

दो चरों का रैखिक समीकरण

[LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES]

अध्याय

02



रीमा ने सलमा से पूछा किसी खंभे का एक चौथाई भाग नीले रंग में, एक तिहाई भाग लाल रंग में तथा खंभे का शेष 10 मीटर भाग काले रंग से रंगा हुआ है, खंभे की कुल लंबाई कितनी होगी?

सलमा ने कहा कि पिछली कक्षा में हमने एक चर के रैखिक समीकरण में सीखा है कि इस तरह की परिस्थिति में एक चर (अज्ञात) का मान ज्ञात करने के लिए एक चर का समीकरण बनाया जाता है और फिर उसे हल करके चर (अज्ञात) का मान ज्ञात कर लिया जाता है।

रीमा – अच्छा! तो, यहाँ हम खंभे की लंबाई कैसे जानेंगे?

सलमा – यदि खंभे की कुल लंबाई को x मीटर मान लें,

तब, खंभे के नीले भाग की लंबाई $= \frac{x}{4}$ मीटर

खंभे के लाल भाग की लंबाई $= \frac{x}{3}$ मीटर

खंभे का काला भाग = 10 मीटर

अतः खंभे की कुल लंबाई = नीले भाग की लंबाई + लाल भाग की लंबाई + काले भाग की लंबाई

$$x = \frac{x}{4} + \frac{x}{3} + 10$$

$$x = \frac{3x + 4x + 120}{12}$$

$$12x = 7x + 120$$

$$12x - 7x = 120$$

$$5x = 120$$

$$x = \frac{120}{5}$$

$$x = 24 \text{ मीटर}$$

अर्थात् खंभे की कुल लंबाई 24 मीटर है।

क्या आप बता सकते हैं कि खंभे के नीले व लाल भाग की लंबाई कितनी होगी?

सलमा और रीमा ने बातों-बातों में कुछ और प्रश्नों को हल किया।

उदाहरण:-1. सलमा – मेरे अंक तुम्हारे अंक से दो अधिक हैं और दोनों के अंकों का योग 14 है तो हम दोनों के कितने-कितने अंक होंगे?

हल:- रीमा – माना मेरे अंक $=x$

तुम्हारे अंक $x + 2$ होंगे।

\therefore दोनों के अंकों का योग 14 है

$$\therefore x + x + 2 = 14$$

$$\Rightarrow 2x + 2 = 14$$

$$\Rightarrow 2x = 14 - 2$$

$$\Rightarrow 2x = 12$$

$$\Rightarrow x = \frac{12}{2}$$

$$\Rightarrow x = 6$$

यानी मेरे अंक 6 और तुम्हारे अंक 8 होंगे।

ऐसे ही उन्होंने कई सवाल किए। कुछ सवाल और उनके हल हम यहाँ दे रहे हैं।

उदाहरण:-2. नीचे दिए गए त्रिभुज के प्रत्येक अंतःकोण की माप क्या होगी?

हल:- \therefore त्रिभुज के तीनों अंतःकोणों का योग 180° होता है।

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$x^\circ + (x + 40)^\circ + (x + 20)^\circ = 180^\circ$$

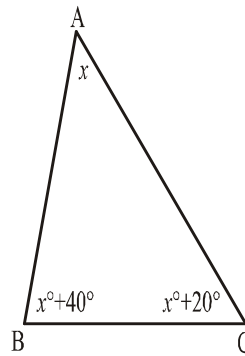
$$\Rightarrow 3x^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3x^\circ = 180^\circ - 60^\circ$$

$$\Rightarrow 3x^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow x^\circ = \frac{120^\circ}{3}$$

$$\Rightarrow x^\circ = 40^\circ$$



\therefore दिए गए त्रिभुज के प्रत्येक अंतःकोण की माप निम्नलिखित है—

$$\angle A = x^\circ = 40^\circ,$$

$$\angle B = x^\circ + 20^\circ = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$$

$$\angle C = x^\circ + 40^\circ = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$$

करके देखें

1. एक थैले में 50 पैसे के सिक्के हैं। इन सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए यदि थैले में 30 रुपये हैं।
2. एक समकोण त्रिभुज के एक कोण का माप 60° है तो दूसरे कोण का माप ज्ञात कीजिए।
3. पिता की आयु पुत्र की आयु की दुगुनी है तो दोनों की वर्तमान आयु क्या होगी?

समीकरण बनाना

सलमा और रीमा ने कुछ ऐसे सवालों पर भी चर्चा की।

मेरे बैग में 50 पैसे और 1 रुपये के सिक्के हैं। बैग में कुल 100 सिक्के हैं, तो 50 पैसे और 1 रुपये के कितने-कितने सिक्के हैं?

यहाँ पर दो अलग-अलग प्रकार के सिक्के हैं और उनकी संख्या अलग-अलग है। हमें दोनों ही पता नहीं है अतः दोनों की संख्या को अज्ञात द्वारा दर्शाना होगा। अतः हम 50 पैसे के सिक्कों की संख्या को x तथा 1 रुपये के सिक्कों की संख्या को y मानेंगे।

हम जानते हैं कि बैग में कुल सिक्कों की संख्या 100 है यानी

$$x + y = 100$$

लेकिन हम अभी यह नहीं बता सकते हैं कि दोनों प्रकार के सिक्कों की संख्या कितनी-कितनी होगी?

इसी प्रकार के कुछ और उदाहरण देखें जिनमें समीकरण तो बनता है लेकिन उसके हल का पता नहीं चल पाता।

उदाहरण:-3. कुछ हिरणों और कुछ सारस पक्षी के पैरों की कुल संख्या 180 है।

हल:-

माना हिरणों की संख्या = x

सारस पक्षियों की संख्या = y

चूँकि एक हिरण के 4 पैर होते हैं

अतः हिरणों के पैरों की संख्या = $4x$

चूँकि एक सारस पक्षी के 2 पैर होते हैं

अतः सारस पक्षियों के पैरों की संख्या = $2y$

कथन के अनुसार

हिरणों के पैरों की संख्या + सारस पक्षियों के पैरों की संख्या = 180

अर्थात् $4x + 2y = 180$

उदाहरण:-4. एक कॉपी और दो पेंसिलों की कीमत 45 रुपये हैं।

हल:- माना 1 कॉपी की कीमत = x रुपये

1 पेंसिल की कीमत = y रुपये

तब एक कॉपी की कीमत + दो पेंसिलों की कीमत = 45

$$x + 2y = 45$$

करके देखें

अब आप निम्नलिखित कथनों के समीकरण बनाकर हल पता करने की कोशिश करें-

1. किन्हीं दो संख्याओं का योग 8 है।
2. शशांक और उसके पिता की आयु का अंतर 30 वर्ष है।
3. एक थैले में 1 रुपये व 5 रुपये के 100 सिक्के रखे हैं।
4. एक दुकान में 3 पेन व 4 कॉपियों का मूल्य 105 रुपये हैं।
5. किसी स्थान पर कुछ मुर्गियाँ व कुछ गायें हैं, जिनके पैरों की संख्या 60 है।

युगपद् समीकरण

ऊपर के उदाहरणों में हमने परिस्थितियों से समीकरण तो बना लिए लेकिन उनके हल नहीं बता पाए।

अब हम निम्नलिखित परिस्थितियों पर चर्चा करते हैं-

एक पिता ने अपने दो पुत्रों सौरभ और संतोष में 8 रुपये बाँटे। क्या हम यह जान पाएँगे कि सौरभ और संतोष को कितने-कितने रुपये मिले?

यदि सौरभ को x व संतोष को y रुपये मिले हों तब इसका समीकरण निम्नलिखित होगा-

$$x + y = 8 \dots\dots\dots(1)$$

इस समीकरण के आधार पर हम कह सकते हैं कि जब सौरभ को 1 रुपये तब संतोष को 7 रुपये, जब सौरभ को 2 रुपये तब संतोष को 6 रुपये और इसी प्रकार आगे सोचने पर हम देखते हैं कि जब सौरभ को 7 रुपये तो संतोष को 1 रुपये मिले होंगे। सौरभ व संतोष को 8 रुपये को बाँटने के संभव तरीकों को नीचे दी गई सारणी के रूप में लिख सकते हैं-

रुपये							
सौरभ	1	2	3	4	5	6	7
संतोष	7	6	5	4	3	2	1

आपने देखा कि हम यह बता नहीं पाए कि वास्तव में सौरभ व संतोष को कितने रुपये मिले? लेकिन अब यदि हमें पता हो कि पिता ने सौरभ को संतोष के तीन गुने रुपये दिये हों तब इसे निम्नलिखित समीकरण के रूप में लिखेंगे—

$$x = 3y \dots\dots\dots(2)$$

समीकरण (1) में $x = 3y$ रखने पर हमें एक चर का निम्नलिखित समीकरण मिलता है—

$$3y + y = 8$$

$$4y = 8$$

$$y = \frac{8}{4}$$

$$y = 2$$

y का मान समीकरण (2) में रखने पर—

$$x = 3y$$

तब $x = 3 \times 2$

$$x = 6$$

यानी संतोष को 2 रुपये और सौरभ को संतोष का 3 गुना 6 रुपये मिले।

इसी प्रकार उदाहरण-3 में हिरणों एवं सारस पक्षियों के पैरों की संख्या 180 होने पर हमारा समीकरण बना था— $4x + 2y = 180 \dots\dots\dots(1)$

और अब हिरणों की आँखों की संख्या + सारस के आँखों की संख्या = 120

अतः $2x + 2y = 120 \dots\dots\dots(2)$ (हिरण की 2 आँखें और सारस की 2 आँखें)

समीकरण (2) से

$$2y = 120 - 2x$$

इस मान को समीकरण (1) में रखने पर

$$\Rightarrow 4x + 120 - 2x = 180$$

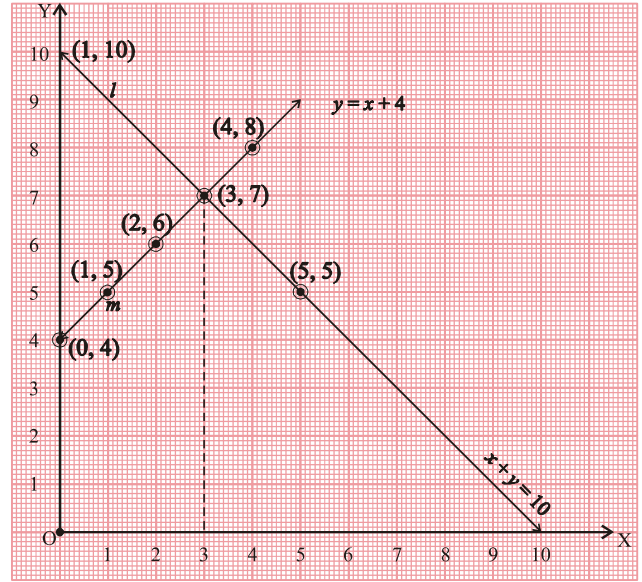
$$\Rightarrow 2x = 60$$

$$\Rightarrow x = \frac{60}{2}$$

$$\Rightarrow x = 30$$

x अर्थात् हिरणों की संख्या 30 है। x के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर

$$\Rightarrow 4(30) + 2y = 180$$



आलेख-2

$$\begin{aligned} \Rightarrow 120 + 2y &= 180 \\ \Rightarrow 2y &= 180 - 120 \\ \Rightarrow 2y &= 60 \\ \Rightarrow y &= \frac{60}{2} \\ \Rightarrow y &= 30 \end{aligned}$$

y अर्थात् सारस पक्षियों की संख्या भी 30 है।

उपरोक्त उदाहरणों में हमने देखा कि परिस्थितियों को लेकर दो चरों का जब एक ही समीकरण बना तब हम प्रश्न का जवाब देने में अनुमान लगाए लेकिन जैसे ही दूसरी परिस्थिति पर दूसरा समीकरण बना तब हम सटीक और निश्चित जवाब दे पाए।

सोचें एवं चर्चा करें

क्या निम्नलिखित परिस्थितियों से बने समीकरणों से जवाब मिल सकते हैं? यदि नहीं तो क्यों नहीं?

1. किसी समान्तर चतुर्भुज में आसन्न कोणों के युग्म में से एक कोण का माप दूसरे कोण का $\frac{4}{5}$ गुना है। कोणों के माप पता करें।
2. एक वृक्ष पर बैठे हुए मैना और कोयलों की संख्या 15 है। यदि उनके पैरों की संख्याओं का योग 36 है तब मैना व कोयलों की संख्या बताइए।
3. एक टोकरी में सेब और आम की कुल संख्या 39 है। यदि दूसरी टोकरी में कुछ आम और कुछ संतरे हैं तब दूसरी टोकरी में कितने आम रखे हैं?

समीकरणों के हल

अलग-अलग संदर्भों में बने समीकरणों से जवाब कैसे जानें? समीकरणों से जवाब जानने हेतु उन्हें हल किया जाता है। समीकरणों को हल करने के अलग-अलग तरीके हैं। हम यहाँ कुछ तरीकों को जानेंगे।

आलेखी विधि

आपने निर्देशांक ज्यामिति या ग्राफ में दो चरों वाले समीकरणों को ग्राफ में प्रदर्शित करना सीख लिया है। हम अलग-अलग संदर्भों से बने समीकरणों को भी ग्राफ पर दर्शा सकते हैं और उनके हल के बारे में जान सकते हैं।

अब हम हिरण और सारस के पैरों के संबंध पर बने समीकरण और उनकी आँखों के संबंध पर बने समीकरण को ग्राफ पर दर्शाकर देखते हैं कि उनके हल कैसे प्राप्त हो रहे हैं?

पैरों के समीकरण $4x + 2y = 180$ के लिए हम सारणी बनाते हैं।

$$2y = 180 - 4x$$

$$y = \frac{180 - 4x}{2}$$

$$y = 90 - 2x \quad \dots\dots\dots(3)$$

समीकरण (3) में $x = 10, 20, 30, \dots$ इत्यादि रखने पर y के संगत मानों की सारणी बनाते हैं—

सारणी-1				
x	10	20	30	40
y	70	50	30	10

इसी प्रकार आँखों के समीकरण $2x + 2y = 120$ के लिए

$$2y = 120 - 2x$$

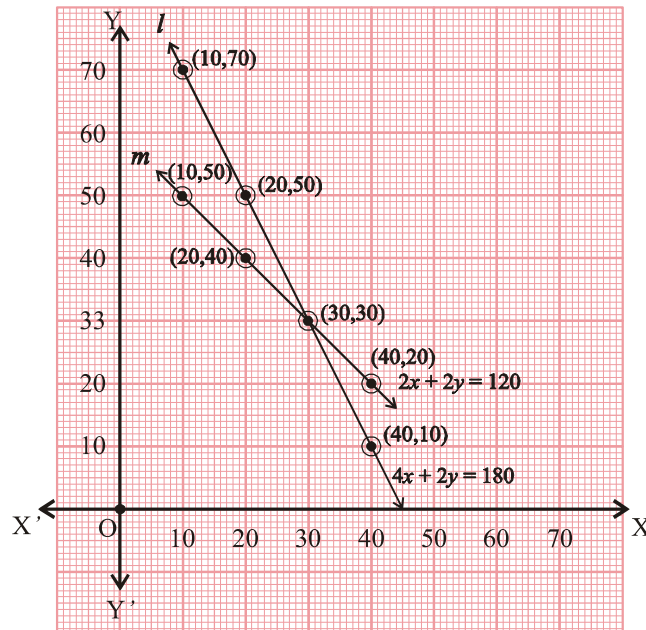
$$y = \frac{120 - 2x}{2}$$

$$y = 60 - x \quad \dots\dots\dots(4)$$

समीकरण (4) में $x = 10, 20, 30, 40, \dots$ इत्यादि रखने पर y के संगत मानों की सारणी नीचे दी गई है—

सारणी-2				
x	10	20	30	40
y	50	40	30	20

अब दोनों सारणियों की सहायता से आलेख खींच लेते हैं ।



आलेख-1

आप देखते हैं कि ग्राफ में प्रदर्शित रेखाओं का कटान बिन्दु (30, 30) है। यही हिरण और सारस पक्षियों की संख्या भी है जो हमारे द्वारा पूर्व में निकाली गई है।

करके देखें

आप $x + y = 8$ व $x = 3y$ को ग्राफ पर दर्शाकर हल निकालें।

निम्नलिखित सवाल को भी इसी तरीके से हल किया गया है—

उदाहरण:-5. कक्षा दसवीं के 10 विद्यार्थियों ने एक विज्ञान क्विज में भाग लिया। क्विज में भाग लेने वाले विद्यार्थियों में लड़कियों की संख्या, लड़कों से 4 अधिक थी तब लड़के एवं लड़कियों की संख्या क्या रही होगी?

हल:- माना विज्ञान क्विज में भाग लेने वाले लड़कों की संख्या x व लड़कियों की संख्या y थी।

तब कुल विद्यार्थियों की संख्या = लड़कों की संख्या + लड़कियों की संख्या

$$10 = x + y$$

$$\text{या } x + y = 10 \quad \dots\dots\dots(1)$$

चूँकि लड़कियों की संख्या, लड़कों से 4 अधिक थी अतः निम्नलिखित समीकरण और बनेगा।

$$y = x + 4 \quad \dots\dots\dots(2)$$

अब हम समीकरण (1) व (2) का आलेख खींचने के लिए x और y के संगत मानों की सारणी बनाएँगे और सारणी की मदद से आलेख खींचेंगे।

समीकरण (1) में $x = 1, 2, 3, \dots$ इत्यादि रखने पर y के संगत मान मिलेंगे जो सारणी में प्रदर्शित हैं—

सारणी-1

($x + y = 10$ के लिए)

x	1	2	3	4	5	6
y	9	8	7	6	5	4

इसी प्रकार समीकरण (2) में $x = 1, 2, 3, \dots$ इत्यादि रखने पर y के संगत मानों को सारणी में लिखेंगे।

सारणी-2

($y = x + 4$ के लिए)

x	1	2	3	4	5	6
y	5	6	7	8	9	10

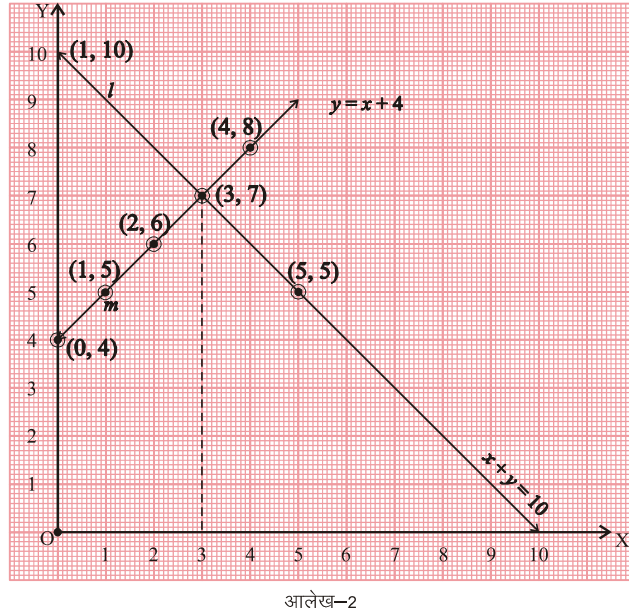
ग्राफ पेपर पर सारणी-1 व 2 से प्राप्त मानों को प्रदर्शित करते हैं तो दो सरल रेखाएँ l व m प्राप्त होती हैं।

ग्राफ पेपर पर आप देखते हैं कि ये दोनों रेखाएँ l व m एक-दूसरे को बिन्दु $(3, 7)$ पर काट रही हैं, यानी प्रतिच्छेद कर रही हैं।

यह बिन्दु दोनों समीकरणों से प्रदर्शित सरल रेखाओं पर स्थित है।

इस बिन्दु $(3, 7)$ में $x=3$, $y=7$ है जो दोनों समीकरणों को संतुष्ट करते हैं। यही प्रश्न का हल भी है।

यानी लड़कों की संख्या 3 और लड़कियों की संख्या 7 है।

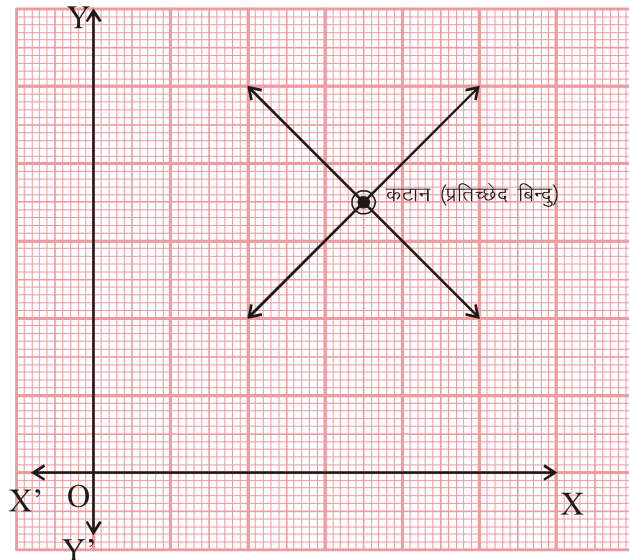


समीकरणों के द्वारा प्रदर्शित सरल रेखाओं का कटान (प्रतिच्छेद) बिन्दु ही उन समीकरणों के हल होते हैं।

क्या प्रत्येक परिस्थिति में हम एक दूसरे को काटती हुई सरल रेखाएँ प्राप्त कर सकते हैं बल्कि अलग-अलग परिस्थितियों में बने समीकरणों के लिए आलेख पर प्राप्त सरल रेखाएँ अलग-अलग रूपों में दिखती हैं। आइए इन्हें समझें।

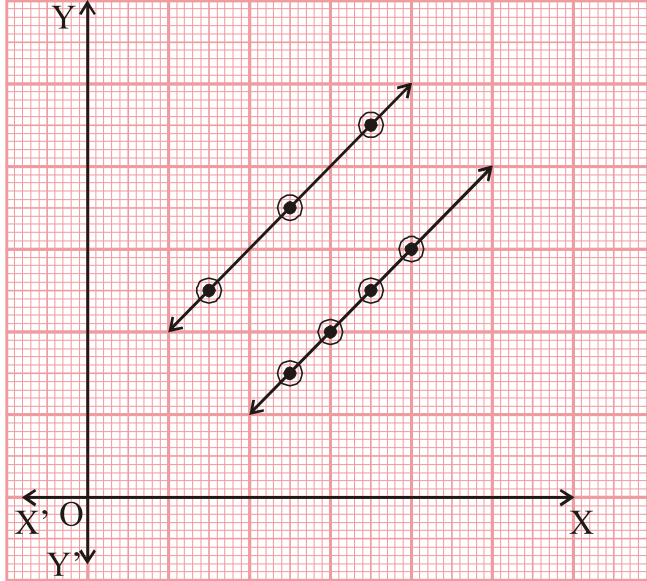
(1) जब समीकरणों से प्राप्त रेखाएँ एक दूसरे को किसी बिन्दु पर काटती हों तब समीकरण का अद्वितीय हल प्राप्त होता है। कटान बिन्दु के मान ही समीकरणों के हल होते हैं।

(2) जब समीकरणों से प्राप्त रेखाएँ समान्तर हों तब समीकरण का कोई भी हल नहीं होता। क्योंकि कोई भी बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं होता।



आलेख-3

- (3) जब समीकरणों से प्राप्त रेखाएँ संपाती हों अर्थात् एक-दूसरे पर स्थित हों तब समीकरण के अनंततः अनेक हल होते हैं। क्योंकि इस स्थिति में अनेक बिन्दु दोनों रेखाओं में उभयनिष्ठ होते हैं।



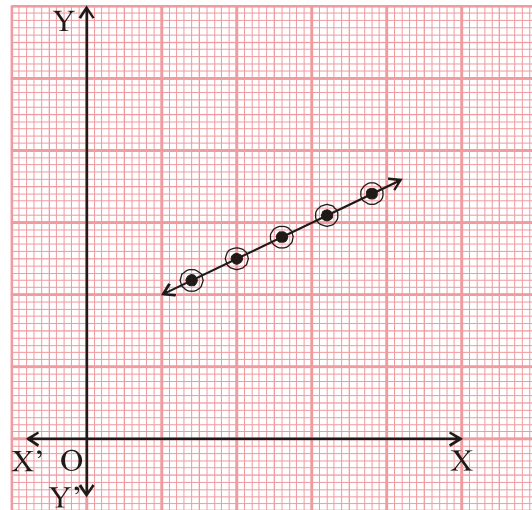
आलेख-4

समीकरणों द्वारा प्रदर्शित सरल रेखाओं की विशेषताएँ व्यावहारिक जीवन से संबंधित समस्याओं को समझने में मददगार साबित होती हैं।

समस्याओं के हल में उपर्युक्त परिस्थितियाँ किस प्रकार सहायक होती हैं इसे हम कुछ उदाहरणों से समझते हैं।

उदाहरण:-6. कविता ने 1 पेंसिल और 2 रबर, 4 रुपये में खरीदी तथा सविता ने 2 पेंसिल और 4 रबर, 16 रुपये में खरीदी तब क्या हम यह पता लगा सकते हैं, कि 1 पेंसिल व 1 रबर की कीमत कविता और सविता के लिए कितनी रही होगी?

हल:- माना कि 1 पेंसिल की कीमत x रुपये व 1 रबर की कीमत y रुपये है चूँकि कविता ने 1 पेंसिल व 2 रबर की कुल कीमत 4 रुपये चुकायी तब इसे निम्नलिखित समीकरण के रूप में लिख सकेंगे—



आलेख-5

$$1 \times x + 2 \times y = 4$$

$$x + 2y = 4 \quad \dots\dots\dots(1)$$

इसी प्रकार सविता ने 2 पेंसिल व 4 रबर खरीदने के लिए कुल कीमत 16 रुपये चुकायी तब इसे भी निम्नलिखित समीकरण के रूप में लिख सकते हैं—

$$2 \times x + 4 \times y = 16$$

$$2x + 4y = 16 \quad \dots\dots\dots(2)$$

समीकरण (1) से

$$x + 2y = 4$$

या $2y = 4 - x$

$$y = \frac{4-x}{2} \quad \dots\dots\dots(3)$$

समीकरण (3) में $x = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ रखने पर y के संगत मान प्राप्त होंगे इन्हें सारणी में लिखेंगे—

सारणी-1

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1

अब समीकरण (2) से

$$\Rightarrow 2x + 4y = 16$$

$$\Rightarrow 2(x + 2y) = 16$$

$$\Rightarrow x + 2y = 8$$

$$\Rightarrow 2y = 8 - x$$

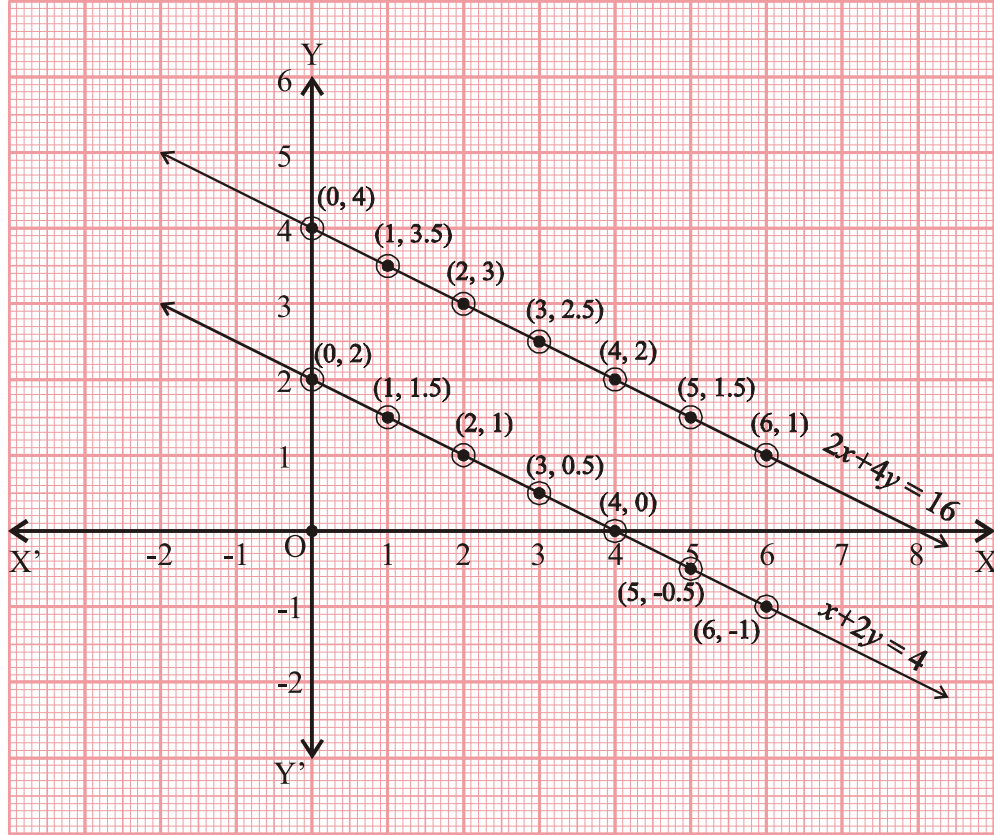
$$\Rightarrow y = \frac{8-x}{2}$$

समीकरण (4) में $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ रखने पर y के क्रमशः संगत मान $y = 4, 3.5, 3, 2.5, 2, 1.5, 1$ प्राप्त होंगे इन्हें सारणी में लिखेंगे—

सारणी-2

x	0	1	2	3	4	5	6
y	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1

समीकरण (1) व (2) के लिए प्राप्त सारणी से निम्नलिखित आलेख प्राप्त करेंगे—



आलेख-6

समीकरणों से दो समान्तर रेखाएँ मिल रही हैं तब 1 पेंसिल व 1 रबर की कीमत क्या होगी?

यहाँ दोनों रेखाओं में कोई प्रतिच्छेद बिन्दु नहीं है अतः समीकरणों का अद्वितीय हल नहीं होगा। कविता व सविता द्वारा खरीदे गए पेंसिल व रबर की कीमत अलग-अलग होगी।

उदाहरण:-7. एक व्यक्ति ने तीन कुर्सियों तथा दो मेजों को 1200 रुपये में खरीदा तथा छः कुर्सियों और चार मेजों की कीमत 2400 रुपये चुकायी तब एक कुर्सी व एक मेज की कीमत ज्ञात कीजिए।

हल:-

माना कि एक कुर्सी की कीमत x रुपये

तथा एक मेज की कीमत y रुपये है।

तब तीन कुर्सियों व दो मेजों की कीमत $3x + 2y$

प्रश्नानुसार $3x + 2y = 1200$ (1)

इसी प्रकार 6 कुर्सियों व 4 मेजों की कीमत 2400 रुपये है।

$$\Rightarrow 6x + 4y = 2400$$

$$\Rightarrow 2(3x + 2y) = 2400$$

$$\Rightarrow (3x + 2y) = \frac{2400}{2}$$

$$\Rightarrow 3x + 2y = 1200 \dots\dots\dots(2)$$

दोनों समीकरण एक जैसे हैं। यदि इन समीकरणों का ग्राफीय निरूपण किया जाए तो संपाती रेखाएँ प्राप्त होती हैं।

समीकरण (1) व (2) दोनों में ही—

यदि $x = 100$ तब $y = \frac{1200 - 3x}{2} = \frac{1200 - 3(100)}{2}$

$$y = \frac{900}{2} = 450$$

$x = 200$ तब $y = \frac{1200 - 3(200)}{2} = \frac{1200 - 600}{2}$

$$y = \frac{600}{2} = 300$$

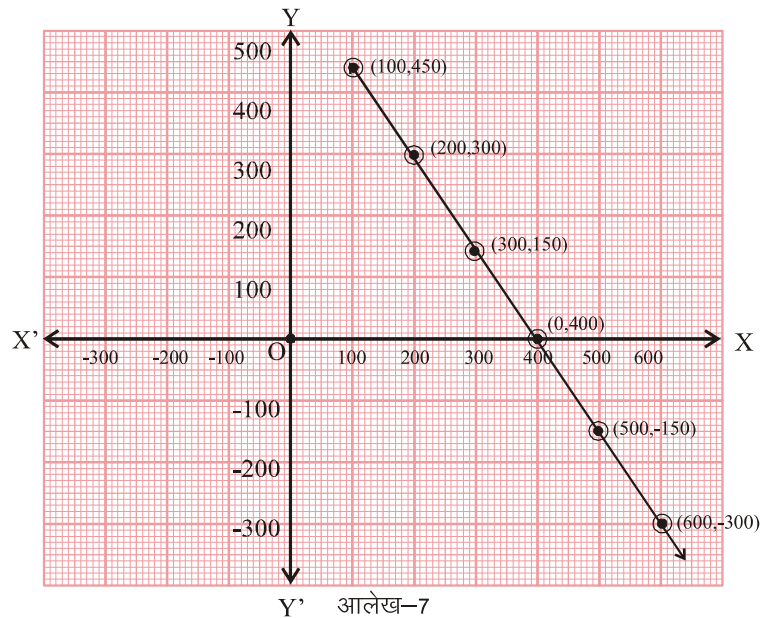
इसी प्रकार x के मानों के संगत y के और मान प्राप्त करते हैं और इन मानों को निम्नलिखित सारणी के रूप में लिखते हैं—

x	100	200	300	400	500	600
y	450	300	150	0	-150	-300

यह सारणी दोनों समीकरणों के लिए है, अतः इस सारणी से आलेख खींचने पर प्राप्त दोनों रेखाएँ संपाती होंगी।

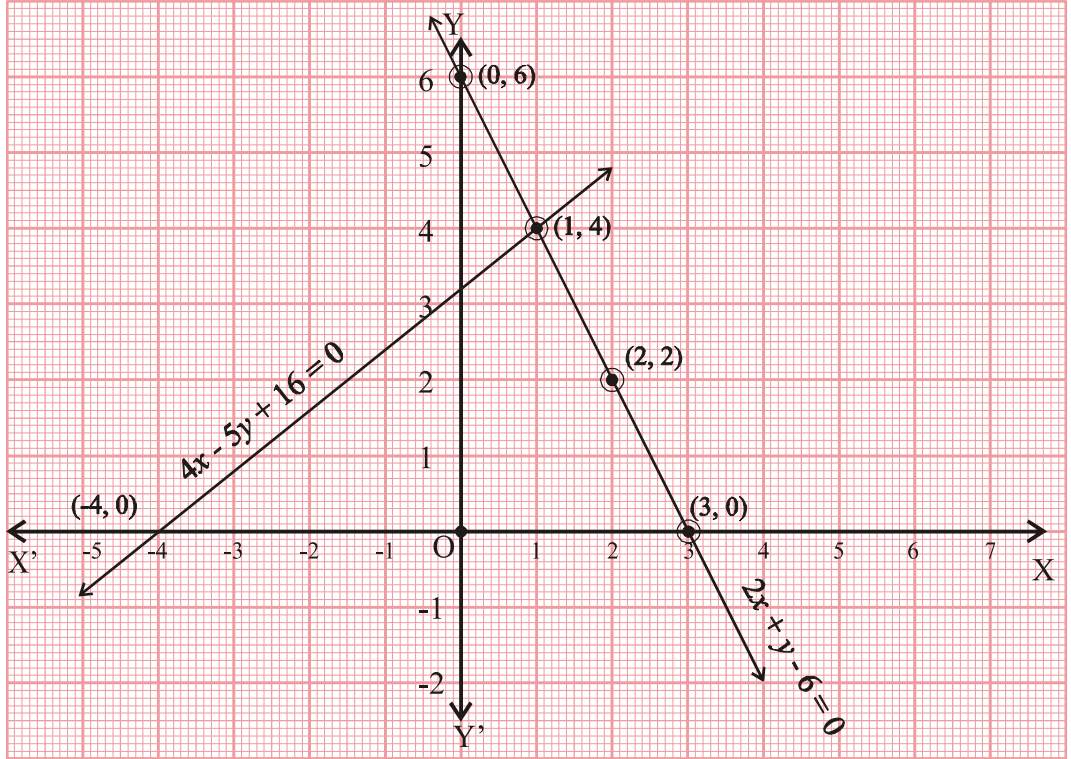
स्पष्टतः x व y के जो मान दोनों समीकरणों में हैं उन मानों को समीकरण निकाय के हल कहेंगे। चूँकि x व y के अनंत मान हैं अतः दिए गए समीकरण निकाय के हल भी अनंततः अनेक होंगे।

इन समीकरणों में x व y कुर्सी व मेज की कीमत को दर्शाते हैं अतः कुर्सी व मेज की कीमतों के लिए यह बात लागू होगी कि उनकी अनेक संभावित कीमतें हो सकती हैं।



उदाहरण:-8. दिए गए आलेख चित्र में समीकरण निकाय के लिए x और y के मान ज्ञात कीजिए।

हल:-



आलेख-8

आलेख से स्पष्ट है कि समीकरणों को प्रदर्शित करने वाली दोनों रेखाएँ एक-दूसरे को बिन्दु $(1, 4)$ पर प्रतिच्छेद कर रही हैं अतः समीकरण निकाय के लिए $x=1, y=4$ होंगे।

प्रश्नावली-1

1. निम्नलिखित कथनों को समीकरण के रूप में लिखिए-
 - (i) एक विद्यालय के क्रिकेट कोच ने 3 बल्ले और 6 गेंदें 3900 रुपये में खरीदी। वहीं से उन्होंने 1 बल्ला और 2 गेंदें 1300 रुपये में खरीदी।
 - (ii) दो संख्याओं का योग 16 तथा उनका अंतर 8 है।
 - (iii) एक फल की दुकान पर 2 किग्रा. सेब तथा 1 किग्रा. अंगूर का मूल्य 160 रुपये था। उसी दुकान पर 4 किग्रा. सेब व 2 किग्रा. अंगूर का मूल्य 300 रुपये था।
 - (iv) नरेश ने अपनी पुत्री से कहा कि 7 साल पहले मेरी आयु, तुम्हारी आयु से 7 गुनी थी और अब से 3 साल बाद मेरी आयु तुम्हारी आयु की 3 गुनी हो जायेगी।

- (v) एक व्यक्ति घर से कार्यालय तक जाने के लिए 90 किमी. दूरी तय करता है इसके लिए वह ट्रेन और टैक्सी का उपयोग करता है। व्यक्ति द्वारा टैक्सी से तय की गई दूरी ट्रेन से तय की गई दूरी की दुगुनी है।

2. निम्नलिखित समीकरणों के आलेख चित्रों को देखकर उनके हल के बारे में पता करें।

(अ) समीकरण

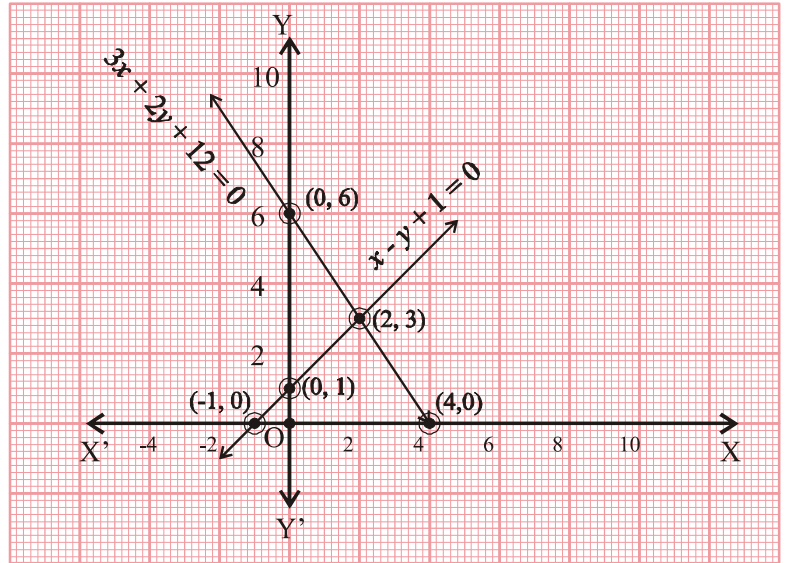
$$3x + 2y - 12 = 0$$

$$x - y + 1 = 0 \text{ में}$$

..... हल है।

तब, x व y के मान होंगे—

.....,



आलेख-9

(ब) समीकरण

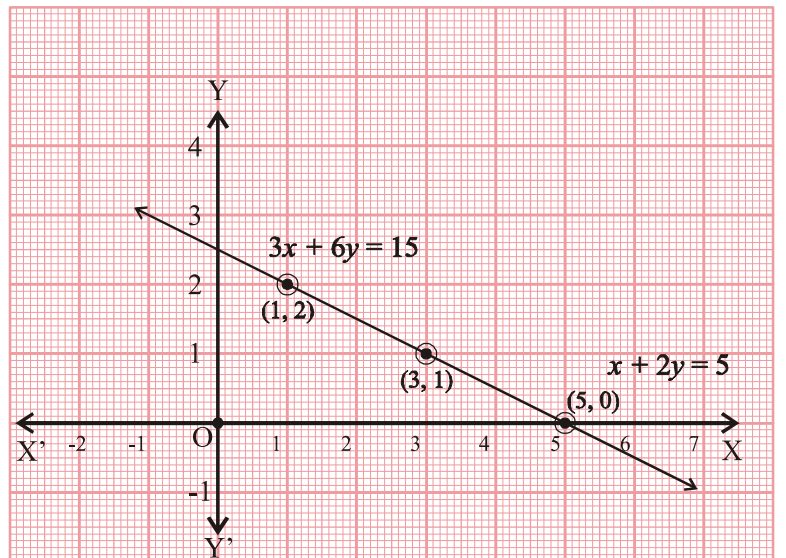
$$3x + 6y = 15$$

$$x + 2y = 5 \text{ में}$$

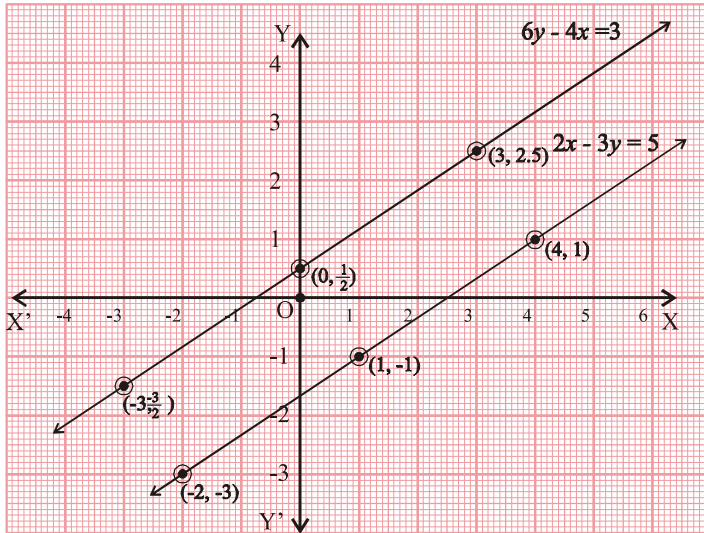
..... हल है।

तब, x व y के मान होंगे—

.....,



आलेख-10



आलेख-11

(स) समीकरण

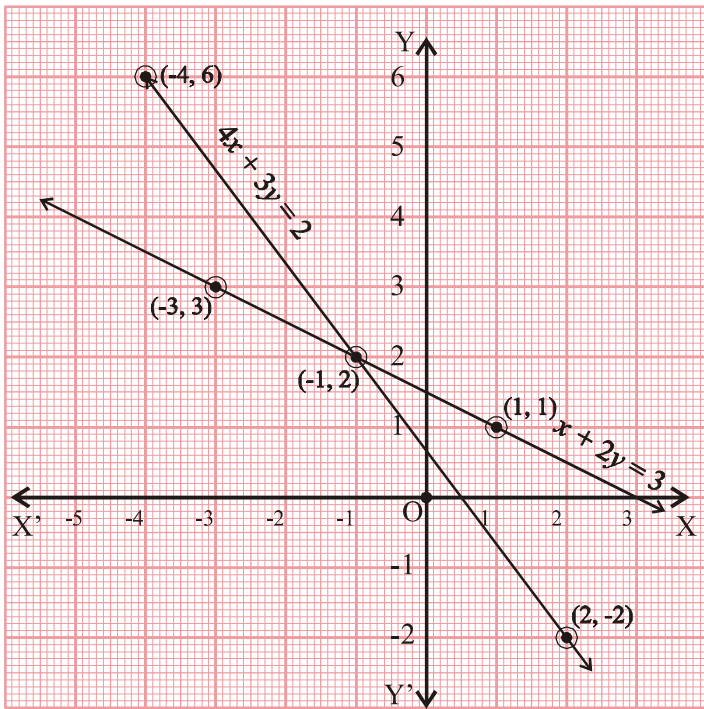
$$-4x + 6y = 3$$

$$2x - 3y = 5 \text{ में}$$

..... हल है।

तब, x व y के मान होंगे-

.....,



आलेख-12

(द) समीकरण

$$x + 2y = 3$$

$$4x + 3y = 2 \text{ में}$$

..... हल है।

तब, x व y के मान होंगे-

.....,

बीजीय विधियाँ :-

1. प्रतिस्थापन विधि

हमने दो चरों के रैखिक समीकरणों का हल आलेखों की सहायता से प्राप्त करना सीख लिया। अब हम दो चरों के रैखिक समीकरण को हल करने के कुछ और तरीकों पर चर्चा करेंगे। एक तरीका तो ये है जिसमें हम एक चर का मान दूसरे समीकरण में रखकर

उसे एक चर के रैखिक समीकरण में बदल लेते हैं और फिर उसका हल प्राप्त करते हैं। आगे के उदाहरण में इसे देख सकते हैं—

उदाहरण:-9. एक छोटी गुफा में कुछ खरगोश और कुछ पक्षी हैं जिनके कुल 35 सिर तथा 98 पैर हैं। तब पक्षियों व खरगोशों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल:-

माना खरगोशों की संख्या = x

तथा पक्षियों की संख्या = y

खरगोशों के सिरों की संख्या + पक्षियों के सिरों की संख्या = 35

$$\therefore x + y = 35 \dots\dots\dots(1)$$

खरगोश के पैरों की संख्या + पक्षियों के पैरों की संख्या = 98

$$\therefore 4x + 2y = 98$$

$$2(2x + y) = 98$$

$$2x + y = \frac{98}{2}$$

$$2x + y = 49$$

$$y = 49 - 2x \dots\dots\dots(2)$$

समीकरण (1) में $y = 49 - 2x$ रखने पर,

$$x + 49 - 2x = 35$$

$$\Rightarrow -x + 49 = 35$$

$$\Rightarrow -x = 35 - 49$$

$$\Rightarrow -x = -14$$

$$\Rightarrow x = 14$$

अब समीकरण (2) में $x = 14$ रखने पर

$$\Rightarrow y = 49 - 2x$$

$$\Rightarrow y = 49 - 2(14)$$

$$\Rightarrow y = 49 - 28$$

$$\Rightarrow y = 21$$

स्पष्टतः खरगोशों की संख्या 14 और पक्षियों की संख्या 21 है।

2. विलोपन विधि

समीकरणों को हल करने के एक अन्य तरीके में कभी समीकरणों को जोड़कर तो कभी घटाकर उसे एक चर के समीकरणों के रूप में बदलने से हमें हल मिल जाता है। आइए, इसके कुछ उदाहरण देखें—

उदाहरण:-10. ऋचा और नैना के पास कुछ टॉफियाँ हैं। जब ऋचा, नैना को 30 टॉफियाँ देती है तब नैना के पास ऋचा से दुगुनी टॉफियाँ हो जाती हैं, परंतु जब नैना अपनी टॉफियों में से 10 टॉफियाँ ऋचा को देती है तब ऋचा के पास नैना से 3 गुनी टॉफियाँ हो जाती हैं। बताइए उन दोनों के पास कितनी टॉफियाँ हैं?

हल:- माना कि ऋचा के पास टॉफियों की संख्या = x
 नैना के पास टॉफियों की संख्या = y
 जब ऋचा 30 टॉफियाँ नैना को देती है
 तब ऋचा के पास टॉफियों की संख्या = $x - 30$
 तथा नैना के पास टॉफियों की संख्या = $y + 30$

तब प्रश्नानुसार $2(x - 30) = y + 30$
 $\Rightarrow 2x - 60 = y + 30$
 $\Rightarrow 2x - y = 30 + 60$
 $\Rightarrow 2x - y = 90 \dots\dots\dots(1)$

परंतु जब नैना ऋचा को 10 टॉफियाँ देती है,

तब ऋचा के पास टॉफियों की संख्या = $x + 10$
 नैना के पास टॉफियों की संख्या = $y - 10$

तब प्रश्नानुसार $x + 10 = 3(y - 10)$
 $\Rightarrow x + 10 = 3y - 30$
 $\Rightarrow x - 3y = -30 - 10$
 $\Rightarrow x - 3y = -40 \dots\dots\dots(2)$

अब

$2x - y = 90 \dots\dots\dots(1)$
 $x - 3y = -40 \dots\dots\dots(2)$

क्या समीकरण (1) व (2) में x या y के गुणांक समान हैं?

नहीं... x या y के गुणांक समान नहीं हैं तब क्या समीकरण (1) में (2) को घटाने पर या जोड़ने पर x या y निरस्त हो पाते हैं? x या y के गुणांक समान कर दिए जाएँ तो संभव है कि समीकरण (1) में (2) को घटाने या जोड़ने पर x या y निरस्त हो गए।

हम गुणांक समान करने के लिए समीकरण (2) के दोनों पक्षों में समीकरण (1)के x के गुणांक 2 से गुणा करते हैं।

$2(x - 3y) = -40 \times 2$
 $2x - 6y = -80 \dots\dots\dots(3)$

समीकरण (1) में समीकरण (3) को घटाने पर

$$\Rightarrow 2x - y - (2x - 6y) = 90 - (-80)$$

$$\Rightarrow 2x - y - 2x + 6y = 90 + 80$$

$$\Rightarrow 5y = 170$$

$$\Rightarrow y = \frac{170}{5}$$

$$\Rightarrow y = 34$$

y का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$2x - 34 = 90$$

$$\Rightarrow 2x = 90 + 34$$

$$\Rightarrow 2x = 124$$

$$\Rightarrow x = \frac{124}{2}$$

$$\Rightarrow x = 62$$

स्पष्टतः ऋचा के पास 62 तथा नैना के पास 34 टॉफियाँ हैं।

उदाहरण:-11. एक कक्षा के विद्यार्थी पंक्तियों में खड़े हैं। जब प्रत्येक पंक्ति में 4 विद्यार्थी कम कर दिए जाते हैं तब 4 पंक्तियाँ अधिक बनती हैं लेकिन जब प्रत्येक पंक्ति में 4 विद्यार्थी और खड़े कर दिए जाते हैं तब 2 पंक्तियाँ कम हो जाती हैं। कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल:- माना पंक्तियों की संख्या $= x$

तथा प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या $= y$

तब कुल विद्यार्थियों की संख्या = पंक्तियों की संख्या \times प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या

$$= xy$$

जब प्रत्येक पंक्ति में 4 विद्यार्थी कम कर दिए जाते हैं

तब प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या $= y - 4$

और पंक्तियों की संख्या $= (x + 4)$

\therefore कुल विद्यार्थियों की संख्या $= (x + 4)(y - 4)$

$$\Rightarrow xy = xy - 4x + 4y - 16$$

$$\Rightarrow xy - xy = -4x + 4y - 16$$

$$\Rightarrow 0 = 4(-x + y - 4)$$

$$\Rightarrow -x + y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow -x + y = -4 \quad \dots\dots\dots(1)$$

परंतु जब प्रत्येक पंक्ति में 4 विद्यार्थी और खड़े कर दिए जाते हैं

तब प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या $= y + 4$

$$\begin{aligned}
 & \text{पंक्तियों की संख्या} & = & x - 2 \\
 \therefore & \text{कुल विद्यार्थियों की संख्या} & = & (x - 2)(y + 4) \\
 \Rightarrow & xy & = & (x - 2)(y + 4) \\
 \Rightarrow & xy & = & xy + 4x - 2y - 8 \\
 \Rightarrow & xy - xy & = & 4x - 2y - 8 \\
 \Rightarrow & 0 & = & 4x - 2y - 8 \\
 \Rightarrow & 2(2x - y - 4) & = & 0 \\
 \Rightarrow & 2x - y - 4 & = & 0 \\
 \Rightarrow & 2x - y & = & 4 \quad \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

समीकरण निकाय

$$-x + y = 4 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$2x - y = 4 \quad \dots\dots\dots(2)$$

\therefore समीकरण निकाय में y के गुणांक समान हैं तथा चिह्न असमान हैं इसलिए समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर y निरस्त हो जाएगा।

$$-x + y + 2x - y = 4 + 4$$

$$\Rightarrow x = 8$$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर

$$\Rightarrow -8 + y = 4$$

$$\Rightarrow y = 4 + 8$$

$$\Rightarrow y = 12$$

$$\text{कुल विद्यार्थियों की संख्या} = xy = 8 \times 12 = 96$$

अभी तक चर्चा किए सभी तरीकों में से जो भी आपको सुविधाजनक लगे, उसका इस्तेमाल सवालों का हल पता करने में कर सकते हैं।

उदाहरण:-12. दस साल पहले सुनील व विनय की आयु का योग उनके पिता की आयु के एक तिहाई थी। यदि सुनील, विनय से दो साल छोटा है तथा दोनों की आयु का योग उनके पिता की आयु से 14 साल कम है। सुनील, विनय व उनके पिता की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल:- माना कि विनय की वर्तमान आयु = x वर्ष
 सुनील की वर्तमान आयु = $x - 2$ वर्ष
 और उनके पिता की वर्तमान आयु = y वर्ष

दस साल पहले,

$$\text{विनय की आयु} = x - 10 \text{ वर्ष}$$

$$\begin{aligned} \text{सुनील की आयु} &= (x - 2 - 10) \text{ वर्ष} \\ \text{पिता की आयु} &= y - 10 \text{ वर्ष} \end{aligned}$$

$$\therefore (x - 10) + (x - 2 - 10) = \frac{1}{3} \times (y - 10)$$

$$\Rightarrow x - 10 + x - 2 - 10 = \frac{1}{3} (y - 10)$$

$$\Rightarrow 2x - 22 = \frac{1}{3} (y - 10)$$

$$\Rightarrow 3(2x - 22) = y - 10$$

$$\Rightarrow 6x - 66 = y - 10$$

$$\Rightarrow 6x - y = -10 + 66$$

$$\Rightarrow 6x - y = 56 \quad \dots\dots\dots(1)$$

सुनील व विनय की वर्तमान आयु का योग उनके पिता की आयु से 14 साल कम है।

$$\therefore x + x - 2 = y - 14$$

$$\Rightarrow 2x - 2 = y - 14$$

$$\Rightarrow 2x - y = -14 + 2$$

$$\Rightarrow 2x - y = -12 \quad \dots\dots\dots(2)$$

समीकरण (1) में समीकरण (2) को घटाने पर

$$6x - y - (2x - y) = 56 - (-12)$$

$$\Rightarrow 6x - y - 2x + y = 68$$

$$\Rightarrow 4x = 68$$

$$\Rightarrow x = \frac{68}{4}$$

$$\Rightarrow x = 17$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$6 \times 17 - y = 56$$

$$102 - y = 56$$

$$y = 102 - 56$$

$$y = 46$$

∴ विनय की वर्तमान आयु $x = 17$ वर्ष
 सुनील की वर्तमान आयु $x - 2 = 17 - 2 = 15$ वर्ष
 पिता की वर्तमान आयु $y = 46$ वर्ष

नीचे कुछ विविध तरह के सवाल हैं जिनमें इन तरीकों का इस्तेमाल किया गया है।

उदाहरण:-13. दो अंकों वाली एक संख्या का 7 गुना, अंकों को पलटने पर बनने वाली संख्या के 4 गुने के बराबर है तथा संख्या के अंकों का योग 3 है। तो वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल:- माना दो अंकों वाली संख्या का इकाई का अंक y व दहाई का अंक x है। तब वह संख्या $= 10x + y$ होगी।

$$\begin{aligned} \therefore \text{प्रश्नानुसार} \quad 7(10x + y) &= 4(10y + x) \\ \Rightarrow 70x + 7y &= 40y + 4x \\ \Rightarrow 70x - 4x - 40y + 7y &= 0 \\ \Rightarrow 66x - 33y &= 0 \\ \Rightarrow 33(2x - y) &= 0 \\ \Rightarrow 2x - y &= 0 \quad \dots\dots\dots(1) \\ \text{तथा} \quad x + y &= 3 \quad \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

समीकरण (1) और (2) जोड़ने पर

$$\begin{aligned} 2x - y + x + y &= 0 + 3 \\ \Rightarrow 3x &= 3 \\ \Rightarrow x &= \frac{3}{3} \\ \Rightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

समीकरण (2) में x का मान रखने पर

$$\begin{aligned} \Rightarrow x + y &= 3 \\ \Rightarrow 1 + y &= 3 \\ \Rightarrow y &= 3 - 1 \\ \Rightarrow y &= 2 \end{aligned}$$

अतः वह संख्या 12 है।

उदाहरण:-14. निम्नलिखित समीकरण में चरों के मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= -8 \quad ; \\ x - 4y &= -7 \end{aligned}$$

हल:- समीकरण $2x - 5y = -8 \quad \dots\dots\dots(1)$

$$x - 4y = -7 \quad \dots\dots\dots(2)$$

समीकरण (2) से $x = -7 + 4y \quad \dots\dots\dots(3)$

x के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर

$$\Rightarrow 2(-7 + 4y) - 5y = -8$$

$$\Rightarrow -14 + 8y - 5y = -8$$

$$\Rightarrow 3y = -8 + 14$$

$$\Rightarrow 3y = 6$$

$$\Rightarrow y = \frac{6}{3} = 2$$

y के इस मान को समीकरण (3) में रखने पर

$$\Rightarrow x = -7 + 4y$$

$$\Rightarrow x = -7 + 4(2)$$

$$\Rightarrow x = -7 + 8$$

$$\Rightarrow x = 1$$

अतः $x = 1, y = 2$

उदाहरण:-15. निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए-

$$41x - 17y = 99 ;$$

$$17x - 41y = 75.$$

हल:- समीकरण $41x - 17y = 99 \quad \dots\dots\dots(1)$

$17x - 41y = 75 \quad \dots\dots\dots(2)$

समीकरण (1) में समीकरण (2) को जोड़ने पर

$$41x - 17y + 17x - 41y = 99 + 75$$

$$\Rightarrow 58x - 58y = 174$$

$$\Rightarrow 58(x - y) = 174$$

$$\Rightarrow x - y = \frac{174}{58}$$

$$\Rightarrow x - y = 3 \quad \dots\dots\dots(3)$$

समीकरण (1) में (2) को घटाने पर

$$41x - 17y - (17x - 41y) = 99 - 75$$

$$\Rightarrow 41x - 17y - 17x + 41y = 24$$

$$\Rightarrow 24x + 24y = 24$$

$$\Rightarrow x + y = \frac{24}{24}$$

$$\Rightarrow x + y = 1 \quad \dots\dots\dots(4)$$

अब समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर

$$\Rightarrow x - y + x + y = 3 + 1$$

$$\Rightarrow 2x = 4$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2$$

समीकरण (3) में $x = 2$ रखने पर

$$\Rightarrow x - y = 3$$

$$\Rightarrow 2 - y = 3$$

$$\Rightarrow 2 - 3 = y$$

$$\Rightarrow y = -1$$

यहाँ $x = 2$; $y = -1$

जब समीकरण निकाय के अलग-अलग चरों के गुणांक समान हो तो पहले दोनों समीकरणों को जोड़कर तथा दूसरी बार समीकरणों को घटाकर दो नये समीकरण प्राप्त किये जाते हैं।

उदाहरण:-16. एक त्रिभुज ABC में $\angle A = x^\circ$, $\angle B = 3x^\circ$ और $\angle C = y^\circ$ है। यदि $3y^\circ - 5x^\circ = 30^\circ$ हो तब सिद्ध कीजिए कि यह एक समकोण त्रिभुज है।

हल:- ΔABC के तीनों कोणों के मान क्रमशः $\angle A = x^\circ$, $\angle B = 3x^\circ$ व $\angle C = y^\circ$ है।

\therefore त्रिभुज के तीनों अंतःकोणों का योग 180° होता है।

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ के मान रखने पर

$$x^\circ + 3x^\circ + y^\circ = 180^\circ$$

$$4x^\circ + y^\circ = 180^\circ$$

$$y^\circ = 180^\circ - 4x^\circ \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{दिया है } 3y^\circ - 5x^\circ = 30^\circ \quad \dots\dots\dots(2)$$

समीकरण (1) से y का मान (2) में रखने पर

$$\Rightarrow 3 [180^\circ - 4x^\circ] - 5x^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow 3 \times 180^\circ - 3 \times 4x^\circ - 5x^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow 540^\circ - 12x^\circ - 5x^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow -17x^\circ = 30^\circ - 540^\circ$$

$$\Rightarrow -17x^\circ = -510^\circ$$

$$\Rightarrow x^\circ = \frac{510^\circ}{17^\circ}$$

$$x^\circ = 30^\circ$$

x के मान को (1) में रखने पर

$$y^\circ = 180^\circ - 4(30^\circ)$$

$$\Rightarrow y^\circ = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\Rightarrow y^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore \angle A = x^\circ = 30^\circ$$

$$\angle B = 3x^\circ = 3 \times 30^\circ = 90^\circ$$

$$\angle C = y^\circ = 60^\circ$$

स्पष्टतः ΔABC के तीनों कोणों में एक कोण का मान 90° तथा शेष दोनों कोण न्यूनकोण हैं जिनकी माप 30° व 60° हैं।

अतः दिया गया ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।

उदाहरण:-17. एक नाव नदी की धारा के बहाव की दिशा में 44 किमी. तथा बहाव की विपरीत दिशा में 30 किमी. की दूरी 10 घण्टे में तय करती है। यही नाव धारा के बहाव की दिशा में 55 किमी. तथा बहाव की विपरीत दिशा में 40 किमी. की दूरी 13 घण्टे में तय करती है। धारा के बहाव की दिशा एवं विपरीत दिशा में नाव की चाल ज्ञात कीजिए।

हल:- माना धारा के बहाव की दिशा में नाव की चाल = x किमी./घण्टा

तथा धारा के बहाव की विपरीत दिशा में नाव की चाल = y किमी./घण्टा

बहाव की दिशा में 44 किमी. की दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

$$= \frac{44}{x} \text{ घण्टे}$$

बहाव की विपरीत दिशा में 30 किमी. की दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{30}{y}$ घण्टे

\therefore प्रश्नानुसार

धारा के बहाव की दिशा व उसके विपरीत दिशा में दूरी तय करने में लगा समय = 10 घण्टे

$$\therefore \frac{44}{x} + \frac{30}{y} = 10 \quad \dots\dots\dots(1)$$

चूँकि बहाव की दिशा में 55 किमी. तथा विपरीत दिशा में 40 किमी. की दूरी तय करने में लगा समय = 13 घण्टे

$$\therefore \frac{55}{x} + \frac{40}{y} = 13 \quad \dots\dots\dots(2)$$

अब समीकरण (1) और (2) में $\frac{1}{x} = u$, और $\frac{1}{y} = v$ रखने पर हमें निम्न दो समीकरण (3)

व (4) मिलते हैं।

$$44u + 30v = 10$$

$$22u + 15v = 5 \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{तथा } 55u + 40v = 13 \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\left\{ \because \text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} \right\}$$

समीकरण (3) में 55 व समीकरण (4) में 22 का गुणा करके घटाने पर

$$1210u + 825v = 275$$

$$-1210u - 880v = -286$$

$$\hline -55v = -11$$

$$v = \frac{-11}{-55}$$

$$v = \frac{1}{5} \quad \therefore y = 5$$

v का मान समीकरण (3) में रखने पर

$$22u + 15 \times \frac{1}{5} = 5$$

$$22u + 3 = 5$$

$$22u = 5 - 3$$

$$u = \frac{2}{22}$$

$$u = \frac{1}{11} \quad \therefore x = 11$$

$$\Rightarrow x = 11 \quad \Rightarrow y = 5$$

अतः धारा के बहाव की दिशा में नाव की चाल = 11 किमी./घंटा एवं धारा के बहाव की विपरीत दिशा में नाव की चाल = 5 किमी./घंटा

सोचें व चर्चा करें

दिए गए समीकरण निकाय

$$2x + 5y = 1$$

$2x + 3y = 3$ को विभिन्न समूहों में बँटकर अलग-अलग विधियों से हल करें प्राप्त मानों पर चर्चा करें कि क्या प्रत्येक विधि से प्राप्त मान समान हैं?

प्रश्नावली-2

1. जाँचिए कि (अ) व (ब) में कौन दिए गए समीकरणों के हल हैं?

(अ) $x = 2, y = 5$

(ब) $x = -1, y = 3$

(i) $x + y = 7$

(ii) $2x + 5y = 13$

(iii) $2x - 3y = -11$

(iv) $5x + 3y = 4$

2. जाँचिए कि (अ) व (ब) में कौन दिए गए समीकरणों के हल हैं?

(अ) $x = 3, y = -1$

(ब) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$

(i) $2x + 5y = 1;$

(ii) $x + y = 5xy;$

$2x + 3y = 3.$

$3x + 2y = 13xy.$

(iii) $2x - \frac{3}{y} = 9;$

(iv) $2x + 5y = \frac{8}{3};$

$3x + \frac{7}{y} = 2$

$3x - 2y = \frac{5}{6}$

3. निम्न समीकरणों को किसी भी विधि से हल कीजिए—

(i) $x - y = -1;$

(ii) $x - 2y = 5;$

$3x - 2y = 12.$

$2x - 4y = 6$

(iii) $x + y = 6;$

(iv) $5x - 8y = -1$

$x = y + 2.$

$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0$

$$(v) \quad 3x - 4y - 1 = 0; \quad (vi) \quad x + 2y = 8;$$

$$2x - \frac{8}{3}y + 5 = 0 \quad 2x + 4y = 16$$

4. निम्नलिखित समीकरण निकायों को दिए गए चरों के लिए हल कीजिए—

$$(i) \quad x + y = 7; \quad (ii) \quad 2x + y = 8;$$

$$x - y = -1. \quad x - 2y = -1$$

$$(iii) \quad 4x + 3y = 5; \quad (iv) \quad \sqrt{7}x + \sqrt{11}y = 0;$$

$$2x - y = 2 \quad \sqrt{3}x - \sqrt{5}y = 0$$

5. 15 किग्रा. चाय व 17 किग्रा. कॉफी का मूल्य 183 रुपये तथा 25 किग्रा. चाय व 13 किग्रा. कॉफी का मूल्य 213 रुपये है। 7 किग्रा. चाय और 1 किग्रा. कॉफी का मूल्य ज्ञात कीजिए।

6. एक व्यक्ति के पास कुछ कबूतर व कुछ गायें हैं जिनकी आँखों की कुल संख्या 120 तथा पैरों की कुल संख्या 180 है। बताइए व्यक्ति के पास कितनी गायें व कबूतर हैं?

7. एक थैले में 50 पैसे और 25 पैसे के कुल 94 सिक्के हैं। यदि थैले में कुल 29.75 रुपये हैं, तब बताइए कि थैले में 25 पैसे और 50 पैसे के सिक्कों की संख्या कितनी है?

8. दो संख्याओं का योग 25 तथा उनके व्युत्क्रमों का योग $\frac{1}{4}$ है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
[संकेत— $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$]

9. दो संख्याओं का अंतर 14 तथा उनके वर्गों का अंतर 448 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
[संकेत— $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$]

10. दो संख्याओं का गुणनफल 45 तथा उनका योग 14 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

11. पाँच वर्ष पूर्व मेरी आयु मेरे पुत्र की आयु की तिगुनी थी। दस वर्ष पश्चात् मेरी आयु, मेरे पुत्र की आयु की दुगुनी हो जायेगी। मेरी व मेरे पुत्र की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

12. दो स्थानों A और B की दूरी 70 किमी. है। दो कारें A व B से चलना प्रारंभ करती हैं। यदि वे एक दिशा में चलती हैं तब 7 घंटे बाद एक-दूसरे से मिलती हैं और यदि वे एक-दूसरे की ओर चलती हैं तब 1 घंटे बाद मिलती हैं। कारों की चाल ज्ञात कीजिए।

13. एक विद्यालय के दो कमरों A और B में कुछ विद्यार्थी बैठे हैं। जब A से 10 विद्यार्थी B में भेज दिए जाते हैं तो दोनों कमरों में विद्यार्थियों की संख्या समान हो जाती है और जब 20 विद्यार्थी B से A में भेज दिए जाते हैं तब A के विद्यार्थियों की संख्या B से दुगुनी हो जाती है। प्रत्येक कमरे के विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

14. जब किसी आयत की लंबाई में 5 इकाई की कमी तथा चौड़ाई में 2 इकाई की वृद्धि कर दी जाती है तब उसका क्षेत्रफल 80 वर्ग इकाई कम हो जाता है। जब उसकी लंबाई में 10 इकाई की वृद्धि और चौड़ाई में 5 इकाई की कमी कर दी जाती है तो आयत का क्षेत्रफल 50 वर्ग इकाई बढ़ जाता है। आयत की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

अवलोकन से समीकरण निकाय के हल के प्रकार का पता लगाना

क्या किसी समीकरण निकाय के अवलोकन से ही आप उसके हल के बारे में बता पाएँगे कि उसके हल हैं अथवा नहीं।

हाँ, यह संभव है लेकिन इसके लिए हमें समीकरण निकाय के चरों एवं अचर पदों के गुणांकों के बीच के संबंधों को जानने की आवश्यकता होगी।

निम्नलिखित समीकरण निकाय को देखिए—

$$2x + 3y = 7 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$6x + 9y = 11 \quad \dots\dots\dots(2)$$

समीकरण (1) में x का गुणांक 2, y का गुणांक 3 व अचर पद 7 है। अब यदि 2, 3 व 7 को क्रमशः a_1, b_1 व c_1 लिखा जाए तथा समीकरण (2) के x, y के गुणांक व अचर पद को क्रमशः a_2, b_2 व c_2 लिखा जाए तब दिए गए समीकरण निकाय को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है—

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

ऐसे ही हम अन्य समीकरण निकायों को भी लिख सकते हैं।

समीकरणों के समान चरों के गुणांकों व उनके अचर पदों के अनुपातों के बीच के संबंधों को तालिका में दर्शाया गया है जिनसे हम समीकरण निकाय के हल के बारे में जान पाते हैं।

क्र.	समान चरों के अनुपातों में संबंध (प्रतिबंध या शर्त)	समीकरण निकाय के हल	ज्यामितीय अर्थ
1.	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	अद्वितीय हल प्राप्त होता है	समीकरण निकाय दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ प्रदर्शित करता है।
2.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	कोई भी हल प्राप्त नहीं होता है।	समीकरण निकाय दो समान्तर रेखाएँ प्रदर्शित करता है।
3.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	अनंततः अनेक हल प्राप्त होते हैं।	समीकरण निकाय संपाती रेखाएँ प्रदर्शित करता है।

आइए इन संबंधों के आधार पर समीकरण के हल के बारे में पता करते हैं—

उदाहरण:—18. दिए गए समीकरणों का हल किस प्रकार का है? पता करें।

$$3x + 5y = 12 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$4x + 2y = 5 \quad \dots\dots\dots(2)$$

हल:— समीकरण $3x + 5y = 12$ में $a_1 = 3, b_1 = 5, c_1 = 12$

$$4x + 2y = 5 \quad a_2 = 4, b_2 = 2, c_2 = 5$$

\therefore यहाँ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad \therefore$ समीकरण का अद्वितीय हल है।

उदाहरण:—19. समीकरण $5x + 3y = 12$

एवं $15x + 9y = 15$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल : समीकरण $5x + 3y = 12$ में $a_1 = 5, b_1 = 3, c_1 = 12$

एवं समीकरण $15x + 9y = 15$ में $a_2 = 15, b_2 = 9, c_2 = 15$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{15}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{9}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{12}{15}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{3}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{5}$$

हम देखते हैं कि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

\therefore समीकरण का कोई भी हल नहीं है।

उदाहरण:—20. समीकरण $15x - 3y = 14$

एवं $60x - 12y = 56$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल:— समीकरण $15x - 3y = 14$ में $a_1 = 15, b_1 = -3, c_1 = 14$



चरों के अज्ञात गुणांक का मान पता करना-

आपने अब तक विभिन्न परिस्थितियों से निर्मित समीकरण निकाय को हल करके उनके चरों के मान प्राप्त करने के तरीकों को देखा जिसमें चरों के गुणांक हमें ज्ञात होते थे पर यदि समीकरण निकाय के किसी एक चर का गुणांक अज्ञात हो अर्थात् समीकरण निकाय निम्नलिखित रूप में हो-

$$2x + 3y - 5 = 0;$$

$$kx - 6y - 8 = 0.$$

तब भी हम समीकरण निकाय को हल करके उनके चरों x, y और k का मान ज्ञात कर सकते हैं?

उदाहरण:-21. k के किस मान के लिये दिए गए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल होगा-

$$x - ky = 2, 3x + 2y = -5$$

हल:- दिया गया समीकरण निकाय

$$x - ky - 2 = 0, 3x + 2y + 5 = 0$$

$$\text{यहाँ } a_1 = 1, \quad b_1 = -k, \quad c_1 = -2$$

$$a_2 = 3, \quad b_2 = 2, \quad c_2 = 5$$

समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है-

$$\text{अतः } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{-k}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{-3} \neq k$$

$$\Rightarrow k \neq -\frac{2}{3}$$

k के $\frac{-2}{3}$ के मान अतिरिक्त अन्य सभी वास्तविक मानों के लिए समीकरण निकाय

का अद्वितीय हल होगा।

उदाहरण:-22. k का मान ज्ञात कीजिए जब दिए गए समीकरण निकाय के अनंततः अनेक हल होंगे।

$$(k-3)x + 3y = k; \quad kx + ky = 12$$

हल:- समीकरण निकाय

$$(k-3)x + 3y = k; \quad kx + ky = 12 \text{ में}$$

$$a_1 = k-3, \quad b_1 = 3, \quad c_1 = k$$

$$a_2 = k, \quad b_2 = k, \quad c_2 = 12$$

चूँकि समीकरण निकाय के अनंत अनेक हल हैं

$$\text{अतः} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \text{ से}$$

$$\frac{k-3}{k} = \frac{3}{k} = \frac{+k}{+12}$$

$$\Rightarrow \frac{k-3}{k} = \frac{3}{k} \quad \dots\dots(1) \quad \frac{3}{k} = \frac{k}{12} \quad \dots\dots(2) \quad \frac{k-3}{k} = \frac{k}{12} \quad \dots\dots(3)$$

$$\Rightarrow k-3 = 3 \quad \Rightarrow k^2 = 36 \quad \Rightarrow k^2 = 12k - 36$$

$$\Rightarrow k = 3 + 3 \quad \Rightarrow k = \sqrt{36} \quad \Rightarrow k^2 - 12k + 36 = 0$$

$$\Rightarrow k = 6 \quad \Rightarrow k = \pm 6 \quad \Rightarrow k - 6k - 6k + 36 = 0$$

$$\Rightarrow k(k-6) - 6(k-6) = 0$$

$$\Rightarrow (k-6)(k-6) = 0$$

$$k = 6$$

k का वही मान सत्य होगा जो सभी समीकरणों को संतुष्ट करता है। यहाँ 6 ही तीनों समीकरणों को संतुष्ट करता है इसलिए k का मान 6 होगा।



प्रश्नावली-3

1. दर्शाइए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल है—
 $3x + 5y = 12$
 $5x + 3y = 4$
2. दर्शाइए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय के अनंततः अनेक हल हैं—
 $2x - 3y = 5;$
 $6x - 9y = 15$
3. k के मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निम्नलिखित समीकरण निकायों का कोई भी हल न हो—
 (i) $8x + 5y = 9;$ $kx + 10y = 15$
 (ii) $kx + 3y = 3;$ $12x + ky = 6$
 (iii) $kx - 5y = 2;$ $6x + 2y = 7$
4. निम्नलिखित समीकरण निकायों के एक अद्वितीय हल के लिए k का मान ज्ञात कीजिए—
 (i) $kx + 2y = 5;$ $3x + y = 1$
 (ii) $x - 2y = 3;$ $3x + ky = 1$
 (iii) $kx + 3y = k - 3;$ $12x + ky = k$
 (iv) $4x - 5y = k;$ $2x - 3y = 12$
5. निम्नलिखित समीकरण निकायों के लिए k का मान ज्ञात कीजिए जबकि समीकरण निकायों के अनंततः अनेक हल हों।
 (i) $2x + 3y = 7;$
 $(k - 1)x + (k + 2)y = 3k$
 (ii) $kx + 2y - 4 = 0;$ $5x - 3y + 6 = 0$
 (iii) $3x + ky = 7;$ $2x - 5y = 1$
 (iv) $kx - 5y = 2;$ $2x - 3y = 12$
6. यदि $x = 2; y = 4$ है तो समीकरण $7x - 4y = p$ में p का मान ज्ञात कीजिए।
7. k का मान ज्ञात कीजिए यदि एक सरल रेखा $2x - ky = 9$ बिन्दु $(1, -1)$ से गुजरती है।
8. जाँचिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय अद्वितीय हल रखता है या कोई हल नहीं रखता अथवा अनंततः अनेक हल रखता है। यदि अद्वितीय हल रखता हो तब चरों के मान ज्ञात कीजिए—
 $4x + 7y = 18$
 $2x + y = 4$

समीकरण से कथन बनाना

अभी तक हमने विभिन्न परिस्थितियों पर आधारित कथनों को समीकरण निकाय के रूप में लिखकर उनके चरों के मान प्राप्त किये, क्या हम किसी समीकरण निकाय को कथन के रूप में लिख सकते हैं?

आइए, निम्नलिखित समीकरण निकाय को कथन के रूप में लिखकर देखते हैं—

$$x + y = 45 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$x - y = 13 \quad \dots\dots\dots(2)$$

यदि हम x को एक संख्या तथा y को दूसरी संख्या मान लें तो समीकरण (1) और (2) को कथन के रूप में निम्न तरीके से लिख सकते हैं।

दो संख्याओं का योग 45 है तथा उनका अंतर 13 है। तब संख्याएँ ज्ञात कीजिए। या x एक किताब का और y एक कॉपी का रूपये में मूल्य है। एक किताब और एक कॉपी के मूल्यों का योग 45 है और उनके मूल्यों का अंतर 13 है।

क्या इसी प्रश्न से और कथन बनाएँ जा सकते हैं? ऐसे दो कथन और बनाइए।

उदाहरण:-23. समीकरण निकाय $\frac{x-1}{y} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots(1)$

$$\frac{x}{y+3} = \frac{3}{2} \quad \dots\dots\dots(2)$$

को कथन के रूप में लिखिए।

हल:- यदि $\frac{x}{y}$ एक भिन्न है जिससे अंश x तथा हर y है। तब उपरोक्त समीकरणों को कथन के रूप में लिखा सकता है।

“किसी भिन्न के अंश में 1 घटाने पर वह भिन्न $\frac{1}{2}$ के बराबर हो जाता है

तथा यदि उसके हर में 3 जोड़ दिया जाए तो भिन्न $\frac{3}{2}$ के बराबर हो जाता है।”

समीकरण निकाय को कथन के रूप में लिखने के कई संभव तरीके हो सकते हैं। उपरोक्त समीकरणों को आप अन्य परिस्थितियों में भी कथन के रूप में लिख सकते हैं।

करके देखें

निम्नलिखित समीकरण निकाय को कथन के रूप में लिखिए।

$$(i) \quad \begin{aligned} x + y &= 60 \\ x &= 3y \end{aligned} \quad (ii) \quad \begin{aligned} x + y &= 5 \\ xy &= 6 \end{aligned}$$

हमने सीखा

1. एक घात वाले दो चरों से बने समीकरणों के आलेख सदैव सरल रेखा होती है। इसीलिए एक घात वाले दो चरों के समीकरण को रैखिक समीकरण कहते हैं।
2. जब दो चरों के रैखिक समीकरणों का आलेख दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ होती हैं तब समीकरणों का एक अद्वितीय हल होता है।
3. जब दो चरों के रैखिक समीकरणों का आलेख दो समांतर रेखाएँ होती हैं तब समीकरणों का कोई भी हल नहीं होता है।
4. जब दो चरों के रैखिक समीकरणों का आलेख संपाती रेखाएँ होती हैं तब समीकरणों के अनंततः अनेक हल होते हैं।
5. दो चरों के रैखिक समीकरण निकाय को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है—

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$
उपरोक्त निकाय में यदि,
 - (i) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ हों तो रेखाएँ समांतर होती हैं व समीकरण निकाय का कोई भी हल नहीं होता है।
 - (ii) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ हो तो रेखाएँ प्रतिच्छेदी होती हैं व समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल होता है।
 - (iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो रेखाएँ संपाती होती हैं व समीकरण निकाय के अनंततः अनेक हल होते हैं। वास्तव में दिए गए दोनों समीकरण एक जैसे ही होते हैं।

उत्तरमाला-1

1. (i) $3x + 6y = 3900$ (ii) $x + y = 16$
 $x + 2y = 1300$ $x - y = 8$
 (iii) $2x + y = 160$ (iv) $x - 7y + 42 = 0$
 $4x + 2y = 300$ $x - 3y - 6 = 0$
 (v) $x + y = 90$
 $x = 2y$
2. (अ) $x = 2, y = 3$ (ब) अनेक हल
 (स) कोई भी हल नहीं (द) $x = -1, y = 2$

उत्तरमाला-2

1. (i) (अ) (ii) (ब) (iii) (अ), (ब)
 (iv) (ब)
2. (i) (अ) (ii) (ब) (iii) (अ)
 (iv) (ब)
3. (i) $x = 14, y = 15$ एक अद्वितीय हल।
 (ii) कोई हल नहीं समांतर रेखाएँ
 (iii) $x = 4, y = 2$ एक अद्वितीय हल
 (iv) अनंततः अनेक हल, संपाती रेखाएँ।
 (v) कोई हल नहीं, समांतर रेखाएँ।
 (vi) अनंततः अनेक हल, संपाती रेखाएँ।
4. (i) $x = 3, y = 4$ (ii) $x = 3, y = 2$
 (iii) $x = 1.1, y = 0.2$ (iv) $x = 0, y = 0$
5. 43.80 रूपये
6. गायों की संख्या = 30, कबूतरों की संख्या = 30
7. 25 पैसे के सिक्कों की संख्या = 69, 50 पैसे के सिक्कों की संख्या = 25
8. संख्याएँ = 20, 5 9. संख्याएँ = 23, 9
10. संख्याएँ = 9, 5 11. मेरी आयु = 50 वर्ष, पुत्र की आयु = 20 वर्ष
12. 40 किमी./घण्टा, 30 किमी./घण्टा
13. 100, 40 14. 40 इकाई, 30 इकाई

उत्तरमाला-3

3. (i) $k = 16$ (ii) $k = -6$ (iii) $k = -15$
4. (i) $k \neq 6$ (ii) $k \neq -6$ (iii) $k \neq \pm 6$
- (iv) $k \neq \frac{10}{3}$
5. (i) $k = 7$ (ii) $k = \frac{-10}{3}$
- (iii) k का कोई मान नहीं (iv) $k = 24$
6. $p = -2$ 7. $k = 7$
8. अद्वितीय हल रखता है, $x = 1, y = 2$

