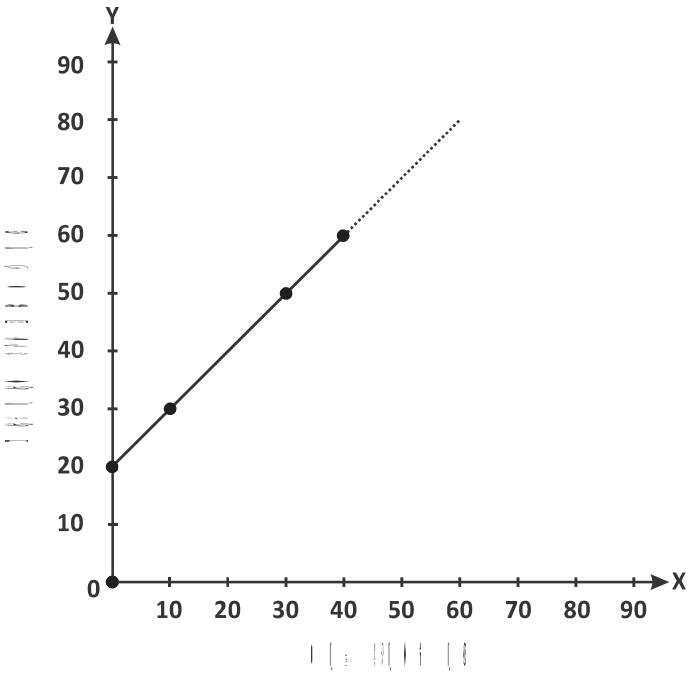
हमने देखा कि आँकड़ों को व्यवस्थित करने और उनके अध्ययन के बाद हमें कई बातें पता चलती हैं किन्तु कई बातें हम नहीं जान पाते। एक और सवाल यह है कि हमारे पास जिस अन्तराल के आँकड़े हैं उसके आगे के आँकड़ों के बारे में क्या हम कुछ कह सकते हैं? माना हमने एक शहर में कुल वर्षा के आँकड़े कई वर्षों तक ज्ञात किए। इसमें से बीच के कुछ वर्षों में कुल बारिश के आँकड़े हमारे पास उपलब्ध नहीं हैं क्योंकि इन्हें इकट्ठा करना रह गया । तो क्या हम इनका अनुमान लगा सकते हैं और हम यह भी सवाल पूछ सकते हैं कि क्या इन आँकड़ों से हम यह बता सकते हैं कि आने वाले साल में कुल कितनी बारिश होगी?

इन दोनों के बारें में सोचने के लिए हमें आँकड़ों के पैटर्न को देखना होगा। यानी क्या आँकड़ों में बदलाव का कोई निश्चित ढंग है? क्या उनमें हम कोई रूझान देख सकते हैं? हम आगे कुछ उदाहरणों के माध्यम से इस पर विचार करेंगे और यह देखेंगे कि ऐसा कब किया जा सकता है और कब नहीं।

मान लीजिए कि आप किसी द्रव्य को 40 मिनट तक गर्म करते हैं और चार अलग–अलग समय पर उसका तापमान नोट करते हैं जो इस तालिका में दिए हैं।

समय (मिनट में)	0	10	30	40
तापमान (डिग्री सेल्सियस में)	20	30	50	60

इन आँकड़ों को आलेख में दर्शाने पर बिंदु प्राप्त होते हैं। इन बिंदुओं से जोड़ती हुई एक रेखा खींचिए। हम कह सकते हैं कि शुरूआत में 0 मिनट पर तापमान 20^0C,10 मिनट बाद 30^0C, 30 मिनट बाद 50^0C और 40 मिनट बाद 60^0C नोट किया गया परक य । हम इन आँकड़ों को देखकर 20 मिनट और 60 मिनट बाद तापमान बता सकते हैं? जाहिर है नहीं। इन आँकड़ों में सिर्फ 0, 10, 30 और 40 मिनट पर तापमान दिए हैं। 20 मिनट, अंतराल 10–30 के बीच आता है। हम आलेख की मदद से 20 मिनट के संगत तापमान पता कर सकते हैं जो कि 40^0C है। (आलेख–2)



यहाँ दिए गए आँकड़ों में अनंत ऐसे आँकड़ें हैं जो दिए गए आँकडों के अंदर आते हैं और उनके संगत तापमान भी इस आलेख से बता सकते हैं, इसे अंतर्वेषण कहते हैं।

ध्यान दीजिए कि यहाँ आँकड़ों का परिसर (Range) 0 – 40 (मिनट) तक है। 50 मिनट इसके बाहर आता है। 50 मिनट पर तापमान पता करने के लिए हम इस आलेख की रेखा को उसी ओर आगे बढ़ाएँगे। आगे बढ़ाने पर हमें 50 मिनट पर तापमान 70^0C प्राप्त हुआ। इसी प्रकार आगे बढ़ाई गई रेखा पर अन्य संगत तापमान भी दर्शाये जा सकते हैं। यह तरीका जिसमें लिए गए आँकड़ों के रूख को आगे बढ़ाते हुए आँकड़ों के परिसर के बाहर के अनंत मान पता करते हैं, बहिर्वेषण कहते हैं। यह माना जाता है कि आँकड़ों के बदलने का रूख (Trend) एक ही है और आँकड़ों के परिसर के बीच व उसके बाहर दोनों के लिए उसमें कोई अप्रत्याशित उतार–चढ़ाव नहीं है।

अंतर्वेषण और बहिर्वेषण की सीमाएँ

ऊपर के उदाहरण में हमने आलेख के आधार पर 0 से 40 के बीच 20 मिनट पर व इस परिसर से बाहर भी 50 मिनट का तापमान बता दिया। क्या आप यह बता सकते हैं कि द्रव्य को 90 मिनट तक गर्म करें, तब तापमान कितना होगा? तालिका में आप देखते हैं कि प्रत्येक 10 मिनट में द्रव्य के ताप में 10^0C की बढ़ोतरी हो रही है इस आधार पर हम कह सकते हैं कि 90 मिनट पर तापमान 110^0C होगा। क्या खुले बर्तनों में गर्म हो रहे पानी का ताप हो सकता है? जाहिर है कि इस ग्राफ का रूख धीरे–धीरे बदला और उपलब्ध आँकड़ों के आधार पर बाद के समय की ओर ज्यादा नहीं किया जा सकता। दूसरा प्रश्न यह भी है कि क्या अंतर्वेषण एवं बहिर्वेषण सभी आँकड़ों में किया जा सकता है। क्या निम्नलिखित आँकड़ों में भी हम यह कर सकते हैं? आइए देखें:–

ओलंपिक मे अधिकतम ऊँची कूद के आँकड़े निम्नानुसार है–

वर्ष	1960	1964	1972	1976	1980
ऊँचाई(मीटर में)	1.85	1.90	1.92	1.93	1.97

इन आँकड़ों के आधार पर क्या आप बता पाएँगे कि 1956 में ऊँची कूद की अधिकतम ऊँचाई कितनी रही होगी?

यह संभव नहीं है क्योंकि इनमें कोई रूझान नहीं है । ये तो उस प्रतियोगिता में अधिकतम दूरी के रिकार्ड किए गए आँकड़े हैं। इसी प्रकार यदि जनसंख्या के आँकड़ों में कोई रूझान नहीं है तो इसमें भी हम अनुमान नहीं लगा सकते कि आगे के वर्ष में जनसंख्या कितनी होगी या दिए गए वर्षों के बीच किसी वर्ष में जनसंख्या कितनी रही होगी? यानी अंतर्वेषण एवं बहिर्वेषण की सीमाएँ हैं जो आँकड़ों के रूप व रूख पर आधारित होते हैं हम प्रत्येक प्रकार के आँकड़ों के लिए अंतर्वेषण और बहिर्वेषण नहीं कर सकते।

सोचें एवं चर्चा करें

नीचे की तालिका में कक्षा दसवीं की परीक्षा के परिणाम दिए गए है:–

वर्ष	2001	2002	2003	2005
परिणाम	88%	80.5%	66%	55%

क्या आप 2004 एवं 2006 के परीक्षा परिणाम का अनुमान लगा सकते हैं?

ग्राफ से आँकड़े निकालना

करके देखें

आप अपने स्कूल के अलग–अलग कक्षाओं के 40 लड़के या लड़कियों की उम्र एवं उनकी ऊँचाई(सेमी.), का आँकड़ा एकत्रित कीजिए एवं उन बच्चों की आयु तथा उनकी आयुवार औसत ऊँचाई के बीच ग्राफ खींचिए। (आँकड़े लेते समय ध्यान रखें कि समान आयु वाले बच्चों की संख्या 3 से 5 अवश्य हो)

इस ग्राफ के आधार पर आप बताएँ–

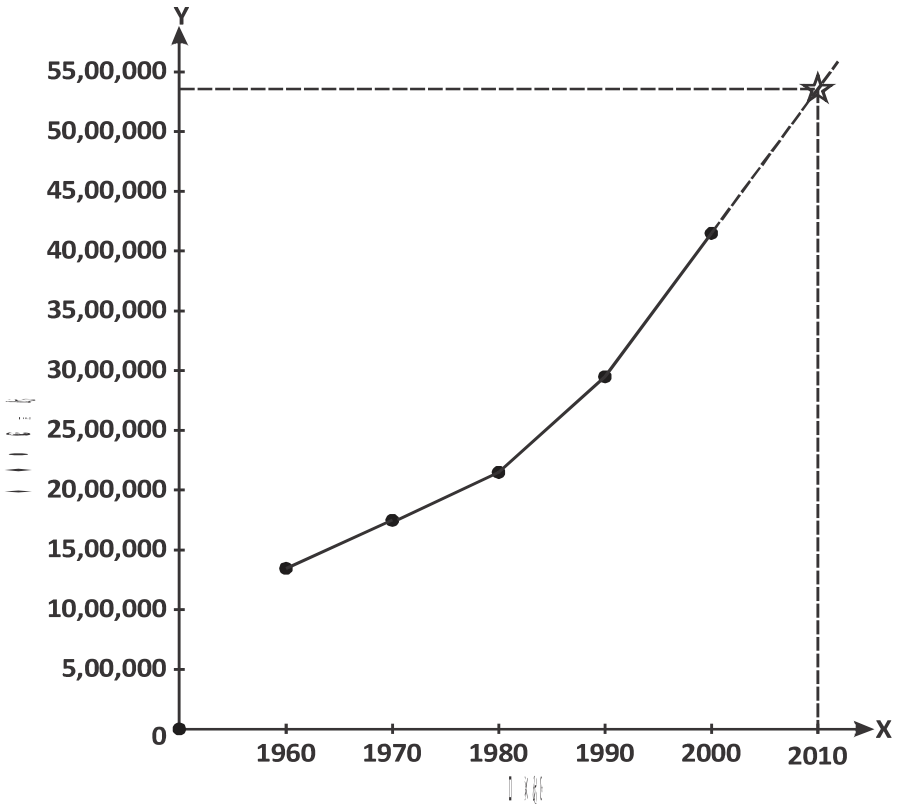
1. 15 वर्ष की उम्र वाली लड़कियों की औसत ऊँचाई कितनी है?
2. 10 वर्ष की उम्र वाली लड़कियों की औसत ऊँचाई कितनी है?
3. 13 वर्ष से लेकर 15 वर्ष तक की उम्र वाली लड़कियों की औसत ऊँचाई में इस दौरान कितनी वृद्धि हुई?
4. क्या आप पता लगा सकते हैं कि 14 वर्ष की उम्र वाली लड़कियों की औसत ऊँचाई कितनी होगी? कैसे?
5. 16 वर्ष की उम्र वाली लड़कियों की औसत ऊँचाई कितनी होगी?

   सवाल 4 एवं 5 के हल कैसे पता किए जा सकते हैं?

संकेतः– X–अक्ष पर 14 वर्ष को दर्शाइए और उसे X–अक्ष के लंबवत चलकर आलेख की रेखा के सीधवाली बिंदु से मिलाइए। आलेख की रेखा पर मिले बिन्दु को Y–अक्ष से मिलाइए। Y–अक्ष पर जो मान मिलेगा वह 14 वर्ष की उम्र वाले बच्चों की औसत ऊँचाई दिखाएगा। इसी प्रकार आप आपके द्वारा लिए गए आँकड़ों में से किसी भी उम्र वाले बच्चों की औसत ऊँचाई पता कर सकते हैं।

6. क्या आप इस ग्राफ 8 वर्ष व 20 वर्ष पर इन्हीं लड़कियों की औसत ऊँचाई पता कर सकते हैं? चर्चा करके लिखें।

उदाहरण:–13. जनसंख्या के आँकड़ों से संबंधित निम्नलिखित ग्राफ को देखिए तथा ग्राफ के आधार पर नीचे लिखे सवालों के जवाब दीजिए।



(i) वर्ष 1980 में जनसंख्या कितनी थी?

(ii) वर्ष 1960 से 2000 तक जनसंख्या में कितनी वृद्धि हुई?

(iii) वर्ष 1975 में जनसंख्या कितनी थी?

(iv) वर्ष 1995 में जनसंख्या कितनी थी? पता लगाइए।

(v) क्या दिए गए आँकड़ों के आधार पर 2010 की जनसंख्या का अनुमान लगाया जा सकता है?

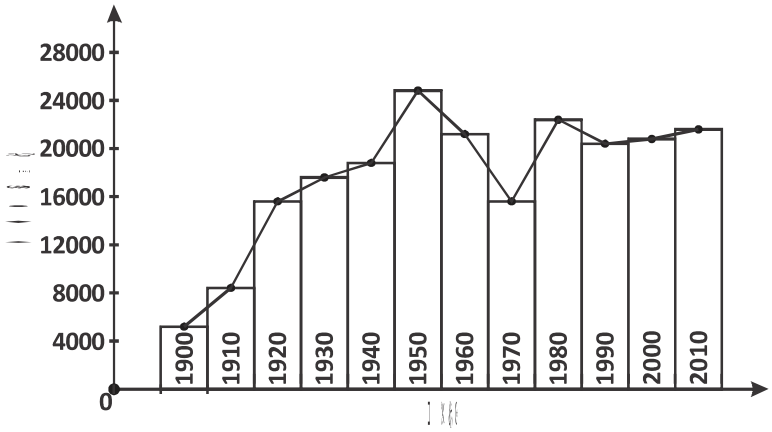
प्रश्न (i) और (ii) के आँकड़ें हमें सीधे–सीधे ग्राफ द्वारा मिल सकते हैं। परंतु प्रश्न (iii), (iv) और (v) के आँकड़ें हमें ग्राफ द्वारा निकालने होंगें। ग्राफ में प्रदर्शित आँकड़ों को यदि देखें तो उसमें लगातार वृद्धि होती हुई दिखाई पड़ रही है। X–अक्ष पर वर्ष 1975,1995 और 2010 को दर्शाने के साथ–साथ Y–अक्ष पर भी पैमाना 4,500,000 से 5,500,000 तक बढ़ाना होगा। अब यदि ग्राफ पर ज्ञात हुए बिन्दुओं को Y–अक्ष पर स्थित संगत बिंदुओं से मिलाएँ तो 1975,1995 और 2010 की जनसंख्या के अनुमानित आँकड़े मिल सकते हैं (ग्राफ– देखें)। इस प्रकार हम एकत्रित आँकड़ों के आधार पर अनुमानित आँकड़ें प्राप्त कर सकते हैं।

अनुमानित आँकड़ों के आधार पर वर्तमान में भविष्य के लिए नई योजनाएँ बनाने में मदद होती है। जैसे अनुमानित जनसंख्या के वास्तविकता में बदलने से पहले नियंत्रित करने की योजना वर्तमान में ही बनायी जा सकती है।

नोटः– 2010 के अनुमानित आँकड़े के लिए यह माना गया है कि जनसंख्या बढ़ने का रूझान वही रहेगा। यह आवश्यक नहीं है कि ऐसा हो उस समय जनसंख्या बढ़ने को रोकने के बहुत प्रयास हो रहे थे। उससे रूझान पर क्या असर आया कह नहीं सकते, इसलिए इस तरह का बहिर्वेषण इस समझ से ही किया जाता है कि यह एक अनुमान मात्र है।

उदाहरणः–14. किसी देश की जनसंख्या को विभिन्न वर्षों में निम्नलिखित आलेख द्वारा दर्शाया गया है–

आलेख का अध्ययन कर निम्नलिखित सवालों के हल खोजिए।



(i) सबसे अधिक जनसंख्या कौन से वर्ष में थी?

(ii) सबसे कम जनसंख्या कितनी है?

(iii) कौन–कौन से वर्ष ऐसे हैं जिसमें जनसंख्या में वृद्धि हुई?

(iv) कौन–से वर्ष ऐसे हैं जिसमें जनसंख्या में गिरावट आई?

(v) प्रारम्भ के पाँच वर्षों में जनसंख्या में लगातार वृद्धि हुई है या कमी आई है?

आइए इन आँकड़ों पर थोड़ा और विचार करते हैं।

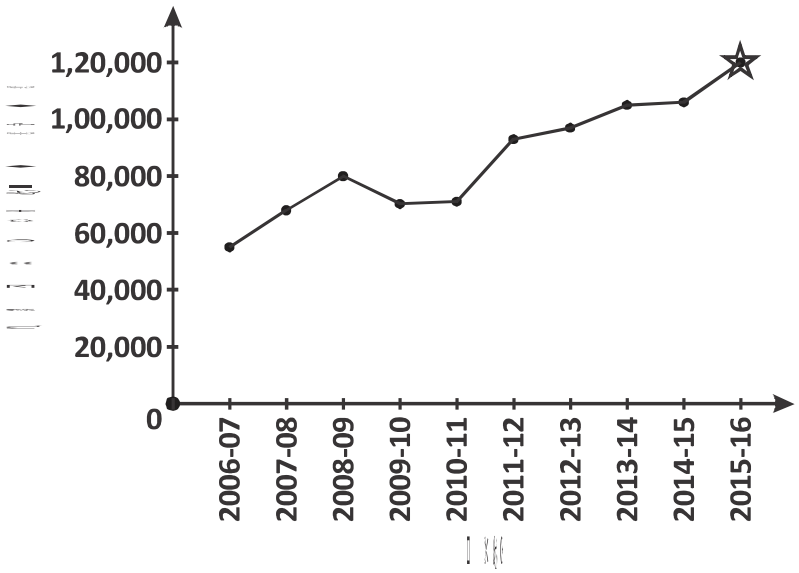
यदि हम वर्ष 1900 से वर्ष 1950 तक के प्रारम्भिक पचास वर्षों के आँकड़ों को देखें तो पता चलता है कि जनसंख्या में लगातार वृद्धि हुई है। उसके बाद के वर्षों की बात करें तो वर्ष 1950 से 1970 तक जनसंख्या में गिरावट आई है और उसके बाद फिर से वृद्धि दर्ज की गई। वर्ष 1990 से 2010 तक के आँकड़े भी जनसंख्या में वृद्धि दिखा रहे हैं।

आपने देखा कि बार–बार जनसंख्या के आँकड़ों के बदलने की दिशा में कई बार परिवर्तन आया। अलग–अलग समय पर आँकड़ों में वृद्धि तथा गिरावट से, आँकड़ों में परिवर्तन की दिशा कई बार बदली इसे आँकड़ों का रूझान कहते हैं। आँकड़ों का रूझान हमें आँकड़ों के बारे में भविष्य के पूर्वानुमान लगाने में मदद करता है।

आइए, इसे एक और उदाहरण से समझते हैं–

उदाहरण:–15. किसी प्रदेश में मछली उत्पादन से संबंधित आँकड़े नीचे ग्राफ द्वारा प्रदर्शित किए गए है:–

ग्राफ का अध्ययन कीजिए तथा निम्नलिखित सवालों के जवाब खोजिए–



(i) वर्ष 2011–12 में कितना मछली उत्पादन हुआ?

(ii) अधिकतम मछली उत्पादन कौनसे वर्ष में हुआ?

(iii) क्या मछली उत्पादन में लगातार वृद्धि दिख रही है?

जब भी हम आँकड़ों का अध्ययन करते हैं हम आँकड़ों में बदलाव के कारणों के बारे में भी सोचते हैं, जैसे– उपरोक्त उदाहरण में मछली उत्पादन में वृद्धि होने के क्या कारण हैं।

वर्ष 2007 में उस प्रदेश की सरकार ने 'मत्स्य मित्र' नामक योजना की पहल की जिसमें मत्स्य विभाग ने समुदाय को साथ में जोड़कर मछली पालन को प्रोत्साहित किया। अब प्रदेश विभाग के साथ हजारों की संख्या में समुदाय के लोग हैं जो विभाग को मछली पालन के लिए अनुकूल स्थान खोजने में मदद करते हैं साथ ही मछली उत्पादन से संबंधित महत्वपूर्ण आँकड़े दर्ज करने में भी भूमिका निभाते हैं।

मछली उत्पादन में समुदाय को सक्रिय रूप से जोड़ लेने के कारण प्रदेश द्वारा किए गए उत्पादन में लगातार वृद्धि हुई। पिछले आँकड़ों के आधार पर बहिर्वेषण करने पर यह अनुमान लगाया गया कि वर्ष 2015–16 तक मछली उत्पादन 1,20,000 टन तक पहुँच जाएगा।

FUXG63

प्रश्नावली–2

1. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए–

महिला शिक्षकों की संख्या (%में)	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65	65–75	75–85
राज्यों की संख्या	6	11	7	4	4	2	1

इस तालिका के आधार पर महिला शिक्षकों की संख्या के बारे में 5 निष्कर्ष लिखिए।

2. एकदिवसीय अंतर्राष्ट्रीय मैचों में बहुत से गेंदबाजों द्वारा लिए गए कुल विकेटों की संख्या के आँकड़े तालिका में दिए गए हैं। इनका बहुलक ज्ञात कीजिए–

विकेटों की संख्या	0–50	50–100	100–150	150–200	200–250	250–300
गेंदबाजों की संख्या	4	5	16	12	3	2

इस तालिका के आँकड़ों के बारे में 5 निष्कर्ष लिखिए।

3. निम्नलिखित तालिका में 35 शहरों की साक्षरता दर (प्रतिशत में) के आँकड़े दिए गए हैं। इन आँकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए–

साक्षरता दर (%में)	45–55	55–65	65–75	75–85	85–95
शहरों की संख्या	3	10	11	8	3

इस तालिका के आँकड़ों के बारे में 3 निष्कर्ष लिखिए

4. किसी अस्पताल में एक साल में भर्ती हुए मरीजों के आँकड़ें निम्नलिखित हैं। इनका माध्य ज्ञात कीजिए–

उम्र (वर्षों में)	5–15	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65
मरीजों की संख्या	6	11	21	23	14	5

इस तालिका के आँकड़ों के बारे में 3 निष्कर्ष लिखिए

5. किसी परीक्षा में विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्नलिखित सारणी में दी गई है–

प्राप्तांक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
विद्यार्थियों की संख्या	1	12	24	32	10	5

प्राप्तांक की माध्यिका ज्ञात कीजिए। इस तालिका के आँकड़ों के आधार पर 3 निष्कर्ष लिखिए।

हमने सीखा

1. स्तंभ आलेख व तालिकाएँ आँकड़ों को समझने में मदद करती हैं।
2. विभिन्न परिस्थितियों में विचाराधीन आँकड़े ही प्रेक्षण होते हैं।
3. औसत एक ऐसी संख्या है जो आँकड़ों के पूरे समूह का गुण बताती है।
4. औसत दिए गए प्रेक्षणों के सबसे कम व सबसे अधिक मान के बीच में ही होता है।
5. आँकड़ों के औसत को सांख्यिकी में समांतर माध्य कहते हैं।
6. माध्य, माध्यिका एवं बहुलक आँकड़ों के प्रतिनिधि मान होते हैं।
7. माध्यिका वह आँकड़ा है जो व्यवस्थित प्रेक्षणों में आए मान के ठीक बीच में होता है।
8. बहुलक वे मान होते हैं जो दिए गए प्रेक्षणों में सबसे अधिक बार होते हैं।
9. आँकड़ों में बहुत अधिक अंतर होने पर उन आँकड़ों के माध्य से निकाला गया निष्कर्ष त्रुटिपूर्ण हो सकता है।
10. व्यक्तिगत श्रेणी में दिए गए आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात करने के लिए आँकड़ों को बढ़ते या घटते क्रम में व्यवस्थित करते हैं।
11. दिए गए प्रेक्षणों में अधिकतम व न्यूनतम मान के अंतर को परिसर कहते हैं। यह प्रेक्षणों के मान का फैलाव दिखाता है।
12. व्यक्तिगत श्रेणी में समांतर माध्य ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित है–

$$\text{समांतर माध्य} = \frac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{कुल प्रेक्षणों की संख्या}}$$

13. असतत व वर्गीकृत श्रेणी में समांतर माध्य निकालने का सूत्र निम्नलिखित है–

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

14. व्यक्तिगत श्रेणी के आँकड़ों से माध्यिका ज्ञात करते समय प्रेक्षणों (पदों) की संख्या के विषम होने पर निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं–

$$\text{माध्यिका} = \left(\frac{n+1}{2}\right)\text{वाँ पद}$$

15. व्यक्तिगत श्रेणी के आँकड़ों से माध्यिका ज्ञात करते समय प्रेक्षणों (पदों)की संख्या के सम होने पर निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं–

$$\text{माध्यिका} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वाँ पद}}{2}$$

16. वर्गीकृत श्रेणी में दिए गए आँकड़ों की माध्यिका की गणना के निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं–

$$\text{माध्यिका} = \ell + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

17 वर्गीकृत श्रेणी में दिए गए आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं–

$$\text{बहुलक} = \ell + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h$$

18. आलेख की मदद से आँकड़ों के परिसर में ऐसे मान भी ज्ञात कर सकते है जो आँकड़ों में नहीं दिए गए हैं, अंतर्वेषण कहलाता है। किन्तु ऐसा हर प्रकार के आँकड़ों के लिए संभव नहीं है।

19. आलेख में रेखा के बढ़ने की दिशा व घटने की दिशा के आधार पर आँकड़ों के परिसर के बाहर के मान ज्ञात करना बहिर्वेषण कहलाता है। यह भी आँकड़ों में रूझान स्पष्ट होने की स्थिति में किया जा सकता है।

उत्तरमाला–1

1. (i) इनमें से कोई नहीं (ii) समांतर माध्य (iii) माध्यिका (iv) समांतर माध्य (v) बहुलक (vi) समांतर माध्य (vii) इनमें से कोई नहीं
2. 278.47 मिमी. 3. 11 4. 29.2 रूपये
5. समांतर माध्य = 1.965 मीटर , माध्यिका = 1.99, बहुलक = 2.02
6. 35.75 किलोग्राम

उत्तरमाला–2

1. 39.71% 2. 136.66 3. 69.42%
4. माध्य = 35.37, 5. 31.56