अध्याय

03

एक चर का द्विघात समीकरण

[QUADRATIC EQUATION]

E63X2F

परिचय (Introduction)

एक व्यक्ति अपनी जमीन के किसी भाग में 800 वर्गमीटर क्षेत्रफल का एक ऐसा आयताकार बगीचा बनाना चाहता है, जिसकी लंबाई उसकी चौड़ाई से दुगुनी हो। व्यक्ति को बगीचे की लंबाई और चौड़ाई कितनी रखनी चाहिए?

यदि बगीचे की चौड़ाई को x मीटर मान लिया जाए तब उसकी लंबाई $2x$ मीटर होगी।

चूँकि बगीचा आयताकार है,

अतः बगीचे का क्षेत्रफल = बगीचे की लंबाई ×बगीचे की चौड़ाई

$$800 = 2x.x$$

या $$\frac{800}{2} = x^2$$

या $$x^2 = 400$$

या $$x^2 = 20^2$$

या $$x^2 - 20^2 = 0 \quad \text{..... (i)}$$

x के जिन मानों के लिए (i) के दोनों पक्ष बराबर होंगे। वे मान ही बगीचे की चौड़ाई को दर्शाएँगे।

चौड़ाई पता होने पर बगीचे की लंबाई भी मालूम हो जायेगी।

सवाल को बीजीय रूप में लिखना

हमने उपर देखा कि $x^2 - 20^2 = 0$ से x का मान पता कर सकते हैं। यह समीकरण दरअसल दिए गए सवाल में दिखाई गई परिस्थिति का बीजीय निरूपण है।

आइए हम कुछ और परिस्थितियों की चर्चा करें और उनके बीजीय रूप का अवलोकन करें।

नरेश को अपने घर के सामने 500 वर्गमीटर क्षेत्रफल वाली एक समकोण त्रिभुजाकार क्यारी बनवानी है, जिसमें वह आधार भुजा की लंबाई, शीर्षलंब की लंबाई से 30 मीटर अधिक रखना चाहता है।

क्यारी का आकार क्या होना चाहिए यह जानने के लिए हम शीर्षलंब की लंबाई को x मीटर मानें तब आधार भुजा की लंबाई $x+30$ मीटर होनी चाहिए।

चूँकि समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ ×शीर्षलंब की लंबाई ×आधार भुजा की लंबाई

$$\Rightarrow \quad 500 = \frac{1}{2} \times x(x+30)$$

$$\Rightarrow \quad 500 \times 2 = x^2 + 30x$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 30x - 1000 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

समीकरण (ii) प्रश्न का बीजीय रूप है। x के जिन मानों के लिए (ii) के दोनों पक्ष बराबर होंगे वे मान ही त्रिभुजाकार क्यारी के शीर्षलंब की माप होंगे।

द्विघात समीकरण : ऊपर के दोनों बीजीय निरूपण में x की अधिकतम घात 2 है इस द्विघातीय बहुपद को शामिल करते हुए एक बीजीय समीकरण मिलता है जिससे हम हल ढूँढ सकते हैं।ऐसे ही कुछ उदाहरण हम आगे देखेंगे।

अब हम निम्नलिखित कथन पर विचार करते हैं –

दो क्रमागत संख्याओं का गुणनफल शून्य है।

यदि पहली संख्या x हो,तब दूसरी संख्या $x+1$ होगी।

$$\therefore \quad x(x+1) = 0$$

$$x^2 + x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

समीकरण (i), (ii), (iii) में आप देख रहे हैं कि इनमें से प्रत्येक में केवल एक चर है और उसकी अधिकतम घात दो है। प्रत्येक समीकरण में ऐसा एक पद अनिवार्य रूप से उपस्थित है जिसकी घात दो है। ये सभी एक चर के द्विघात समीकरण हैं।

आप जानते हैं कि बहुपद $ax^2 + bx + c$ घात 2 का एक चर का बहुपद है (जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ और $a \neq 0$) इसे द्विघातीय बहुपद कहते हैं। इस द्विघातीय बहुपद को शून्य के बराबर रखने पर यह एक समीकरण बन जाता है।

अर्थात $ax^2 + bx + c = 0$

चूँकि समीकरण में एक ही चर है तथा चर की अधिकतम घात दो है अतः इसे एक चर का द्विघात समीकरण कहा जाता है। यह द्विघात समीकरण या वर्ग समीकरण का मानक या व्यापक रूप है।

कुछ और द्विघात समीकरण नीचे दिए गए हैं –

(i) $x^2 - 2x = 0$ (ii) $(x+1)(x+2) = 0$ (iii) $x^2 = 0$

(iv) $x^2 - 9 = 0$ (v) $z^2 + 3 = 0$ (vi) $x^2 - \sqrt{5}x + 6 = 0$

(vii) $3y^2 + 6y + 6 = 0$ (viii) $(x-2)^2 = 0$ (ix) $3m - 2m^2 + 5 = 0$

$x^2 - 5\sqrt{x} + 3 = 0$ द्विघात (वर्ग) समीकरण नहीं है क्योंकि समीकरण का बायाँ भाग बहुपद नहीं हैं।

करके देखें

निम्नलिखित में से एक चर का द्विघात (वर्ग) समीकरण चुनिए –

(i)	$x^2 - 3x = 0$	(ii)	$-3x^2 - 2^2 = 0$	(iii)	$x + 2 = 0$
(iv)	$x^2 + y = 9$	(v)	$x^2 + 9 = 0$	(vi)	$x + 5y = 0$
(vii)	$(x-1)(x+2) = 0$	(viii)	$x^2 + 2\sqrt{x} - 1 = 0$	(ix)	$(x-3)^2 = 0$
(x)	$x(x-5) = 0$	(xi)	$x^2 + \sqrt{5}x + 3 = 0$	(xi)	$y^2 - z^2 + 3 = 0$
(xiii)	$x^2 - 3\sqrt{x} + 2 = 0$	(xiv)	$x^2 - \sqrt{3}x + 2 = 0$	(xv)	$(x+1)(x+5) = 0$

प्रश्नावली 1

1. निम्नलिखित में से वर्ग समीकरण चुनिए –

(i)	$x^2 + 3x - 2 = 0$	(ii)	$x^2 + \frac{1}{x} = 1$
(iii)	$9x^2 - 100x - 20 = 0$	(iv)	$x^2 - 3\sqrt{x} + 2 = 0$
(v)	$x - \frac{2}{x} = -x$	(vi)	$\sqrt{5}x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$
(vii)	$x^2 - 10x = 0$	(viii)	$x + y = 10$
(ix)	$x + 5 = 7$	(x)	$x(x-8) = 0$

द्विघात समीकरण के मूल (Roots of Quadratic Equation)

$p(x) = x^2 - 3x + 2$ एक द्विघातीय बहुपद है। इस बहुपद के शून्यक x के वे मान होंगे जिनके लिए $p(x)$ शून्य होगा। शून्यक ज्ञात करने के लिए पहले $x^2 - 3x + 2$ के गुणनखण्ड प्राप्त कर लेते हैं।

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2$$
$$= (x^2 - 2x) - 1(x-2)$$
$$= x(x-2) - 1(x-2)$$
$$= (x-2)(x-1)$$

बहुपद $x^2 - 3x + 2$ का मान शून्य होगा यदि $(x-2)(x-1) = 0$

$\Rightarrow$ $(x-2) = 0$ या $(x-1) = 0$

$\Rightarrow$ $x-2=0$ या $x-1=0$

$\therefore x=2$ या $x=1$

अर्थात् x^2-3x+2 के शून्यक 2 व 1 हैं।

अब वर्ग समीकरण $x^2-3x+2=0$ में x के ऐसे मान पता करते हैं जिनके लिए समीकरण के दोनों पक्ष बराबर हों। हम इन मानों को मूल कहते हैं।

$x^2-3x+2=0$

$(x-2)(x-1)=0$

$\Rightarrow$ $(x-2)=0$ या $(x-1)=0$

$\Rightarrow$ $x-2=0$ या $x-1=0$

$\therefore x=2$ या $x=1$

यहाँ हम पाते हैं कि समीकरण $x=2,1$ के लिए संतुष्ट हो रहा है। x के यही मान बहुपद x^2-3x+2 के शून्यक भी हैं अतः हम कह सकते हैं कि द्विघातीय बहुपद के शून्यक उस बहुपद से बनाए गए समीकरण के मूल होते हैं।

कैसे पता करें कि दिए गए मान द्विघातीय समीकरण के मूल हैं अथवा नहीं?

कोई मान किसी वर्ग समीकरण का मूल है अथवा नहीं यह जानना बहुत आसान होता है। जिन मानों को वर्ग समीकरण में रखने पर समीकरण के दोनों पक्ष बराबर हों वे मान समीकरण के मूल होते हैं।

आइए, कुछ उदाहरणों से मूल जाँचने के तरीके सीखते हैं।

उदाहरणः–1. जाँचिए कि $x=1$ तथा $x=-1$ वर्ग समीकरण $x^2-x+1=0$ के मूल हैं अथवा नहीं?

हलः– दिए गए समीकरण $x^2-x+1=0$ में बायाँ पक्ष x^2-x+1 व दायाँ पक्ष 0 है। बायें पक्ष में $x=1$ रखने पर,

$=1^2-1+1$

$=1$

स्पष्टतः बायाँ पक्ष $\neq$ दायाँ पक्ष

अतः $x=1$, दिए गए वर्ग समीकरण का मूल नहीं है।

इसी प्रकार $x=-1$ रखने पर

$=(-1)^2-(-1)+1$

$=1+1+1$

$=3$

स्पष्टतः बायाँ पक्ष $\neq$ दायाँ पक्ष

अतः $x=-1$ वर्ग समीकरण $x^2-x+1=0$ का मूल नहीं है।

उदाहरणः–2. जाँचिए कि $x=2, x=3$ वर्ग समीकरण $x^2-5x+6=0$ के मूल हैं अथवा नहीं?

हलः– दिए गए समीकरण $x^2-5x+6=0$ में बायाँ पक्ष x^2-5x+6 व दायाँ पक्ष 0 है। बायें पक्ष में $x=2$ रखने पर

$$x^2-5x+6$$
$$=(2)^2-5(2)+6$$
$$=4-10+6$$
$$=0$$

स्पष्टतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

इसी प्रकार $x=3$ रखने पर

$$=(3)^2-5(3)+6$$
$$=9-15+6$$
$$=0$$

स्पष्टतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

अतः $x=2, x=3$ समीकरण $x^2-5x+6=0$ के मूल हैं।

करके देखें

जाँचिए कि x के दिए गए मान समीकरण के मूल हैं अथवा नहीं

(i) $x^2+6x+5=0$; $x=-5, x=-1$

(ii) $9x^2-3x-2=0$; $x=\frac{2}{3}, x=-\frac{1}{3}$

(iii) $x^2+x+1=0$; $x=0, x=1$

द्विघात समीकरण को हल करने के तरीके

अब तक हमने देखा कि वर्ग समीकरण कैसे बनते हैं। अब हम उनके हल करने के तरीकों पर चर्चा करेंगे।

$x^2-7x=0$ एक वर्ग समीकरण है।

क्या हम यहाँ x के मान पता कर सकते हैं ?

$\because$ $x^2-7x=0$

$\Rightarrow \quad x(x-7)=0$

$\Rightarrow \quad x=0 \quad$ या $\quad x-7=0$

तब $\quad x=0 \quad$ या $\quad x=7$

चूँकि x के मान समीकरण को संतुष्ट करते हैं अतः ये इस समीकरण $x^2-7x=0$ के हल होंगे।

इसी प्रकार $(x+1)(x-2)=0$ को हल करके देखते हैं –

$\Rightarrow \quad x+1=0 \quad$ या $\quad x-2=0$

$\therefore \quad x=-1 \quad$ या $\quad x=2$

चूँकि x के मान समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

अतः $x=-1$ व $x=2$ समीकरण $(x+1)(x-2)=0$ के मूल होंगे।

करके देखें

निम्नलिखित समीकरणों के हल ज्ञात कीजिए –

(i) $x^2-11x=0$ (ii) $(x-1)^2=0$ (iii) $(x+3)^2=0$

(iv) $(x-2)(x+3)=0$ (v) $x(x-1)=0$

गुणनखंडन करके द्विघात समीकरण को हल करना –

अब हम पाठ के शुरू में विभिन्न परिस्थितियों से बने समीकरणों (i), (ii) तथा (iii) को हल करके उनके चर के मान प्राप्त करेंगे।

समीकरण (i): $x^2-20^2=0$ को हल करने के लिए इसकी तुलना सर्वसमिका $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ से करने पर –

$x^2-20^2=(x-20)(x+20)$

$\therefore \quad (x-20)(x+20)=0$

$\Rightarrow \quad (x-20)=0 \quad$ या $\quad (x+20)=0$

$\Rightarrow \quad x-20=0 \quad$ या $\quad x+20=0$

$\Rightarrow \quad x=20 \quad$ या $\quad x=-20$

चूँकि लंबाई और चौड़ाई ऋणात्मक नहीं हो सकती इसलिए x का मान –20 नहीं हो सकता। इस सन्दर्भ में x को आयताकार बगीचे की चौड़ाई माना गया था।

$\therefore \quad$ आयताकार बगीचे की चौड़ाई = 20 मीटर

तथा लंबाई $2x=2\times 20=40$ मीटर होगी।

समीकरण (ii): $x^2+30x-1000=0$ में हमें समकोण त्रिभुजाकार क्यारी के शीर्षलंब व आधार भुजा की लंबाई की माप ज्ञात करनी है।

चूँकि समीकरण (ii) का बायाँ भाग एक द्विघातीय बहुपद है, इसका गुणनखंडन करेंगे।

$$x^2+50x-20x-1000=0$$

$$\Rightarrow \quad x(x+50)-20(x+50)=0$$

$$\Rightarrow \quad (x+50)(x-20)=0 \qquad (\because 50x-20x=30x)$$

$$\Rightarrow \quad (x+50)=0 \quad \text{या} \quad (x-20)=0$$

$$\Rightarrow \quad x+50=0 \quad \text{या} \quad x-20=0$$

$$\Rightarrow \quad x=-50 \quad \text{या} \quad x=20$$

अतः समकोण त्रिभुजाकार क्यारी के शीर्षलंब की लंबाई = 20 मीटर तथा आधार भुजा की लंबाई $x+30=20+30=50$ मीटर होनी चाहिए।

इसी तरह से समीकरण (iii) का गुणनखंडन करके संख्याएँ प्राप्त की जा सकती हैं। नीचे दिए गए उदाहरणों में हम द्विघात समीकरणों का गुणनखंडन कर हल प्राप्त करेंगे।

उदाहरणः–3. गुणनखंडन करके निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए –

(i) $8x^2-22x-21=0$ (ii) $x^2+2\sqrt{2}x-6=0$

(iii) $\sqrt{3}x^2+10x+7\sqrt{3}=0$ (iv) $\dfrac{x+3}{x-2}-\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{17}{4}, x\neq 0$

हलः– (i) $8x^2-22x-21=0$

$$\Rightarrow \quad 8x^2-28x+6x-21=0$$

$$\Rightarrow \quad 4x(2x-7)+3(2x-7)=0$$

$$\Rightarrow \quad (2x-7)(4x+3)=0$$

$$\Rightarrow \quad (2x-7)=0 \quad \text{या} \quad (4x+3)=0$$

$$\Rightarrow \quad 2x-7=0 \quad \text{या} \quad 4x+3=0$$

$$\Rightarrow \quad 2x=7 \quad \text{या} \quad 4x=-3$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{7}{2} \quad \text{या} \quad x=-\frac{3}{4}$$

अतः $x=\dfrac{7}{2},-\dfrac{3}{4}$ समीकरण के दो मूल हैं।

हलः– (ii) $x^2+2\sqrt{2}x-6=0$

$$\Rightarrow \quad x^2+3\sqrt{2}x-\sqrt{2}x-6=0$$

$$\Rightarrow \quad x(x+3\sqrt{2})-\sqrt{2}(x+3\sqrt{2})=0$$

$$\Rightarrow \quad (x+3\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$$

$$\Rightarrow \quad (x+3\sqrt{2})=0 \quad \text{या} \quad (x-\sqrt{2})=0$$

$\Rightarrow \quad x+3\sqrt{2}=0 \quad$ या $\quad x-\sqrt{2}=0$

$\Rightarrow \quad x=-3\sqrt{2} \quad$ या $\quad x=\sqrt{2}$

अतः $x=-3\sqrt{2},\sqrt{2}$ समीकरण के दो मूल हैं।

हल:– (iii) $\sqrt{3}x^2+10x+7\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow \quad \sqrt{3}x^2+3x+7x+7\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow \quad \sqrt{3}x\left(x+\sqrt{3}\right)+7\left(x+\sqrt{3}\right)=0$

$\Rightarrow \quad \left(x+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}x+7\right)=0$

$\Rightarrow \quad \left(x+\sqrt{3}\right)=0 \quad$ या $\quad \left(\sqrt{3}x+7\right)=0$

$\Rightarrow \quad x+\sqrt{3}=0 \quad$ या $\quad \sqrt{3}x+7=0$

$\Rightarrow \quad x=-\sqrt{3} \quad$ या $\quad x=-\frac{7}{\sqrt{3}}$

अतः $x=-\sqrt{3},-\frac{7}{\sqrt{3}}$ समीकरण के दो मूल हैं।

हल:– (iv) $\frac{x+3}{x-2}-\frac{1-x}{x}=\frac{17}{4}, \quad x\neq 0$

$\Rightarrow \quad \frac{x\left(x+3\right)-\left(1-x\right)\left(x-2\right)}{x\left(x-2\right)}=\frac{17}{4}$

$\Rightarrow \quad \frac{x^2+3x-\left(x-x^2-2+2x\right)}{x^2-2x}=\frac{17}{4}$

$\Rightarrow \quad \frac{x^2+3x-x+x^2+2-2x}{x^2-2x}=\frac{17}{4}$

$\Rightarrow \quad \frac{2x^2+2}{x^2-2x}=\frac{17}{4}$

$\Rightarrow \quad 4\left(2x^2+2\right)=17\left(x^2-2x\right)$

$\Rightarrow \quad 8x^2+8=17x^2-34x$

$\Rightarrow \quad 17x^2-8x^2-34x-8=0$

$\Rightarrow \quad 9x^2-34x-8=0$

$\Rightarrow \quad 9x^2-36x+2x-8=0$

$\Rightarrow \quad 9x\left(x-4\right)+2\left(x-4\right)=0$

$\Rightarrow \quad (x-4)(9x+2)=0$

$\Rightarrow \quad (x-4)=0 \quad$ या $\quad (9x+2)=0$

$\Rightarrow \quad x-4=0 \quad$ या $\quad 9x+2=0$

$\Rightarrow \quad x=4 \quad$ या $\quad x=\frac{-2}{9}$

अतः $x=4,\frac{-2}{9}$ समीकरण के दो मूल हैं।

प्रश्नावली 2

1. जाँचिए कि दिए गए मान समीकरण के मूल हैं अथवा नहीं –

(i) $2x^2+x-6=0; \quad x=2, x=-\frac{3}{2}$

(ii) $x^2-4x+4=0; \quad x=2, x=-3$

(iii) $6x^2-6x-12=0; \quad x=-3, x=4$

(iv) $4x^2-9x=0; \quad x=0, x=\frac{9}{4}$

(v) $x^2-3\sqrt{3}x+6=0; \quad x=\sqrt{3}, x=-2\sqrt{3}$

2. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए –

(i) $(x-4)(x-2)=0$ (ii) $(2x+3)(3x-7)=0$

(iii) $(x-7)^2=0$ (iv) $x^2-11x=0$

(v) $(x+12)^2=0$ (vi) $x(x+1)=0$

3. क्या $\sqrt{2}$ समीकरण $x^2+2x-4=0$ का एक मूल है?

4. निम्नलिखित वर्ग समीकरणों का गुणनखंडन करके उनके मूल ज्ञात कीजिए –

(i) $9x^2-3x-2=0$ (ii) $4x^2+5x=0$

(iii) $3x^2-11x+10=0$ (iv) $5x^2+3x-2=0$

(v) $6x^2+7x+2=0$ (vi) $4\sqrt{3}x^2+5x-2\sqrt{3}=0$

(vii) $10x-\frac{1}{x}=3$ (viii) $x^2-4\sqrt{2}x+6=0$

(ix) $abx^2+(b^2-ac)x-bc=0$

(x) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{5}{6}; \quad x\neq 1,-1$

द्विघात समीकरण के अनुप्रयोग

हमारे जीवन में अनेक ऐसी परिस्थितियाँ होती हैं, जिन पर आधारित कथनों को हम वर्ग समीकरण के रूप में लिख कर उनका समाधान ढूँढते हैं। अब हम ऐसी ही कुछ परिस्थितियों के लिए कथनों को वर्ग समीकरण के रूप में लिखकर उनको हल करेंगे।

उदाहरणः–4. यदि एक संख्या और उसके व्युत्क्रम का योग $2\frac{1}{30}$ है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि वह संख्या x है, तब x का व्युत्क्रम $\frac{1}{x}$ होगा।

$$\therefore \quad x+\frac{1}{x}=2\frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2+1}{x}=\frac{61}{30}$$

$$\Rightarrow \quad 30\left(x^2+1\right)=61x$$

$$\Rightarrow \quad 30x^2-61x+30=0$$

$$\Rightarrow \quad 30x^2-36x-25x+30=0$$

$$\Rightarrow \quad 6x\left(5x-6\right)-5\left(5x-6\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(5x-6\right)\left(6x-5\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad 5x-6=0 \quad \text{या} \quad 6x-5=0$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{6}{5} \quad \text{या} \quad x=\frac{5}{6}$$

अतः वे संख्याएँ $x=\frac{6}{5}$ तथा $x=\frac{5}{6}$ होंगी।

उदाहरणः–5. एक शतरंज के बोर्ड के 64 वर्गाकार खानों में प्रत्येक खाने का क्षेत्रफल 6.25 वर्ग सेमी. है। इस बोर्ड के चारों तरफ 2 सेमी. चौड़ाई के बार्डर बने हैं। शतरंज के बोर्ड की एक भुजा की माप ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि शतरंज के बोर्ड की बॉर्डर सहित माप x सेमी. है,
तब बॉर्डर की माप =2+2 =4 सेमी.

बॉर्डर के बिना शतरंज के बोर्ड का क्षेत्रफल $=\left(x-4\right)^2$

शतरंज के बोर्ड में 64 वर्गाकार खाने हैं,
जिनमें से प्रत्येक का क्षेत्रफल 6.25 वर्गसेमी. है।

$$\therefore \quad \left(x-4\right)^2=64\times 6.25$$

$$\Rightarrow \quad x^2-8x+16=400$$

$$\Rightarrow \quad x^2-8x+16-400=0$$

$\Rightarrow \quad x^2 - 8x - 384 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 24x + 16x - 384 = 0$

$\Rightarrow \quad x(x-24) + 16(x-24) = 0$

$\Rightarrow \quad (x-24)(x+16) = 0$

$\Rightarrow \quad x - 24 = 0 \quad$ या $\quad x + 16 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 24 \quad$ या $\quad x = -16$

शतरंज बोर्ड की माप ऋणात्मक नहीं हो सकती,
अतः शतरंज के बोर्ड की एक भुजा की माप 24 सेमी. होगी।

उदाहरणः–6. कक्षा 10 की टेस्ट परीक्षा में मोहन के गणित और विज्ञान विषयों में प्राप्ताकों का योग 28 है। यदि उसका गणित का प्राप्तांक पहले से 3 अधिक और विज्ञान का प्राप्तांक पहले से 4 कम हो जाए तो उसके दोनों विषयों के प्राप्ताकों का गुणनफल 180 हो जाता है। गणित और विज्ञान विषयों में मोहन के प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।

हलः– यदि मोहन को गणित में x अंक मिले हों, तब उसके विज्ञान विषय के अंक $= 28 - x$ होंगे।

जब मोहन को गणित में पहले से 3 अंक अधिक मिले.
तब उसके गणित के अंक $= x + 3$
और विज्ञान में पहले से 4 अंक कम मिले तब उसके विज्ञान के अंक $= 28 - x - 4$

$\because \quad$ उसके गणित और विज्ञान के इन अंकों का गुणनफल $= 180 \quad$ (दिया है।)

$\therefore \quad (x+3)(28-x-4) = 180$

$\Rightarrow \quad (x+3)(24-x) = 180$

$\Rightarrow \quad -x^2 - 3x + 24x + 72 = 180$

$\Rightarrow \quad -x^2 + 21x + 72 - 180 = 0$

$\Rightarrow \quad -x^2 + 21x - 108 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 12x - 9x + 108 = 0$

$\Rightarrow \quad x(x-12) - 9(x-12) = 0$

$\Rightarrow \quad (x-12)(x-9) = 0$

$\Rightarrow \quad x - 12 = 0 \quad$ या $\quad x - 9 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 12 \quad$ या $\quad x = 9$

जब $\quad x = 12 \Rightarrow 28 - x = 28 - 12 = 16$

जब $\quad x = 9 \Rightarrow 28 - x = 28 - 9 = 19$

इसलिए जब मोहन को गणित में 12 अंक मिले हों तब विज्ञान में उसके प्राप्तांक 16 होंगे।
या उसे गणित में 9 अंक मिले हों तब उसके विज्ञान के प्राप्तांक 19 होंगे।

उदाहरणः–7. एक व्यक्ति की वर्तमान आयु, उसके पुत्र की वर्तमान आयु के वर्ग के बराबर है। यदि 1 वर्ष पहले उस व्यक्ति की आयु उसके पुत्र की आयु की 8 गुनी थी तो दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि पुत्र की वर्तमान आयु $= x$ वर्ष

तब व्यक्ति की वर्तमान आयु $= x^2$ वर्ष

1 वर्ष पहले पुत्र की आयु $= x-1$ वर्ष

तथा 1 वर्ष पहले व्यक्ति की आयु $= x^2-1$ वर्ष

$\because$ 1 वर्ष पहले व्यक्ति की आयु, पुत्र की आयु की 8 गुनी थी,

$\therefore \quad x^2-1=8(x-1)$

$\Rightarrow \quad x^2-1=8x-8$

$\Rightarrow \quad x^2-8x+7=0$

$\Rightarrow \quad x^2-7x-x+7=0$

$\Rightarrow \quad x(x-7)-1(x-7)=0$

$\Rightarrow \quad (x-7)(x-1)=0$

$\Rightarrow \quad x-7=0 \quad$ या $\quad x-1=0$

$\Rightarrow \quad x=7 \quad$ या $\quad x=1$

$x=1$ के लिए पिता व पुत्र की आयु 1 वर्ष है, जो कि संभव नहीं है।

अतः $x=7$ लेने पर

पुत्र की वर्तमान आयु $x=7$ वर्ष एवं

पिता की वर्तमान आयु $x^2=7^2=49$ वर्ष

उदाहरणः–8. एक आयताकार खेत का परिमाप 82 मीटर है तथा उसका क्षेत्रफल 400 वर्गमीटर है। खेत की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि आयताकार खेत की चौड़ाई x मीटर है।

आयताकार खेत का परिमाप = 82 मीटर

$\Rightarrow$ 2(लंबाई+चौड़ाई) = 82 मीटर

$\Rightarrow$ (लंबाई+चौड़ाई) = 41 मीटर

$\Rightarrow$ लंबाई + x = 41 मीटर

$\Rightarrow$ लंबाई = $41-x$ मीटर

$\because$ आयताकार खेत का क्षेत्रफल = 400 वर्ग मीटर

$\Rightarrow$ लंबाई $\times$ चौड़ाई $= 400$ वर्ग मीटर

$\Rightarrow \quad (41-x)x = 400$

$\Rightarrow \quad 41x - x^2 = 400$

$\Rightarrow \quad -x^2 + 41x - 400 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 41x + 400 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 25x - 16x + 400 = 0$

$\Rightarrow \quad x(x-25) - 16(x-25) = 0$

$\Rightarrow \quad (x-25)(x-16) = 0$

$\Rightarrow \quad x-25=0 \quad$ या $\quad x-16=0$

$\Rightarrow \quad x=25 \quad$ या $\quad x=16$

अतः आयताकार खेत की चौड़ाई 16 मीटर और लंबाई 25 मीटर होगी। x के दोनों मानों में एक लंबाई और दूसरी चौड़ाई को व्यक्त करेगा।

उदाहरणः–9. कुछ विद्यार्थियों ने पिकनिक में जाने की योजना बनाई। उन्होंने भोजन पर व्यय के लिए 500 रुपये इकट्ठे किये, लेकिन उनमें से 5 विद्यार्थी पिकनिक में नहीं जा पाए, जिससे प्रत्येक विद्यार्थी को भोजन पर व्यय के लिए 5 रुपये अधिक देने पड़े। बताइए कि पिकनिक पर कितने विद्यार्थी गए?

हलः– माना कि पिकनिक की योजना बनाने वाले विद्यार्थियों की संख्या x है।

$\because$ x विद्यार्थियों द्वारा भोजन व्यय हेतु दी गई राशि $= 500$ रुपये

$\therefore$ एक विद्यार्थी द्वारा भोजन व्यय हेतु दी गई राशि $= \frac{500}{x}$ रुपये

परंतु 5 विद्यार्थियों की संख्या कम हो गई,

तब पिकनिक में जाने वाले विद्यार्थियों की संख्या $= x-5$

अब $x-5$ विद्यार्थियों द्वारा भोजन पर व्यय हेतु दी गई राशि $= 500$ रुपये

अतः एक विद्यार्थी द्वारा भोजन व्यय हेतु दी गई राशि $= \frac{500}{x-5}$ रुपये

प्रश्न के अनुसार, 5 विद्यार्थियों के पिकनिक में नहीं जाने से प्रत्येक विद्यार्थी को भोजन व्यय के लिए 5 रुपये अधिक देने पड़े।

$\therefore \quad \frac{500}{x-5} - \frac{500}{x} = 5$

$\Rightarrow \quad \frac{500x - 500(x-5)}{x(x-5)} = 5$

$\Rightarrow \quad \frac{500\{x-(x-5)\}}{x(x-5)} = 5$

$$\Rightarrow \quad \frac{500(x-x+5)}{x(x-5)} = 5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{500 \times 5}{5} = x^2 - 5x$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 5x - 500 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 25x + 20x - 500 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(x-25) + 20(x-25) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-25)(x+20) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x - 25 = 0 \quad \text{या} \quad x + 20 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 25 \quad \text{या} \quad x = -20$$

$\because$ विद्यार्थियों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती,अतः $x = 25$ होगा।

$\therefore$ पिकनिक पर जाने वाले विद्यार्थियों की संख्या $x - 5 = 25 - 5 = 20$ होगी।

उदाहरणः–10. एक व्यक्ति ने 80 रुपये में कुछ किताबें खरीदीं। यदि उसे इतने ही रुपयों में खरीदी हुई किताबों से 4 किताबें ज्यादा मिली होती, तो प्रत्येक किताब की कीमत पहले से एक रुपये कम हो जाती। बताइए उसने कितनी किताबें खरीदी?

हलः– माना कि खरीदी गई किताबों की संख्या x है,

$\because$ x किताबों की कीमत = 80 रुपये

$\therefore$ 1 किताब की कीमत = $\frac{80}{x}$ रुपये

यदि उसे 4 किताबें और मिली होतीं तब किताबों की संख्या $x+4$ हो जाती

$\because$ $x+4$ किताबों की कीमत = 80 रुपये

$\therefore$ 1 किताब की कीमत = $\frac{80}{x+4}$ रुपये

प्रश्न के अनुसार $\frac{80}{x+4}$ रुपये, $\frac{80}{x}$ रुपये से 1 रुपये कम है–

$$\therefore \quad \frac{80}{x} - 1 = \frac{80}{x+4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{80}{x} - \frac{80}{x+4} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 80\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4}\right] = 1$$

$$\Rightarrow \quad 80\left[\frac{x+4-x}{x(x+4)}\right]=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{80\times 4}{(x^2+4x)}=1$$

$$\Rightarrow \quad 320=x^2+4x$$

$$\Rightarrow \quad x^2+4x-320=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+20x-16x-320=0$$

$$\Rightarrow \quad x(x+20)-16(x+20)=0$$

$$\Rightarrow \quad (x+20)(x-16)=0$$

$$\Rightarrow \quad (x+20)=0 \text{ या } (x-16)=0$$

$$\Rightarrow \quad x=-20 \text{ (अग्राह्य) या } x=16$$

अतः किताबों की संख्या = 16

द्विघात (वर्ग) समीकरण को पूर्ण वर्ग बनाकर हल करना

अब तक हमने द्विघात (वर्ग) समीकरणों को गुणनखंड विधि से हल करना सीखा है। यहाँ हम एक अन्य विधि की चर्चा करेंगे। इस विधि में समीकरण को $(x-a)^2$ या $(x+a)^2$ के रूप में परिवर्तित करते हैं। ऐसा करने के लिए हमें समीकरण के दोनों पक्षों में कुछ विशेष पदों को जोड़ने की आवश्यकता होती है।

निम्नलिखित उदाहरणों में इस विधि का उपयोग किया गया है–

उदाहरण :–11. वर्ग समीकरण $x^2+6x=0$ को पूर्ण वर्ग विधि से हल कीजिए ।

हल:–

$$x^2+6x=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+2x\times 3=0$$

समीकरण को पूर्ण वर्ग बनाने के लिए $2x$ के गुणांक 3 के वर्ग को दोनों पक्षों में जोड़ने पर

$$\Rightarrow \quad x^2+2x\times 3+3^2=3^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+2\times x\times 3+3^2=9$$

$$\Rightarrow \quad (x+3)^2=9 \qquad \text{(सर्वसमिका } x^2+2xa+a^2=(x+a)^2 \text{ के द्वारा)}$$

$$\Rightarrow \quad x+3=\pm\sqrt{9}$$

$$\Rightarrow \quad x+3=\pm 3$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$\Rightarrow \quad x+3=+3$	$x+3=-3$
$\Rightarrow \quad x=3-3$	$x=-3-3$
$\Rightarrow \quad x=0$	$x=-6$

हम देख सकते हैं कि x^2+6x में उभयनिष्ठ होने से हम समीकरण को $x(x+6)=0$ लिख सकते हैं। इसमें स्पष्ट है $x=0$ अथवा $x=-6$ अतः कोई भी तरीका उपयोग करें सवाल का हल नहीं बदलेगा।

उदाहरणः–12. वर्ग समीकरण $x^2-6x+5=0$ को पूर्ण वर्ग विधि से हल कीजिए ।

हलः–

$$x^2-6x+5=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-2x\times 3+5=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-2x\times 3=-5$$

समीकरण के दोनों पक्षों में $2x$ के गुणांक 3 का वर्ग जोड़ने पर

$$\Rightarrow \quad x^2-2x\times 3+3^2=-5+3^2$$

$$\Rightarrow \quad (x-3)^2=-5+9 \qquad \left[\because x^2-2xa+a^2=(x-a)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad (x-3)^2=4$$

$$\Rightarrow \quad x-3=\pm\sqrt{4}$$

$$\Rightarrow \quad x-3=\pm 2$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$\Rightarrow \quad x-3=+2$	$x-3=-2$
$\Rightarrow \quad x=2+3$	$x=-2+3$
$\Rightarrow \quad x=5$	$x=1$

इसमें बहुपद x^2-6x+5 के मध्य पद को तोड़कर हम देखते हैं कि $(x-5)(x-1)=0$ समीकरण है अतः $x=5$ व $x=1$ मूल हैं। किन्तु यहाँ उभयनिष्ठ नहीं मिलता।

उदाहरणः–13. वर्ग समीकरण $x^2-\frac{5}{2}x-3=0$ को हल कीजिए।

हलः–

$$x^2-\frac{5}{2}x-3=0$$

$$\Rightarrow$$

$$x^2-\frac{5}{2}x=3$$

$$\Rightarrow \quad x^2-2x\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}=3$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x \times \frac{5}{4} = 3$$

$2x$ के गुणांक $\frac{5}{4}$ का वर्ग दोनों पक्षों में जोड़ने पर

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x \times \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 3 + \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} + 3$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25 + 48}{16}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{73}{16}$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{5}{4} = \pm\sqrt{\frac{73}{16}}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{73}{16}}$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$\Rightarrow \quad x = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{73}{16}}$	$x = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{73}{16}}$
$\Rightarrow \quad x = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{73}}{4}$	$x = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{73}}{4}$
$\Rightarrow \quad x = \frac{5 + \sqrt{73}}{4}$	$x = \frac{5 - \sqrt{73}}{4}$

क्या इस समीकरण का हल बहुपद में से उभयनिष्ठ बहुपद ढूँढकर अथवा मध्यपद को तोड़कर निकाल सकते हैं?

उदाहरण:–14. वर्ग समीकरण $2x^2 - 7x + 3 = 0$ को हल कीजिए।

हल:–

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 7x = -3$$

समीकरण के दोनों पक्षों में 2 का भाग देने पर

$$\Rightarrow \quad x^2 - \frac{7}{2}x = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = -\frac{3}{2} \qquad \left[\because \frac{7}{2} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = 2 \times \frac{7}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x \times \frac{7}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = -\frac{3}{2} + \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

($2x$ के गुणांक $\frac{7}{4}$ का वर्ग दोनों पक्षों में जोड़ने पर)

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = -\frac{3}{2} + \frac{49}{16} \qquad \left[\because x^2 - 2xa + a^2 = (x-a)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{-24 + 49}{16}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{7}{4} = \pm\sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{7}{4} = \pm\frac{5}{4}$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$\Rightarrow \quad x - \frac{7}{4} = +\frac{5}{4}$	$x - \frac{7}{4} = -\frac{5}{4}$
$\Rightarrow \quad x = \frac{5}{4} + \frac{7}{4}$	$x = -\frac{5}{4} + \frac{7}{4}$
$\Rightarrow \quad x = \frac{12}{4}$	$x = \frac{2}{4}$
$\Rightarrow \quad x = 3$	$x = \frac{1}{2}$

क्या इसे मध्य पद को तोड़कर हल कर सकते हैं? करके देखें।

करके देखें

निम्नलिखित वर्ग समीकरणों को पूर्ण वर्ग विधि से हल कीजिए–

(i) $x^2 - \frac{3}{4}x + 3 = 0$ (ii) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

(iii) $9x^2 - 15x + 6 = 0$

उदाहरणः–15. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+.....}}}$ को हल कीजिए।

हलः– माना कि $x=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+.....}}}$

$\Rightarrow \quad x=\sqrt{6+x}$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

$\Rightarrow \quad x^2=\left(\sqrt{6+x}\right)^2$

$\Rightarrow \quad x^2=6+x$

$\Rightarrow \quad x^2-x-6=0$

$\Rightarrow \quad x^2-3x+2x-6=0$

$\Rightarrow \quad x(x-3)+2(x-3)=0$

$\Rightarrow \quad (x-3)(x+2)=0$

$\Rightarrow \quad (x-3)=0 \quad$ या $\quad (x+2)=0$

$\Rightarrow \quad x=3 \quad$ या $\quad x=-2$

अतः $x=3,-2$

प्रश्नावली – 3

1. निम्नलिखित समीकरणों को पूर्ण वर्ग विधि से हल कीजिए–

   $(i) \quad 2x^2+x-4=0$ $\qquad$ $(ii) \quad 3x^2+11x+10=0$

   $(iii) \quad 5x^2-6x-2=0$ $\qquad$ $(iv) \quad x^2-4\sqrt{2}x+6=0$

   $(v) \quad 3x^2+2x-1=0$ $\qquad$ $(vi) \quad x^2-4x+3=0$

2. $\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7.....}}}}$ को हल कीजिए।
3. दो क्रमागत प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग 85 है, संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. दो क्रमागत प्राकृत संख्याओं का गुणनफल 20 है, संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. दो संख्याओं का योग 48 तथा उनका गुणनफल 432 है, संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
6. एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल 165 वर्ग मीटर है। यदि समकोण त्रिभुज के शीर्षलंब की लंबाई उसकी आधार भुजा से 7 मीटर अधिक हो तो शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।
7. फलों की आयताकार क्यारी का परिमाप 76 मीटर तथा क्षेत्रफल 357 वर्गमीटर है। क्यारी की लंबाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
8. एक आयताकार पार्क का क्षेत्रफल 100 वर्गमीटर है। पार्क की लंबाई उसकी चौड़ाई से 15 मीटर अधिक है। पार्क के चारों ओर तार की जाली का घेरा लगवाया जाना है। यदि एक वर्गमीटर तार की जाली की कीमत 5 रुपये है, तब पार्क के चारों ओर तार की जाली लगाने की लागत ज्ञात कीजिए।

9. एक व्यक्ति और उसके पुत्र की वर्तमान आयु का योग 45 वर्ष है। 5 वर्ष पूर्व दोनों की आयु का गुणनफल उस व्यक्ति की आयु का 4 गुना था। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
10. नीलमणि की 5 वर्ष पूर्व की आयु तथा 8 वर्ष पूर्व की आयु का गुणनफल 40 है। नीलमणि की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
11. कुछ विद्यार्थियों ने पिकनिक में जाने की योजना बनाई। उन्होंने भोजन पर व्यय के लिए 480 रुपये इकट्ठे किये, लेकिन उनमें से 8 विद्यार्थी पिकनिक में नहीं जा पाए, जिससे प्रत्येक विद्यार्थी को भोजन पर व्यय के लिए 10 रुपये अधिक देने पड़े। बताइए कि पिकनिक पर कितने विद्यार्थी गए?
12. कक्षा 10 की टेस्ट परीक्षा में कमल के अंग्रेजी और गणित विषयों के प्राप्तांकों का योग 40 है। यदि गणित विषय में उसके प्राप्तांक पहले की तुलना में 3 अधिक और अंग्रेजी विषय में प्राप्तांक पहले की तुलना में 4 कम हो जाए तो उसके दोनों विषयों के प्राप्तांकों का गुणनफल 360 हो जाता है। गणित और अंग्रेजी में कमल के प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।

भारतीय गणितज्ञ श्रीधराचार्य

श्रीधराचार्य एक चर वाले द्विघातीय (वर्ग) समीकरण को हल करने वाले प्रथम भारतीय गणितज्ञ थे। इन्होंने अंकगणित, ज्यामिति, वर्गमूल तथा घनमूल इत्यादि क्षेत्रों में भी कार्य किया था। ब्रह्मगुप्त (628 ई.) एवं भास्कराचार्य (1150 ई.) के बीच के काल में श्रीधराचार्य (750 ई.) सर्वमान्य गणितज्ञ थे। श्रीधराचार्य के बारे में कहा गया है कि उत्तर में हिमालय से दक्षिण के मलयपर्वत तक और पूर्व तथा पश्चिमी समुद्र की सीमा तक श्रीधराचार्य की तुलना का कोई गणितज्ञ नहीं रहा है। इन्होने वर्ग समीकरण के लिए
निम्न सूत्र दिया :–

चतुराहत वर्ग समै रूपैः पक्ष द्वयं गुणयेत्।
अव्यक्त वर्ग रूपैर्युक्तौ पक्षौततो मूलम्।।

– पाटी गणित एवं गणित के इतिहास से
लेखक – वेणुगोपाल एवं डॉ. हेरर

E6CT43

वर्ग समीकरण हल करने का सूत्र :–

द्विघात (वर्ग) समीकरण का मानक रूप $ax^2+bx+c=0$ होता है, जहाँ a,b,c वास्तविक संख्याएँ और $a\neq 0$

x^2 के गुणांक से समीकरण में भाग करने पर

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 2.\frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a} \quad (2x \text{ के गुणांक का वर्ग करके दोनों पक्षों में जोड़ने पर})$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{(वर्गमूल लेने पर)}$$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

सोचें एवं चर्चा करें

$3x^2 + 7x + 1 = 0$ को किस–किस विधि से हल किया जा सकता है? क्या सबसे हल एक जैसे आएगा? पूर्ण वर्ग विधि व मध्य पद तोड़ने की विधि क्यों आसान नहीं है?

आइए अब वर्ग समीकरण हल करते हैं

उदाहरण:–16. वर्ग समीकरण $(x-1)(2x-1) = -2$ को हल कीजिए।

हल:–

$$(x-1)(2x-1) = -2$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 2x - x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

समीकरण की तुलना मानक समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

$a = 2, b = -3, c = 1$

सूत्र $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ में मान रखने पर

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times1}}{2(2)}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}$$

$$x=\frac{3\pm1}{4}$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$x=\frac{3+1}{4}=\frac{4}{4}$ $x=1$	$x=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}$ $x=\frac{1}{2}$

अतः $x=1,\frac{1}{2}$ समीकरण के मूल हैं।

करके देखें

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिएः–

(i) $3x^2-2x+2=0$ (ii) $x^2-2x+1=0$

द्विघात (वर्ग) समीकरण के विभेदक (विविक्तकर) (Discriminant of Quadratic Equation)

द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ में $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ होता है। सूत्र में b^2-4ac को ही द्विघात (वर्ग) समीकरण का विभेदक (विविक्तकर) कहा जाता है। इसे $D=b^2-4ac$ लिखा जाता है। इसे विभेदक इसलिए कहते हैं कि यह द्विघातीय समीकरण के दोनों हलों के बीच विभेद करता है। यह शून्य हो तो दोनों हल बराबर होते हैं।

आइए कुछ द्विघात समीकरणों के विभेदक ज्ञात करना सीखते हैं–

उदाहरणः–17. वर्ग समीकरण $4x^2-4x+1=0$ का विभेदक ज्ञात कीजिए।

हलः– समीकरण $4x^2-4x+1=0$ की तुलना मानक वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ से करने पर

यहाँ $a=4, b=-4, c=1$

विभेदक $D=b^2-4ac$

$D=(-4)^2-4\times4\times1$

$D=16-16$

$D=0$

उदाहरणः–18. वर्ग समीकरण $2x^2+5x+5=0$ का विभेदक ज्ञात कीजिए।

हलः– $2x^2+5x+5=0$ की तुलना मानक वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ से करने पर

यहाँ $a=2, b=5, c=5$

$\because$ $D=b^2-4ac$

$D=5^2-4\times2\times5$

$D=25-40$

$D=-15$

उदाहरणः–19. वर्ग समीकरण $3x^2-2\sqrt{8}x+2=0$ का विभेदक ज्ञात कीजिए।

हलः– समीकरण $3x^2-2\sqrt{8}x+2=0$ की तुलना मानक वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ से करने पर $a=3, b=-2\sqrt{8}, c=2$

$\because$ $D=b^2-4ac$

$D=\left(-2\sqrt{8}\right)^2-4\times3\times2$

$D=4\times8-24$

$D=32-24$

$D=8$

करके देखें

निम्नलिखित वर्ग समीकरणों के विभेदक ज्ञात कीजिए–

(i) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ (ii) $16x^2+24x+9=0$

(iii) $9x^2-10x+15=0$ (iv) $x^2+16x+64=0$

वर्ग समीकरण के मूलों की प्रकृति (Nature of Roots of Quadratic Equation):–

ऊपर के उदाहरणों में हमने विभिन्न वर्ग समीकरणों के विभेदक सूत्र $D = b^2 - 4ac$ की सहायता से प्राप्त किए। उदाहरणों में D के मान क्रमशः 0, –15, 8 प्राप्त हुए। D के ये मान शून्य, ऋणात्मक एवं धनात्मक संख्या के रूप में प्राप्त हुए हैं। इसका अर्थ है कि विभेदक शून्य, ऋणात्मक या धनात्मक हो सकते हैं। क्या ऐसा होने से वर्ग समीकरण के मूलों के बारे में कोई खास जानकारी मिलती है? आइए इसका पता लगाते हैं।

$\because$ $ax^2 + bx + c = 0$ जहाँ a,b,c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ के मूल ज्ञात करने का सूत्र निम्न है–

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

यहाँ $b^2 - 4ac = D$ है,

अर्थात

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$D = b^2 - 4ac$ मूलों की प्रकृति में विभेद (अन्तर) करता है। इसलिए इसे विभेदक या विविक्तकर कहा जाता है।

अब निम्न तीन स्थितियों की चर्चा करते हैं:–

स्थिति–1 यदि $D = 0$ तब

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm 0}{2a}$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$x = \frac{-b+0}{2a} = \frac{-b}{2a}$	$x = \frac{-b-0}{2a} = \frac{-b}{2a}$

यहाँ x के दोनों मान अर्थात मूल वास्तविक संख्याएँ हैं और समान भी हैं।

निष्कर्ष :– यदि D=0 हो तब वर्ग समीकरण के दोनों मूल वास्तविक व समान होते हैं।

स्थिति–2 यदि $D =$ कोई धनात्मक संख्या हो, तब

माना $D = 49$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{49}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm 7}{2a}$$

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$x=\frac{-b+7}{2a}$	$x=\frac{-b-7}{2a}$

यहाँ x के दोनों मान अर्थात मूल वास्तविक संख्याएँ हैं और असमान हैं।

निष्कर्ष :– यदि $D>0$ अर्थात धनात्मक हो तब वर्ग समीकरण के दोनों मूल वास्तविक व असमान होते हैं।

स्थिति–3 यदि $D=$ कोई ऋणात्मक संख्या हो , तब

जैसे $D=-81$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{-81}}{2a}$$

ऋणात्मक संख्याओं का वर्गमूल अधिकल्पित या काल्पनिक होता है।

(+) चिह्न लेने पर	(–) चिह्न लेने पर
$x=\frac{-b+\sqrt{-81}}{2a}$	$x=\frac{-b-\sqrt{-81}}{2a}$

यहाँ x के दोनों मान अर्थात मूल असमान हैं लेकिन ऋणात्मक संख्या के वर्गमूल होने के कारण काल्पनिक हैं।

निष्कर्ष :– यदि $D<0$ अर्थात ऋणात्मक हो तब वर्ग काल्पनिक एवं असमान होते हैं।

मूलों की प्रकृति पहचानना

अब हम कुछ उदाहरणों से वर्ग समीकरण के मूलों की प्रकृति की पहचान करना सीखेंगे–

उदाहरण:–20. $x^2-4x+4=0$ के मूलों की प्रकृति बताइए।

हल:– $x^2-4x+4=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर

$a=1, b=-4, c=4$

विभेदक $D=b^2-4ac$ में मान रखने पर

$$D=(-4)^2-4\times1\times4$$

$$D=16-16$$

$$D=0$$

$\because$ दिए गए वर्ग समीकरण का विभेदक शून्य है, अतः इस समीकरण के दोनों मूल समान हैं।

उदाहरणः–21. वर्ग समीकरण $x^2-5x+6=0$ के मूलों की प्रकृति बताइए।

हलः– वर्ग समीकरण $x^2-5x+6=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर

$a=1, b=-5, c=6$

विभेदक $D=b^2-4ac$ में मान रखने पर

$D=(-5)^2-4\times1\times6$

$D=25-24$

$D=1$

$D>0$ (धनात्मक)

चूँकि दिए गए वर्ग समीकरण का विभेदक धनात्मक है अतः इस समीकरण के दोनों मूल वास्तविक एवं असमान होंगे।

उदाहरणः–22. वर्ग समीकरण $4x^2-x+1=0$ के मूलों की प्रकृति बताइए।

हलः– वर्ग समीकरण $4x^2-x+1=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर–

$a=4, b=-1, c=1$

विभेदक $D=b^2-4ac$ में मान रखने पर

$D=(-1)^2-4\times4\times1$

$D=1-16$

$D=-15$ (ऋणात्मक)

चूँकि दिए गए वर्ग समीकरण का विभेदक ऋणात्मक है अतः इस समीकरण के दोनों मूल काल्पनिक एवं असमान होंगे।

करके देखें

निम्नलिखित समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए–

(i) $x^2+x+2=0$ (ii) $2x^2+x-1=0$

(iii) $2x^2+5x+5=0$ (iv) $2y^2-2\sqrt{6}y+3=0$

द्विघात समीकरण के अचर गुणांक पता करना

मूलों की प्रकृति के आधार पर किसी द्विघात समीकरण में चर के अचर गुणांक का मान ज्ञात कर सकते हैं। इसे निम्नलिखित उदाहरण से समझते हैं–

उदाहरणः–23. द्विघात समीकरण $9x^2+3kx+4=0$ में k का मान ज्ञात कीजिए। यदि वर्ग समीकरण के मूल समान हैं।

हलः– द्विघात समीकरण $9x^2+3kx+4=0$ की तुलना द्विघात(वर्ग) समीकरण के मानक रूप

$ax^2+bx+c=0$ से करने पर $a=9, b=3k, c=4$

$D=b^2-4ac$ में मान रखने पर

$D=(3k)^2-4\times 9\times 4$

$D=9k^2-144$

मूल समान होने पर $D=0$ होता है।

अर्थात $9k^2-144=0$

$9k^2=144$

$k^2=\frac{144}{9}$

$k^2=16$

$k=\pm 4$

यदि मूल असमान व वास्तविक हों तो k के मान के बारे में हम क्या कह सकते हैं?

करके देखें

निम्नलिखित वर्ग समीकरणों में k का मान ज्ञात कीजिए जिससे वर्ग समीकरण के मूल वास्तविक एवं समान हों :–

(i) $16x^2+kx+9=0$ (ii) $3x^2-2\sqrt{8}x+k=0$

(iii) यदि इन दोनों सवालों में मूल काल्पनिक हों तो k के बारे में हम क्या कह सकते हैं?

प्रश्नावली – 4

1. निम्नलिखित समीकरणों के विभेदक ज्ञात कीजिए–

(i) $x^2-4x+2=0$ (ii) $(x-1)(2x-1)=0$

(iii) $\sqrt{3}x^2+2\sqrt{2}x-2\sqrt{3}=0$ (iv) $x^2-4x+a=0$

(v) $x^2+px+qx=0$

2. निम्नलिखित वर्ग समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए–

(i) $x^2-4x+4=0$ (ii) $2x^2+2x+2=0$

(iii) $3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$ (iv) $x^2+2\sqrt{5}x-1=0$

(v) $\frac{3}{5}x^2-\frac{2}{3}x+1=0$

3. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि दिए गए समीकरण के मूल वास्तविक व समान हों–

(i) $2x^2-10x+k=0$ (ii) $kx^2-5x+k=0$

(iii) $2x^2+kx+\frac{9}{8}=0$ (iv) $9x^2-kx+16=0$

(vi) $kx^2+4x+1=0$

4. निम्नलिखित वर्ग समीकरणों को सूत्र की सहायता से हल कीजिए –

(i) $9x^2+7x-2=0$ (ii) $6x^2+x-2=0$

(iii) $6x^2+7x-10=0$ (iv) $2x^2-9x+7=0$

(v) $x^2-7x-5=0$ (vi) $4-11x=3x^2$

(vii) $9x^2-4=0$ $(viii)$ $\sqrt{3}x^2-10x-8\sqrt{3}=0$

(ix) $2x^2+x-6=0$ (x) $2x^2-2\sqrt{6}x+3=0$

E6LP5Q

द्विघात समीकरण के मूल एवं गुणांकों में संबंध –

द्विघातीय बहुपद में हमने बहुपद के शून्यक एवं गुणांकों में संबंध देखा था, वही संबंध द्विघातीय समीकरणों के मूलों एवं गुणांकों में भी होता है।

माना समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α एवं β हैं ,जहाँ $a\neq 0; a,b,c$ वास्तविक संख्या है। तब $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ या $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ वर्ग समीकरण होगा।.....(1) वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ को निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है–

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad \text{.....(2)}$$

हम देखते हैं कि समीकरण (1) व (2) दोनों ही एक ही समीकरण के दो रूप हैं अतः इनकी तुलना करने पर हम पातें हैं ,

मूलों का योगफल $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

तथा मूलों का गुणनफल $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

उदाहरणः–24. $x^2-5x-24=0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हलः– समीकरण $x^2-5x-24=0$ की तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर

$$a=1, b=-5, c=-24$$

$\because$ मूलों का योगफल $=\frac{-b}{a}$

$\therefore$ मूलों का योगफल $= \frac{-(-5)}{1}$

$= \frac{5}{1}$

$= 5$

$\because$ मूलों का गुणनफल $= \frac{c}{a}$

$\therefore$ मूलों का गुणनफल $= \frac{-24}{1}$

$= -24$

उदाहरणः–25. $3x^2 + 2x + 7 = 0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हलः– समीकरण $3x^2 + 2x + 7 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर

$a = 3, b = 2, c = 7$

$\because$ मूलों का योगफल $= \frac{-b}{a}$

$\therefore$ मूलों का योगफल $= \frac{-2}{3}$

$\because$ मूलों का गुणनफल $= \frac{c}{a}$

$\therefore$ मूलों का गुणनफल $= \frac{7}{3}$

सोचें एवं चर्चा करें

मूल ज्ञात होने पर क्या वर्ग समीकरण बनाया जा सकता है? "बहुपद" अध्याय की अवधारणाओं एवं मूल व गुणांकों के संबंधों के आधार पर वर्ग समीकरण के बनाए जा सकने की संभावनाओं की चर्चा अपने साथियों से करें।

मूल ज्ञात होने पर द्विघात समीकरण बनानाः–

हमने इस अध्याय में अब तक द्विघात समीकरण दिए होने पर उसके मूल ज्ञात करना सीखा है। यदि किसी द्विघात समीकरण के मूल पता हों तब क्या यह संभव है कि हम उस द्विघात समीकरण को ज्ञात कर सकें।

हाँ, हम द्विघात समीकरण के मूलों के योगफल एवं गुणनफल की सहायता से द्विघात समीकरण को ज्ञात कर सकते हैं अर्थात मूल दिए होने पर हम द्विघात समीकरण भी बना सकते हैं।

यदि किसी द्विघात समीकरण के मूल α एवं β हों तब वह द्विघात समीकरण निम्नलिखित होगा –

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

अर्थात् x^2-(मूलों का योग)$x+$मूलों का गुणनफल $=0$

उदाहरणः–26. वह द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल 3 व –8 हैं।

हलः– मूल ज्ञात होने पर बनने वाला द्विघात समीकरण

$\Rightarrow$ x^2-(मूलों का योग)$x+$मूलों का गुणनफल $=0$

$\Rightarrow$ $x^2-[3+(-8)]x+3\times(-8)=0$

$\Rightarrow$ $x^2-(-5)x+(-24)=0$

$\Rightarrow$ $x^2+5x-24=0$

उदाहरणः–27. वह द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\frac{4}{3}$ व $\frac{7}{3}$ हों।

हलः– मूल ज्ञात होने पर बनने वाला द्विघात समीकरण

$\Rightarrow$ x^2-(मूलों का योग)$x+$मूलों का गुणनफल $=0$

$\Rightarrow$ $x^2-\left(\frac{4}{3}+\frac{7}{3}\right)x+\frac{4}{3}\times\frac{7}{3}=0$

$\Rightarrow$ $x^2-\frac{11}{3}x+\frac{28}{9}=0$

$\Rightarrow$ $9x^2-33x+28=0$

उदाहरणः–28. वह द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\left(2+\sqrt{7}\right)$ व $\left(2-\sqrt{7}\right)$ हैं।

हलः– मूल ज्ञात होने पर बनने वाला द्विघात समीकरण

$\Rightarrow$ x^2-(मूलों का योग)$x+$मूलों का गुणनफल $=0$

$\Rightarrow$ $x^2-\left[2+\sqrt{7}+2-\sqrt{7}\right]x+\left(2+\sqrt{7}\right)\left(2-\sqrt{7}\right)=0$

$\Rightarrow$ $x^2-4x+4-7=0$ $\quad\because (2)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=4-7$

$\Rightarrow$ $x^2-4x-3=0$

उदाहरणः–29. यदि किसी वर्ग समीकरण के मूलों का योगफल = – 8 तथा गुणनफल = 4 हों तो वर्ग समीकरण बनाइए।

हलः– मूल ज्ञात होने पर बनने वाला द्विघात समीकरण

$\Rightarrow$ x^2-(मूलों का योग)$x+$मूलों का गुणनफल $=0$

$\Rightarrow$ $x^2-(-8)x+4=0$

$\Rightarrow$ $x^2+8x+4=0$

करके देखें

वर्ग (द्विघात) समीकरण बनाइए जिनके मूल निम्नलिखित हैं –

(i) $2, 3$ (ii) $-5, -3$ (iii) $\sqrt{5}, \sqrt{3}$

प्रश्नावली – 5

1. वर्ग समीकरण बनाइए जिनके मूलों के योगफल व गुणनफल निम्नलिखित हैं –

(i) मूलों का योगफल $= -4$ मूलों का गुणनफल $= -12$

(ii) मूलों का योगफल $= 6$ मूलों का गुणनफल $= -9$

(iii) मूलों का योगफल $= 2\sqrt{7}$ मूलों का गुणनफल $= 8$

(iv) मूलों का योगफल $= \frac{4}{9}$ मूलों का गुणनफल $= 1$

2. वर्ग समीकरण बनाइए जिनके मूल निम्नलिखित हैं–

(i) $7, 4$ (ii) $-5, -11$ (iii) $-2, 4$ (iv) $12, -24$

(v) $\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}$ (vi) $4, 4$ (vii) $\frac{-1}{3}, \frac{2}{5}$ (viii) $8, 3$

(ix) $\sqrt{3}-7, \sqrt{3}+7$ (x) $6+\sqrt{5}, 6-\sqrt{5}$

3. निम्नलिखित वर्ग (द्विघात) समीकरणों के मूलों के योगफल व गुणनफल ज्ञात कीजिए –

(i) $3x^2+7x+1=0$ (ii) $2x^2-2x+3=0$

(iii) $3x^2-5x-2=0$ (iv) $2x^2-2\sqrt{6}x+3=0$

(v) $x^2+6x-6=0$

हमने सीखा

1. cgkn ax^2+bx+c, घात 2 का एक चर का बहुपद है, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ और $a \neq 0$ है। इसे द्विघातीय बहुपद कहते हैं। इस द्विघातीय बहुपद को शून्य के बराबर रखने पर यह समीकरण $ax^2+bx+c=0$ बन जाता है। चूँकि समीकरण में एक ही चर है और चर की अधिकतम घात 2 है अतः इसे एक चर का द्विघात समीकरण कहते हैं।
2. द्विघात समीकरण को वर्ग समीकरण भी कहते हैं।
3. चर x में किसी द्विघात समीकरण का मानक रूप $ax^2+bx+c=0$ है जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ तथा $a \neq 0$ है।

4. $ax^2+bx+c=0$ के रूप के द्विघात समीकरण के दो ही मूल होते हैं।
5. , d pj x में द्विघात समीकरण के मूल गुणनखंडन से तथा द्विघात समीकरण के सूत्र $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ में a,b,c के मान रखकर भी x के मान प्राप्त किए जा सकते हैं।
6. किसी द्विघात समीकरण के मूल α व β हों तब वह द्विघात समीकरण चर x में $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ होता है।
(यहाँ कोई भी चर y, z आदि ले सकते हैं।)
7. यदि वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α व β हों तो उनके मूलों एवं गुणांकों में निम्नलिखित संबंध होता है –

   मूलों का योगफल $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

   तथा मूलों का गुणनफल $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ होता है।
8. द्विघात समीकरण के सूत्र में $D=b^2-4ac$ विभेदक है जिससे हम मूलों की प्रकृति के बारे में जान पाते हैं।
9. जब $D = b^2 - 4ac > 0$ अर्थात D का मान धनात्मक हो तो वर्ग समीकरण के दोनों मूल वास्तविक व असमान होते हैं।
10. जब $D = b^2 - 4ac = 0$ अर्थात D का मान 0 हो तो वर्ग समीकरण के दोनों मूल वास्तविक और समान होते हैं।
11. जब $D = b^2 - 4ac < 0$ अर्थात D का मान ऋणात्मक हो तो वर्ग समीकरण के दोनों मूल काल्पनिक और असमान होते हैं।

उत्तरमाला – 1

1. (i), (iii), (v), (vi), (vii), (x) वर्ग समीकरण हैं।

उत्तरमाला – 2

1. (i) $x=2, x=-\frac{3}{2}$ समीकरण के मूल नहीं हैं।

   (ii) $x=2$ समीकरण का मूल है परन्तु $x=-3$ समीकरण का मूल नहीं हैं।

   (iii) $x=-3, x=4$ समीकरण के मूल नहीं हैं।

   (iv) $x=0, x=\frac{9}{4}$ समीकरण के मूल हैं।

(v) $x=\sqrt{3}$ समीकरण का मूल है परन्तु $x=-2\sqrt{3}$ समीकरण का मूल नहीं हैं।

2. (i) $x=4, x=2$ (ii) $x=-\frac{3}{2}, x=\frac{7}{3}$ (iii) $x=7, x=7$

(iv) $x=0, x=11$ (v) $x=-12, x=-12$ (vi) $x=0, x=-1$

3. $x=\sqrt{2}$ समीकरण का एक मूल नहीं है।

4. (i) $x=\frac{2}{3}, x=-\frac{1}{3}$ (ii) $x=0, x=-\frac{5}{4}$ (iii) $x=\frac{5}{3}, x=2$

(iv) $x=\frac{2}{5}, x=-1$ (v) $x=-\frac{2}{3}, x=-\frac{1}{2}$ (vi) $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}, x=\frac{\sqrt{3}}{4}$

(vii) $x=\frac{1}{2}, x=-\frac{1}{5}$ (viii) $x=3\sqrt{2}, x=\sqrt{2}$

(ix) $x=-\frac{b}{a}, x=\frac{c}{b}$ (x) $x=5, x=-\frac{1}{5}$

उत्तरमाला – 3

1. (i) $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ (ii) $\frac{-5}{3}, -2$ (iii) $\frac{3+\sqrt{19}}{5}, \frac{3-\sqrt{19}}{5}$

(iv) $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$ (v) $\frac{1}{3}, -1$ (vi) $3, 1$

2. $\frac{1+\sqrt{29}}{2}, \frac{1-\sqrt{29}}{2}$ 3. क्रमागत प्राकृत संख्याएँ 6,7

4. क्रमागत प्राकृत संख्याए 4,5 5. संख्याएँ 36,12

6. आधार भुजा की लंबाई = 15 मीटर, शीर्षलंब की लंबाई = 22 मीटर

7. 21मीटर, 17मीटर 8. 250 रुपये,

9. 36 वर्ष, 9 वर्ष 10. 13 वर्ष

11. 16 विद्यार्थी 12. 12, 28 या 21, 19

उत्तरमाला – 4

1. (i) 8 (ii) 1 (iii) 32 (iv) $16-4a$ (v) p^2-4q

2. (i) वास्तविक और समान मूल (ii) मूल वास्तविक नहीं

(iii) वास्तविक और समान मूल (iv) मूल वास्तविक तथा असमान

(v) मूल वास्तविक नहीं

3. (i) $k=\frac{25}{2}$ (ii) $k=\pm\frac{5}{2}$ (iii) $k=\pm 3$

(iv) $k=\pm 24$ (vi) $k=4$

4. (i) $\frac{2}{9},-1$ (ii) $\frac{1}{2},-\frac{2}{3}$ (iii) $-2,\frac{5}{6}$ (iv) $\frac{7}{2},1$

(v) $\frac{1}{2}\left(7+\sqrt{69}\right),\frac{1}{2}\left(7-\sqrt{69}\right)$ (vi) $-4,\frac{1}{3}$ (vii) $\frac{2}{3},\frac{-2}{3}$

$(viii)$ $\frac{12}{\sqrt{3}},\frac{-2}{\sqrt{3}}$ (ix) $-2,\frac{3}{2}$ (x) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

उत्तरमाला – 5

1. (i) $x^2+4x-12=0$ (ii) $x^2-6x-9=0$

(iii) $x^2-2\sqrt{7}x+8=0$ (iv) $9x^2-4x+9=0$

2. (i) $x^2-11x+28=0$ (ii) $x^2-16x+55=0$

(iii) $x^2-2x-8=0$ (iv) $x^2+12x-288=0$

(v) $x^2-\frac{1}{5}x-\frac{12}{25}=0$ (vi) $x^2-8x+16=0$

(vii) $15x^2-x-2=0$ (viii) $x^2-11x+24=0$

(ix) $x^2-2\sqrt{3}x-46=0$ (x) $x^2-12x+31=0$

3. (i) $\frac{-7}{3},\frac{1}{3}$ (ii) $1,\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{5}{3},\frac{-2}{3}$

(iv) $\sqrt{6},\frac{3}{2}$ (v) $-6,-6$