अध्याय

04

समान्तर श्रेढ़ी

[ARITHMETIC PROGRESSION]

E75G91

संख्याओं के पैटर्न

नीचे दी गई संख्याओं को देखिए–

2, 4, 6, 8, 10, ...

क्या आपको इसमें कुछ निश्चित क्रम अथवा पैटर्न दिखाई देता है?

सलमा – इसमें प्रत्येक संख्या अपने से बाद की संख्या से 2 कम है।

मोहन – इसमें प्रत्येक संख्या 2 की क्रमवार गुणज है। 2 को 1 से गुणा करने पर 2, 2 को 2 से गुणा करने पर 4, 2 को 3 से गुणा करने पर 6 और इसी तरह आगे ....

जॉन – इसमें पहली संख्या 2 को दो गुना करने पर दूसरी संख्या 4, दूसरी संख्या 4 का डेढ़ गुना करने पर तीसरी संख्या 6 मिलती है।

आप देख सकते हैं कि जॉन के पैटर्न में प्रत्येक संख्या के लिए अलग–अलग नियम होगा जबकि सलमा और मोहन के पैटर्न में एक ही नियम से सभी संख्याएँ बनेंगी।

अब आप नीचे दी गई संख्याओं को देखिए–

6, 11, 16, 21, ...

आप कह सकते हैं कि इसमें पहली संख्या को छोड़कर प्रत्येक संख्या अपनी पिछली संख्या में 5 जोड़ने पर मिलती है।

क्या इनमें कोई और भी पैटर्न मिल सकता है? (चर्चा करें)।

नीचे संख्याओं के कुछ और उदाहरण दिए जा रहे हैं–

1. –5, –7, –9, –11, –13, ...
2. 4, 9, 14, 19, ...
3. 3, 7, 11, 15, ...

श्रेढ़ी क्या है?

इनमें आप देख सकते हैं कि प्रत्येक श्रृंखला की संख्याएँ अपने से पिछली संख्या से एक निश्चित मात्रा में घटती या बढ़ती है, पहली श्रृंखला में संख्या दो–दो से कम हो रही है जबकि

दूसरी में 5 से और तीसरी में 4 से बढ़ रही है। ऐसी संख्या श्रृंखलाएँ जिनमें क्रमिक संख्याओं के बीच एक निश्चित संबंध हो श्रेढ़ी कहलाती है।

करके देखें

नीचे दी गई सख्याओं की प्रत्येक श्रेढ़ी में क्या पैटर्न है? पहचान कीजिए–

(1) 4, 10, 16, 22, ...

(2) 0, 3, 6, 9, ...

(3) –1, –3, –5, –7, ...

समांतर श्रेढ़ी

आपने देखा कि ऊपर दी गई श्रेढ़ी में पहले पद के बाद प्रत्येक पद, अपने पिछले पद में एक निश्चित संख्या जोड़कर प्राप्त किया जाता है। संख्याओं की ऐसी श्रृंखला समांतर श्रेढ़ी (Arithmetic Progression या A.P.) कहलाती है और यह निश्चित संख्या समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर (common difference) कहलाती है। सार्व अंतर धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।

आइए इस समांतर श्रेढ़ी पर विचार करें–

8, 13, 18, 23, ...

इस श्रेढ़ी का प्रथम पद 8 और दूसरा पद 13 है, तीसरा पद 18 और चौथा पद 23 है। प्रत्येक पद में 5 जोड़ने पर अगला पद मिलता है, इसलिए इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर 5 है।

उदाहरणः–1. समांतर श्रेढ़ी –7, –11, –15, –19, ... के लिए प्रथम पद, चौथा पद और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

हलः– प्रथम पद $= -7$, चौथा पद $= -19$

सार्व अंतर = द्वितीय पद–प्रथम पद

$= -11 - (-7)$

$= -4$

करके देखें

1. नीचे दी हुई संख्याओं की श्रृंखला में से समांतर श्रेढ़ी छाँटिए

(i) 9, 16, 23, 30, -----------------

(ii) 11, 15, 18, 20, -----------------

(iii) 4, 13, 19, 28, -----------------

(iv) 0, -3, -6, -9, -----------------

(v) 2, 2, 2, 2, -----------------

(vi) $9\frac{1}{7}, \frac{7}{7}, \frac{9}{7}, \frac{13}{7}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. दी हुई समांतर श्रेढ़ी के लिए प्रथम पद और सार्व अंतर लिखिए–

(i) 9, 12, 15, 18, -----------------

(ii) 2, 8, 14, 20, ------------------

(iii) 3, -2, -7, -12, ----------------

(iv) -5, 2, 9, 16, -----------------

(v) 0.4, 0.9, 1.4, 1.9, --------------

(vi) 5, 5, 5, 5, ---------------------

(vii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}$,...........

आगे के पद ज्ञात करना

नीचे एक समांतर श्रेढ़ी दी गई है–

3, 10, 17, ...

क्या हम इसके आगे के पद पता कर सकते हैं? सोचें इस समांतर श्रेढ़ी का अगला यानी चौथा पद कैसे ज्ञात करें।

अजीता – तीसरे पद यानी 17 में 7 सार्व अंतर जोड़ने पर 24 मिलता है, यही इस श्रेढ़ी का चौथा पद है।

अब आप इस श्रेढ़ी के अगले चार पद यानी पाँचवे, छठे, सातवें, आठवें पद लिखिए–

पाँचवाँ पद		सातवाँ पद	
छठवाँ पद		आठवाँ पद	

करके देखें

1. नीचे दी गई समांतर श्रेढ़ियों के अगले तीन पद ज्ञात कीजिए।

(i) 5, 11, 17, 23, -----------------

(ii) -11, -8, -5, -2, -----------------

(iii) $\frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{10}{9}, \frac{13}{9}$,.......................

(iv) 0, 9, 18, 27, -----------------

समांतर श्रेढ़ी को व्यापक रूप में व्यक्त करना

हमने यहाँ कई समांतर श्रेढ़ियाँ देखीं। प्रत्येक में प्रथम पद और एक सार्व अंतर है। यदि हम समांतर श्रेढ़ी के पहले पद या प्रथम पद को a और सार्व अंतर को d से व्यक्त करें, तो हम आगे के सभी पद a और d के आधार पर बता सकते हैं। समांतर श्रेढ़ी का दूसरा पद, पहले पद में सार्व अंतर d जोड़ने पर मिलेगा यानी दूसरा पद $a+d$ होगा। इसी तरह दूसरे पद $a+d$ में d जोड़ने पर तीसरा पद $a+d+d$ प्राप्त होगा। आप समांतर श्रेढ़ी को इस तरह लिख सकते हैं–

$a, a + d, a + d + d, a + d + d + d, ...$

या

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, ...$

इसे समांतर श्रेढ़ी का व्यापक रूप कहते हैं। पदों की संख्या परिमित होने पर इसे परिमित समांतर श्रेढ़ी कहते हैं और पदों की संख्या अपरिमित होने पर यह अपरिमित समांतर श्रेढ़ी कहलाती है।

आप देख सकते हैं कि उदाहरण (1) में दी गई समांतर श्रेढ़ी 7, 11, 15, 19, ... में पदों की संख्या अपरिमित है, इसलिए यह अपरिमित समांतर श्रेढ़ी है।

करके देखें

1. एक अपरिमित समांतर श्रेढ़ी बनाइए, जिसका प्रथम पद 5 और सार्व अंतर 3 हो।
2. 5 पदों वाली दो परिमित समांतर श्रेढ़ियाँ बनाइए।
3. 10 पदों वाली किसी परिमित समांतर श्रेढ़ी की सबसे बड़ी सदस्य संख्या कौनसी होगी यदि $a=11$ और $d=6$?

नोट :– सार्व अंतर का हमेशा प्राकृत संख्या होना आवश्यक नहीं है। सार्व अंतर कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है।

उदाहरण:–2. किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद $a=10$, सार्व अंतर $d= -3$ हो, तो श्रेढ़ी के प्रथम तीन पद लिखिए।

हल:–

प्रथम पद $a=10$

सार्व अंतर $d= -3$

द्वितीय पद $= a+d$

$= 10 + (-3)$

$= 7$

तृतीय पद $= a+2d$

$= 10+2(-3)$

$= 10-6$

$= 4$

अतः श्रेढ़ी के प्रथम तीन पद 10, 7, 4 है।

समांतर श्रेढ़ी के पहले पद या प्रथम पद को a_1 से, द्वितीय पद को a_2 से, तृतीय पद को a_3 से,.............., n वें पद को a_n से तथा सार्व अंतर (common difference) को d से व्यक्त करें, तो समांतर श्रेढ़ी को $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ से व्यक्त कर सकते हैं

इस स्थिति में सार्व अंतर $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots\ldots a_n - a_{n-1}$ ।

उदाहरणः—3. संख्याओं की निम्नलिखित श्रृंखलाओं में से कौन—कौन सी समांतर श्रेढ़ी में है? समांतर श्रेढ़ी के अगले दो पद लिखिए।

(i) 9, 27, 81, ...

(ii) $4, 4+\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3}, 4+3\sqrt{3}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

(iii) 1, -1, -3, -5, ...

(iv) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, ...

हलः—

(i) $a_1=9, a_2=27, a_3=81$

$a_2-a_1 = 27 - 9 = 18$

$a_3-a_2 = 81-27 = 54$

चूँकि, $a_3 - a_2 \neq a_2 - a_1$, इसलिए दी गई संख्याओं की श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी नहीं है।

(ii) $a_1 = 4, a_2 = 4+\sqrt{3},\ a_3 = 4+2\sqrt{3},\ a_4 = 4+3\sqrt{3},$

$a_2 - a_1 = 4+\sqrt{3}-4 = \sqrt{3}$

$a_3 - a_2 = 4+2\sqrt{3}-(4+\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

$a_4 - a_3 = 4+3\sqrt{3}-(4+2\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

चूँकि प्रत्येक बार $a_{k+1} - a_k$ (जहाँ k=1,2,3......) समान ही है, इसलिए दी गई संख्याओं की श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका सार्व अंतर $d = \sqrt{3}$ है। इस श्रेढ़ी के अगले दो पद

$(4+3\sqrt{3})+(\sqrt{3}) = 4+4\sqrt{3}$ और

$(4+4\sqrt{3})+(\sqrt{3}) = 4+5\sqrt{3}$ हैं।

(iii) $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -3, a_4 = -5$

$a_2 - a_1 = -1-1 = -2$

$a_3 - a_2 = -3-(-1) = -2$

$a_4 - a_3 = -5-(-3) = -2$

चूँकि प्रत्येक बार $a_{k+1} - a_k$ (जहाँ k=1,2,3......) समान ही है, इसलिए दी गई संख्याओं की श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका सार्व अंतर d=–2 है। इस श्रेढ़ी के अगले दो पद

$-5+(-2) = -7$ और $-7+(-2) = -9$ हैं।

(iv) $a_1 = 0.2, a_2 = 0.22, a_3 = 0.222, a_4 = 0.2222$

$a_2 - a_1 = 0.22 - 0.2 = 0.02$

$a_3 - a_2 = 0.222 - 0.22 = 0.002$

चूँकि $a_3 - a_2 \neq a_2 - a_1$ इसलिए दी गई संख्याओं की श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी नहीं है।

समांतर श्रेढ़ी का n वाँ पद

मान लीजिए कि $a_1, a_2, a_3, ...$ एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद a है और सार्व अंतर d है, तब

प्रथम पद $a_1 = a$

द्वितीय पद $a_2 = a + d = a + (2-1)d$

तृतीय पद $a_3 = a + 2d = a + (3-1)d$

चौथा पद $a_4 = a + 3d = a + (4-1)d$

पाँचवाँ पद $a_5 = a + 4d = a + (5-1)d$

उपर्युक्त पैटर्न को देखकर आप कह सकते हैं कि

n वाँ पद $a_n = a + (n-1)d$

यदि किसी समांतर श्रेढ़ी में m पद हैं, तो a_m इसके अंतिम पद को व्यक्त करता है। अंतिम पद को l से भी व्यक्त किया जाता है।

आइए, इसे कुछ उदाहरणों से समझें–

उदाहरण:–4. समांतर श्रेढ़ी 4,7,10,13 .... का 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए–

हल:–

यहाँ $a = 4,\ d = 7 - 4 = 3$ और $n = 10$

$\therefore a_{10} = a + (10-1)d$ [$\because$ n वाँ पद $a_n = a + (n-1)d$]

$= 4 + 9 \times 3$

$= 4 + 27$

$= 31$

उदाहरणः–5. समांतर श्रेढ़ी 2,6,10,......... में m पद हैं। अंतिम पद ज्ञात कीजिए।

हलः– यहाँ प्रथम पद a=2, सार्व अंतर d=6-2=4 और पदों की संख्या m है। इसलिए अंतिम पद m होगा। अतः n=m

m वाँ पद $a_m = a + (m-1)d$ $\quad [\because$ n वाँ पद $a_n = a + (n-1)d\,]$

$a_m = 2 + (m-1)4$

$= 2 + 4m - 4$

$= 4m - 2$

करके देखें

1. समांतर श्रेढ़ी 3,5,7,................ में 15 पद हैं। अंतिम पद ज्ञात कीजिए।
2. समांतर श्रेढ़ी –9,–5,–1,............ का अंतिम पद 67 है तो श्रेढ़ी में कितने पद हैं?
3. समांतर श्रेढ़ी 10, 15, 20, ... का m वाँ और p वाँ पद ज्ञात कीजिए।

आइए, ऐसे कुछ और उदाहरणों को समझें–

उदाहरणः–6. क्या समांतर श्रेढ़ी 5,11,17,23,............... का कोई पद 301 है? कारण सहित लिखिए।

हलः–

यहाँ a=5, d=11-5=6,

माना n वाँ पद 301 है अर्थात् $a_n = 301$

हमें n का मान ज्ञात करना है।

$\therefore a_n = a + (n-1)d$

$301 = 5 + (n-1)6$

$301 = 5 + 6n - 6$

$301 = 6n - 1$

$6n = 302$

$$n = \frac{302}{6}$$

$$n = \frac{151}{3}$$

चूँकि n पदों की संख्या है, अतः एक धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए। इसलिए 301 दी गई समांतर श्रेढ़ी का कोई पद नहीं है।

उदाहरणः–7. एक समांतर श्रेढ़ी में 50 पद हैं, जिसका तीसरा पद 12 है और अंतिम पद 106 है। इसका 29 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हलः–

माना समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d है।

तीसरा पद $= 12$

$a_3 = 12$

या, $a + (3-1)\,d = 12$

या, $a + 2d = 12 \text{ .... } (1)$

और अंतिम पचासवाँ पद $= 106$

50 वाँ पद $= 106$

$a_{50} = 106$

$a + (50-1)\,d = 106$

$a + 49d = 106 \text{ .... } (2)$

समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर

$$\begin{array}{r} a + 49d = 106 \\ a + 2d = 12 \\ - \quad - \qquad - \\ \hline 47d = 94 \end{array}$$

$$d = \frac{94}{47}$$

$d = 2 \text{ ....} (3)$

समीकरण (3) से d का मान समीकरण (1) में रखने पर

$a + 2\,(2) = 12$

$a + 4 = 12$

$a = 12 - 4$

$a = 8 \text{ ....} (4)$

समांतर श्रेढ़ी का 29 वाँ पद $= a + (29-1)d$

$= 8 + (28)(2)$

$= 8 + 56$

$= 64$

इसलिए समांतर श्रेढ़ी का 29वाँ पद 64 है।

करके देखें

1. एक समांतर श्रेढ़ी में 50 पद हैं, जिसका तीसरा पद 12 है और अंतिम पद 106 है। इस श्रेढ़ी का 21 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
2. एक समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 10 और सार्व अंतर –3 है। 11 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

समांतर श्रेढ़ियाँ कई तरह के सवाल हल करने में भी मदद कर सकती हैं। आइए, इसे भी कुछ उदाहरणों से समझें–

उदाहरणः–8. दो अंकों वाली कितनी संख्याएँ 5 से विभाज्य हैं?

हलः–

5 से विभाज्य होने वाली दो अंकों की संख्याओं की श्रृंखला निम्नानुसार है–

10, 15, 20, ..., 95

यह एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद $a=10$, सार्व अंतर $d=5$ और n वाँ पद $a_n=95$

चूँकि n वाँ पद $a_n = a+(n-1)d$

$$95 = 10 + (n-1) \times 5$$

$$95 = 10 + 5n - 5$$

$$95 = 5+5n$$

$$5n = 95 - 5$$

$$n = \frac{90}{5}$$

$$n = 18$$

इसलिए 5 से विभाज्य दो अंकों वाली 18 संख्याएँ हैं।

उदाहरणः–9. ज्योति ने 1997 में 5000 रुपये के मासिक वेतन वाले पद पर कार्य आरंभ किया और प्रत्येक वर्ष 200 रुपये की वेतन वृद्धि प्राप्त की। किस वर्ष में उसका वेतन 7000 रुपये हो गया?

हलः–

वर्ष 1997, 1998, 1999, 2000, ... में मासिक वेतन (रुपये में) है

5000, 5200, 5400, 5600 ....

यह एक समांतर श्रेढ़ी है, क्योंकि किन्हीं दो क्रमागत पदों का अंतर 200 है, इसलिए सार्व अंतर $d=200$ और प्रथम पद $a=5000$

माना n वर्षों में ज्योति का वेतन 7000 रुपये हो गया।

तब

$$\begin{aligned} a_n &= 7000 \\ a + (n-1)d &= 7000 \\ 5000 + (n-1)\,200 &= 7000 \\ (n-1)\,200 &= 7000 - 5000 \\ (n-1)\,200 &= 2000 \\ n-1 &= \frac{2000}{200} \\ n-1 &= 10 \\ n &= 11 \end{aligned}$$

इसलिए ग्यारहवें वर्ष में अर्थात् 2007 में ज्योति का वेतन 7000 रुपये हो गया।

अभी तक आपने ऐसे उदाहरण हल किए जिनमें संख्याओं से बनी श्रृंखलाएँ समांतर श्रेढ़ी बनाती हैं। अब कुछ ऐसे उदाहरण हल करेंगे जिनमें अक्षर संख्याओं (जैसे p,q,r इत्यादि) से बनी श्रृंखलाएँ समांतर श्रेढ़ी बनाती हैं।

उदाहरणः–10. एक समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद q और q वाँ पद p है, तो श्रेढ़ी का m वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हलः–

मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d है।

यहाँ,समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद = q

$\therefore a+(p-1)d = q$ ....(1)

समांतर श्रेढ़ी का q वाँ पद = p

$\therefore a+(q-1)d = p$ ....(2)

समीकरण (1) में समीकरण (2) को घटाने पर

$$\begin{aligned} a + (p-1)d &= q \\ a + (q-1)d &= p \end{aligned}$$

घटाने पर $\quad - \quad - \quad\quad -$

$$\begin{aligned} [(p-1)-(q-1)]d &= q-p \\ [p-1-q+1]d &= q-p \\ (p-q)\,d &= q-p \end{aligned}$$

$$d = \frac{-(p-q)}{(p-q)}$$

$$d = -1 \qquad .....(3)$$

समीकरण (3) से d का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$a + (p-1)(-1) = q$$
$$a = q + (p-1)$$
$$a = q + p - 1 \qquad .....(4)$$

श्रेढ़ी का m वाँ पद $\quad a_m = a + (m-1)d$

$$= (p+q-1) + (m-1)(-1)$$
$$= p + q - 1 - m + 1$$
$$= p + q - m$$

इसलिए श्रेढ़ी का m वाँ पद $= p + q - m$

प्रश्नावली 1

1. सही विकल्प चुनकर कारण सहित लिखिए–

(i) दी गई समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद और सार्व अंतर है–

$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, ...$

(a) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{2}, -1$ (c) $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ (d) $\frac{-3}{2}, -1$

(ii) किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद –2 और सार्व अंतर –2 है तो चौथा पद होगा–

(a) 0 (b) –2 (c) –4 (d) –8

(iii) समांतर श्रेढ़ी 7,13,19,.... का 15 वाँ पद होगा–

(a) 91 (b) 97 (c) 112 (d) 90

(iv) किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 4 और सार्व अंतर –4 है तो n वाँ पद होगा–

(a) $8 - 2n$ (b) $4 - 2n$ (c) $8 - 4n$ (d) $8 - 8n$

(v) समांतर श्रेढ़ी 3, 8, 13, 18.... का कौन–सा पद 78 है?

(a) 15 वाँ (b) 16 वाँ (c) 17 वाँ (d) 18 वाँ

2. निम्नलिखित श्रेढ़ियों में कौन–सी समांतर श्रेढ़ी है कारण भी बताइए–

(a) $a, a^2, a^3, a^4, ...$

(b) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, ...$

(c) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, ...$

(d) $0, -4, -8, -12, ...$

(e) $16, 18\frac{1}{2}, 20\frac{1}{2}, 23, ...$

3. समांतर श्रेढ़ी 9,5,1,–3,............. का 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
4. समांतर श्रेढ़ी 100, 70, 40,........ का 40वाँ पद ज्ञात कीजिए।
5. समांतर श्रेढ़ी $\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, ...$ का n वाँ पद ज्ञात कीजिए।
6. समांतर श्रेढ़ी 950, 900, 850, ... का m वाँ पद ज्ञात कीजिए।
7. समांतर श्रेढ़ी 8,15,22, ... का अंतिम पद 218 है। पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।
8. 27, 24, 21, ... का कौन–सा पद शून्य है?
9. यदि दो समांतर श्रेढ़ियों का सार्व अंतर समान है और इनके 99 वें पदों का अंतर 99 है, तो इनके 999 वें पदों का अंतर क्या होगा? कारण भी बताइए।
10. फूलों की एक क्यारी की पहली पंक्ति में 23 पौधे हैं, दूसरी पंक्ति में 21 पौधे हैं, तीसरी पंक्ति में 19 पौधे हैं, इत्यादि। इस क्यारी की अंतिम पंक्ति में 5 पौधे हैं। क्यारी में कुल कितनी पंक्तियाँ हैं?
11. संजय ने वर्ष के प्रथम सप्ताह में 5 रुपये की बचत की और फिर अपनी साप्ताहिक बचत 1.75 रुपये बढ़ाता गया। यदि n वें सप्ताह में उसकी साप्ताहिक बचत 20.75 रुपये हो जाती है, तो n का मान ज्ञात कीजिए।
12. क्या समांतर श्रेढ़ी $18, 15\frac{1}{2}, 13, ...$ का एक पद –47 है? यदि हाँ तो कौनसा पद है?
13. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का 11 वाँ पद 38 और 16 वाँ पद 73 है, तो इस श्रेढ़ी का 31 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
14. किसी समांतर श्रेढ़ी का 12 वाँ पद उसके 5 वें पद से 14 अधिक है और दोनों पदों का योग 36 है, तो इस श्रेढ़ी का m वाँ पद ज्ञात कीजिए।
15. समांतर श्रेढ़ी 3,15,27,39, ... का कौनसा पद उसके 54 वें पद से 132 अधिक होगा?
16. किसी समांतर श्रेढ़ी के चौथे और आठवें पदों का योग 24 है तथा छठे और दसवें पदों का योग 44 है। इस समांतर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।
17. तीन अंकों वाली कितनी संख्याएँ 3 से विभाज्य हैं?
18. समांतर श्रेढ़ी 3,8,13, ..., 253 में अंतिम से 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

19. एक समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद $\frac{1}{q}$ और q वाँ पद $\frac{1}{p}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि श्रेढ़ी के (pq) वें पद का मान 1 है।

20. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद q, q वाँ पद p हो तो सिद्ध कीजिए कि $(p+q)$ वाँ पद शून्य है।

21. यदि a,b,c किसी समांतर श्रेढ़ी के क्रमशः p वें, q वें और r वें पद हैं, तो सिद्ध कीजिए कि–

$$a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$$

22. n के किस मान के लिए, समांतर श्रेढ़ियों 63,65,67,...... और 3,10,17.... के n वें पद बराबर होंगे?

समांतर माध्य

E7ECAN

मान लीजिए तीन राशियाँ a, A, b समांतर श्रेढ़ी में है, तो बीच की राशि A को दो राशियों a और b का समांतर माध्य (Arithmetic Mean) कहते हैं।

चूँकि a, A, b समांतर श्रेढ़ी में हैं, इसलिए

$$A-a = b-A$$

$$A+A = b+a$$

$$2A = a+b$$

$$A = \frac{a+b}{2}$$

इसलिए आप कह सकते हैं कि दो राशियों का समांतर माध्य, उन दोनों राशियों के योगफल का आधा होता है। आइए एक उदाहरण से इसे समझें।

उदाहरणः–11. $\sqrt{2}+1$ और $\sqrt{2}-1$ का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

हलः–

समांतर माध्य $=\frac{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)}{2}$

$$=\frac{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)}{2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sqrt{2}$$

दो राशियों a और b के बीच समांतर श्रेढ़ी का निर्माण

हम चाहें तो किन्हीं भी दो राशियों के बीच नयी संख्याएँ डालकर समांतर श्रेढ़ी बना सकते हैं। इसके लिए हमें बीच में पदों की संख्या के हिसाब से सार्व अंतर d लेना होगा। मान लीजिए दो राशियों a और b के बीच n पद $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ प्रविष्ट करने हैं। तब $a, A_1, A_2, A_3, ...A_n, b$ समांतर श्रेढ़ी में होंगे और इस समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a, अंतिम पद b और पदों की संख्या (n+2) होगी।

मान लीजिए इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर d है,

तो अंतिम पद $b = a + (\overline{n+2} - 1)d$ [$\because$ n वाँ पद $a_n = a + (n-1)d$]

$$b = a + (n+1)d$$

$$b - a = (n+1)d$$

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

इसलिए $A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$

$$A_2 = a + 2d = a + 2\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$$

$$A_3 = a + 3d = a + 3\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$$

उपर्युक्त पैटर्न को देखकर कह सकते हैं कि

n वाँ पद $A_n = a + nd = a + n\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$

आइए, इसे कुछ उदाहरणों से समझें।

उदाहरण:–12. 11 और –5 के बीच 3 पदों का निवेश करते हुए समांतर श्रेढ़ी का निर्माण कीजिए।

हल:–

माना 11 और –5 के बीच 3 पद A_1, A_2, A_3 हैं। इसलिए 11, A_1, A_2, A_3, -5 समांतर श्रेढ़ी में हैं। इस समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a=11, 5 वाँ पद = -5 है। मान लीजिए इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर d है।

5 वाँ पद $= a + 4d$ [$\because$ n वाँ पद $a_n = a + (n-1)d$]

$-5 = 11 + 4d$

$-5-11 = 4d$

$4d = -16$

$$d = \frac{-16}{4}$$

$d = -4$

अतः $A_1 = a + d$

$= 11 + (-4)$

$= 7$

$A_2 = a + 2d$

$= 11 + 2(-4)$

$= 11 - 8$

$= 3$

$A_3 = a + 3d$

$= 11 + 3(-4)$

$= 11 - 12$

$= -1$

इसलिए 11 और –5 के बीच तीन पद 7,3,–1 हैं और जिनसे निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ी बनती है–

11, 7, 3, –1, –5

उदाहरणः–13. 2 और 41 के बीच n पद हैं। 2 और 41 के बीच के चौथे व (n-1) वें पदों का अनुपात 2:5 है। तो n का मान बताइए।

हलः–

मान लीजिए 2 और 41 के बीच n पद $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ हैं तब $2, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, 41 समांतर श्रेढ़ी में हैं, जिसका प्रथम पद a=2 और (n+2) वाँ पद 41 है।

मान लीजिए श्रेढ़ी का सार्व अंतर d है। तब

(n+2) वाँ पद = 41

$2 + (\overline{n+2} - 1)d = 41$ [$\because$ n वाँ पद $a_n = a + (n-1)d$]

$2 + (n + 1)d = 41$

$(n+1)d = 41-2$

$$d = \frac{39}{n+1}$$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{\text{श्रेढ़ी का चौथा पद}A_4}{\text{श्रेढ़ी का nवाँ पद}A_{n-1}} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{a+4d}{a+(n-1)d} = \frac{2}{5}$$

$$5a+20d = 2a+2(n-1)d$$

$$5a-2a = 2(n-1)d-20d$$

$$3a = (2n-2)d-20d$$

$$3a = (2n-2-20)d$$

$$3a = (2n-22)d$$

$$3(2) = (2n\text{-}22)\left(\frac{39}{n+1}\right)$$

(a और d का मान रखने पर)

$$6(n+1) = 39(2n\text{-}22)$$

$$6n+6 = 78n\text{-}858$$

$$6+858 = 78n\text{-}6n$$

$$864 = 72n$$

$$n = \frac{864}{72}$$

$$n = 12$$

प्रश्नावली 2

1. $\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{2}$ का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।
2. x^2+3xy और $y^2\text{-}3xy$ का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।
3. दो संख्याओं का समांतर माध्य 7 और गुणनफल 45 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. दो संख्याओं का समांतर माध्य 6 और उनके वर्गों का योग 90 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. –4 और 10 के बीच 6 पद निवेश करते हुए समांतर श्रेढ़ी का निर्माण कीजिए।
6. 11 और –7 के बीच 5 पद निवेश करते हुए समांतर श्रेढ़ी का निर्माण कीजिए।

7. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के pवें व qवें पदों का माध्य, rवें व sवें पदों के माध्य के बराबर हो, तो सिद्ध कीजिए कि $p+q=r+s$

8. 7 और 49 के बीच n पद हैं। यदि पाँचवें और (n-1) वें पदों का अनुपात 5:4 हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

समांतर श्रेढ़ी का योग

समांतर श्रेढ़ी 5,7,9,11,13,........... के प्रथम तीन पदों का योग S_3 से व्यक्त करें तो

$S_3 = 5+7+9=21$

इस समांतर श्रेढ़ी के पहले चार पदों का योग पता करने के लिए आप इसके पहले चार पद यानी 5, 7, 9 और 11 का योग करेंगे। इस तरह से पहले चार पदों का योग 32 प्राप्त होगा। परन्तु यदि आपको इस श्रेढ़ी के पहले 90 पदों का योग पता करना हो तो श्रेढ़ी के पहले 90 पदों को जोड़ना पड़ेगा। यह बहुत लंबा होगा। किन्तु आप इस श्रेढ़ी के प्रथम पद a, सार्व अंतर d और पदों की संख्या n पता करके पहले n पदों का योग ज्ञात कर सकते है–

मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d है, इसलिए

$$a, a+d, a+2d, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

समांतर श्रेढी है।

माना समांतर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पदों का योग S_3 है, तो

$S_3 = a+(a+d)+(a+2d)$ .....(1)

पदों का योग विपरीत क्रम में लिखने पर

$S_3 = (a+2d)+(a+d)+a$ .....(2)

समीकरण (1) और (2) को पदों के अनुसार जोड़ने पर

$$2S_3 = [a+(a+2d)]+[(a+d)+(a+d)]+[(a+2d)+a]$$

$$2S_3 = [2a+2d]+[2a+2d]+[2a+2d]$$

$$2S_3 = 3[2a+2d]$$

$$S_3 = \frac{3}{2}[2a+(3-1)d] \qquad .....(3)$$

माना समांतर श्रेढ़ी के प्रथम चार पदों का योग S_4 है, तो

$S_4 = a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)$ .....(4)

पदों का योग विपरीत क्रम में लिखने पर

$S_4 =(a+3d)+(a+2d)+(a+d)+a$ .....(5)

समीकरण (4) और (5) को पदों के अनुसार जोड़ने पर

$$2S_4 = [a+(a+3d)]+[(a+d)+(a+2d)]+[(a+2d)+(a+d)]+[(a+3d)+a]$$

$$2S_4 = [2a+3d]+[2a+3d]+[2a+3d]+[2a+3d]$$

$$2S_4 = 4[2a+3d]$$

$$S_4 = \frac{4}{2}[2a+(4-1)d] \qquad .....(6)$$

इसी तरह से

$$S_5 = \frac{5}{2}[2a+(5-1)d] \qquad .....(7)$$

$$S_6 = \frac{6}{2}[2a+(6-1)d] \qquad .....(8)$$

उपर्युक्त समीकरणों (3), (6), (7), (8)के पैटर्न को देखकर आप कह सकते हैं कि समांतर श्रेढ़ी जिसका प्रथम पद a और सार्व अंतर d है, के प्रथम n पदों का योग S_n हो तो

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

निगमन द्वारा श्रेढ़ी का योग निकालना

मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d है, इसलिए

a, a+d, a+2d, ...

समांतर श्रेढ़ी है।

समांतर श्रेढ़ी का n वाँ पद a+(n-1)d है। माना S_n इस समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग है। इसलिए

$$S_n = a+(a+d)+(a+2d)+ ....+[a+(n-2)d] +[a+(n-1)d] \qquad .....(1)$$

पदों को विपरीत क्रम में लिखने पर आप प्राप्त करेंगे

$$S_n = [a+(n-1)d]+[a+(n-2)d]+ ....+(a+d)+a \qquad .....(2)$$

समीकरण (1) और (2) को पदों के अनुसार जोड़ने पर

$$S_n + S_n = [a+\overline{a+(n-1)d}]+[(a+d)+\overline{a+(n-2)d}]+$$

$$[(a+2d)+\overline{a+(n-3)d}]+......................................$$

$$..........+[\overline{a+(n-2)d}+(a+d)]+[\overline{a+(n-1)d}+a]$$

$$2S_n = \{2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+.......... ....+[2a+(n-1)d]$$

उपर्युक्त समीकरण के दाहिने पक्ष में पदों की संख्या n है (क्यों?)

$2S_n = n[2a+(n-1)d]$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

इसलिए किसी समांतर श्रेढ़ी के पहले n पदों का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

इसे इस तरह से भी लिख सकते हैं–

$$S_n = \frac{n}{2}[a+a+(n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[a+a_n]$$

यदि किसी समांतर श्रेढ़ी में केवल n ही पद हों, तो n वाँ पद a_n ही अंतिम पद होगा यानी $a_n = l$, यहाँ अंतिम पद के लिए अक्षर l उपयोग करेंगे।

इस परिस्थिति में समांतर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

करके देखें

1. क्या किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों के योग S_n और प्रथम (n-1) पदों के योग S_{n-1} का अंतर, श्रेढ़ी के n वें पद के बराबर होता है?
2. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग $S_n=4n-n^2$ है तो क्या इसके प्रथम पद का मान ज्ञात कर सकते हैं? क्या यह S_1 है? इस श्रेढ़ी के प्रथम दो पदों का योग क्या है? दूसरा पद क्या है? इसी तरह से तीसरे, चौथे, पन्द्रहवें और n वें पद ज्ञात कीजिए।

उदाहरणः–14. समांतर श्रेढ़ी 5,1,–3,......... के 17 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हलः–

यहाँ प्रथम पद a=5, सार्व अंतर d=–4 पदों की संख्या n=17 है।

हम जानते हैं कि

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_{17} = \frac{17}{2}[2(5)+(17-1)(-4)]$$

$$= \frac{17}{2}[10+(16)(-4)]$$

$$= \frac{17}{2}(10-64)$$

$$= \frac{17}{2}(-54)$$

$$= -459$$

इसलिए दी हुई समांतर श्रेढ़ी के 17 पदों का योग –459 है।

उदाहरणः–15. किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम 14 पदों का योग 1050 है तथा इसका प्रथम पद 10 है, तो 20 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हलः–

यहाँ a=10, n=14, S_{14}=1050

हम जानते हैं कि

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$1050 = \frac{14}{2}[2(10)+(14-1)d]$$

$$1050 = 7(20+13d)$$

$$1050 = 140+91d$$

$$91d = 1050-140$$

$$91d = 910$$

$$d = \frac{910}{91}$$

$d = 10$

इसलिए 20 वाँ पद $a_{20}=10+(20-1)(10)$

$[\because$ n वाँ पद $a_n=a+(n-1)d]$

$a_{20}=10+190=200$

इसलिए 20 वाँ पद 200 है।

उदाहरणः–16. 100 और 200 के बीच की विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

हलः–

100 और 200 के बीच की विषम संख्याएँ हैं

101, 103, 105, ...199

संख्याओं की उपर्युक्त श्रृंखला एक समांतर श्रेढ़ी है। (क्यों?)

इस समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद $a=101$, अंतिम पद $l=199$, सार्व अंतर $d=2$

मान लीजिए इस समांतर श्रेढ़ी के पदों की संख्या n है, तब

$$\begin{aligned} n \text{ वाँ पद} &= 199 \\ a+(n-1)d &= 199 \\ 101+(n-1)(2) &= 199 \\ 2n-2 &= 199-101 \\ 2n-2 &= 98 \\ 2n &= 98+2 \end{aligned}$$

$$n=\frac{100}{2}$$

$$n = 50$$

इसलिए 100 और 200 के बीच की विषम संख्याओं का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

$$\begin{aligned} S_{50} &= \frac{50}{2}(101+199) \\ &= 25\,(300) \\ &= 7500 \end{aligned}$$

इसलिए 100 और 200 के बीच की विषम संख्याओं का योगफल 7500 है।

उदाहरणः–17. समांतर श्रेढ़ी 17,15,13,.......... के कितने पदों का योगफल 72 होगा?

हलः–

यहाँ प्रथम पद $a=17$, सार्व अंतर $d=15-17=-2$

मान लीजिए n पदों का योगफल 72 है, तब $S_n=72$

हम जानते हैं कि

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$72 = \frac{n}{2}[2(17)+(n-1)(-2)]$$

$$72 = \frac{n}{2}(34-2n+2)$$

$$72\times2 = n(36-2n)$$

$$144 = 36n-2n^2$$

$$2n^2-36n+144 = 0$$

$$n^2-18n+72 = 0$$

$$n^2-6n-12n+72 = 0$$

$$n(n-6)-12(n-6) = 0$$

$$(n-6)(n-12) = 0$$

$$n=6, n=12 ,$$

n के ये दोनों मान संभव हैं और स्वीकार किए जा सकते हैं, अतः पदों की संख्या या तो 6 है या 12

टिप्पणीः–

(i) इस स्थिति में पहले 6 पदों का योग = पहले 12 पदों का योग =72

(ii) इस दोहरे उत्तर का कारण यह है कि सातवें से बारहवें पदों का योग शून्य है।

उदाहरणः–18. विद्यार्थियों ने वायु प्रदूषण कम करने के लिए विद्यालय परिसर के अंदर और बाहर पेड़ लगाने के बारे में सोचा। यह निर्णय लिया गया कि प्रत्येक कक्षा का प्रत्येक वर्ग (Section) अपनी कक्षा के बराबर पेड़ लगाएगा। उदाहरण के लिए कक्षा I का एक वर्ग 1 पेड़ लगाएगा, कक्षा II का एक वर्ग 2 पेड़ लगाएगा इत्यादि और ऐसा कक्षा XII तक के लिए चलता रहेगा। प्रत्येक कक्षा के तीन वर्ग हैं। इस विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या कितनी होगी?

हलः–

चूँकि प्रत्येक कक्षा के तीन वर्ग हैं, अतः कक्षा I, कक्षा II, कक्षा III, ... कक्षा XII, द्वारा लगाए गए पेड़ों की संख्या क्रमशः होगी–

$1\times3, 2\times3, 3\times3, \ldots\ldots\ldots\ldots 12\times3$

या

3, 6, 9, ..., 36

यह एक समांतर श्रेढ़ी है, (क्यों?)

इस समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a=3, सार्व अंतर d=6-3=3, पदों की संख्या n=12, अंतिम पद l=36

इसलिए विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या, समांतर श्रेढ़ी के सभी पदों के योगफल के बराबर होगी अर्थात्

विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}(3+36)$$

$$= 6 \times 39$$

$$= 234$$

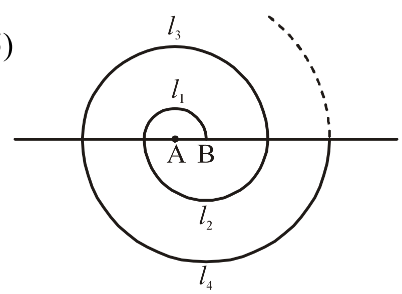
इसलिए विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा कुल 234 पेड़ लगाए गए।

उदाहरणः—19. केंद्र A से प्रारंभ करते हुए, बारी—बारी से केंद्रों A और B को लेते हुए, त्रिज्याओं 0.5 सेमी.,1.0 सेमी., 1.5 सेमी., 2.0 सेमी., ... वाले उत्तरोत्तर अर्द्धवृत्तों को खींचकर एक सर्पिल (Spiral) आकृति बनाई गई है, (देखिए आकृति) तेरह क्रमागत अर्द्धवृत्तों से बने इस सर्पिल की कुल लंबाई कितनी है? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

हलः—

हम जानते हैं कि r त्रिज्या वाले अर्द्धवृत्त की लंबाई πr होती है।

इसलिए तेरह क्रमागत अर्द्धवृत्तों से बने सर्पिल की कुल लंबाई



$$= \pi(0.5) + \pi(1.0) + \pi(1.5) + \pi(2.0) + ... + \pi(6.5)$$

$$= \pi(0.5)[1+2+3+........+13]$$

$$= \pi(0.5)[\frac{13}{2}\{2(1)+(13-1)\cdot 1\}]$$

$$= \pi(0.5)[\frac{13}{2}(2+12)]$$

$$= \pi(0.5)(\frac{13}{2}\times 14)$$

$$= \pi(0.5)(91)$$

$$= \frac{22}{7}\times\frac{5}{10}\times 91$$

= 143 सेमी.

$\because$ 1+2+3+.....+13 एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद 1, सार्व अंतर 1 और पदों की संख्या 13 है और

n पदों का योग $= \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

इसलिए तेरह क्रमागत अर्द्धवृत्तों से बने इस सर्पिल की कुल लंबाई 143 सेमी. है।

प्रश्नावली 3

1. निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ियों का योग ज्ञात कीजिए–
   (i) 9, 12, 15, ... 16 पदों तक
   (ii) 8, 3, –2, ... 22 पदों तक
   (iii) 0.6, 1.7, 2.8, ...100 पदों तक
   (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$, ...11 पदों तक
   (v) $\frac{n^2+1}{n}, n, \frac{n^2-1}{n}$, ... 20 पदों तक
   (vi) $\left(1-\frac{1}{n}\right), \left(1-\frac{2}{n}\right), \left(1-\frac{3}{n}\right)$, ... n पदों तक
2. 1046.5 योग प्राप्त करने के लिए समांतर श्रेढ़ी 7, $10\frac{1}{2}$, 14, ... के कितने पद लेने होंगे।
3. समांतर श्रेढ़ी 24, 21, 18, ... के कितने पद लिए जाएँ, ताकि उनका योग 78 हो।
4. किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 1, अंतिम पद 11 और योग 36 है, तो पदों की संख्या और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।
5. किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद 17 और अंतिम पद 350 है। यदि सार्व अंतर 9 है, तो इसमें कितने पद हैं? इस श्रेढ़ी का योग ज्ञात कीजिए।
6. 1 और 100 के बीच सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए, जो 3 के गुणज हों।
7. 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।
8. उस समांतर श्रेढ़ी के पहले 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका दूसरा पद 14 और तीसरा पद 18 है।
9. किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है, तो इसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।
10. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम, द्वितीय और अंतिम पद क्रमशः a,b, और 2a हों, तो सिद्ध कीजिए कि श्रेढ़ी का योगफल $\frac{3ab}{2(b-a)}$ होगा।
11. एक समांतर श्रेढ़ी के n पदों का योग $n^2 + 4n$ है। श्रेढ़ी का 15वाँ पद ज्ञात कीजिए।
12. संख्याओं की उस श्रृंखला के प्रथम 24 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका nवाँ पद $a_n = 3 + 2n$ से दिया जाता है।

EIIPPK

13. किसी समांतर श्रेढ़ी के pवें, qवें, rवें पदों का योगफल क्रमशः a,b,c हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$

14. तीन समान्तर श्रेढ़ियों के n पदों के योगफल क्रमशः S_1, S_2, S_3 हैं, यदि प्रत्येक श्रेढ़ी का प्रथम पद 1 तथा सार्व अंतर क्रमशः 1, 2, 3 हो तो सिद्ध कीजिए कि $S_1 + S_3 = 2S_2$

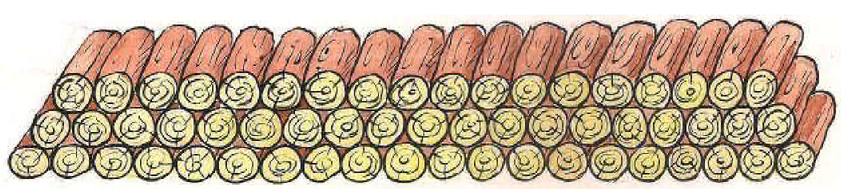
15. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के n, 2n, 3n पदों के योग क्रमशः S_1, S_2, S_3 हों, तो सिद्ध कीजिए कि $S_3 = 3(S_2 - S_1)$

16. टेलीविजन बनाने वाली एक कंपनी तीसरे वर्ष में 600 टेलीविजन तथा सातवें वर्ष में 700 टेलीविजन बनाती है। यह मानते हुए कि प्रत्येक वर्ष बनने वाले टेलीविजनों में एक समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है, ज्ञात कीजिए–
    (i) प्रथम वर्ष में बनाये गये टेलीविजनों की संख्या
    (ii) 9वें वर्ष में बनाये गये टेलीविजनों की संख्या
    (iii) प्रथम 7 वर्षों में बनाये गये कुल टेलीविजनों की संख्या

17. एक निर्माण कार्य ठेके में कराया जा रहा है, जिसे एक निश्चित तिथि तक पूरा करना है। निश्चित तिथि से विलंब होने पर जुर्माने का प्रावधान इस तरह है : पहले दिन के लिए 200 रु., दूसरे दिन के लिए 250 रु., तीसरे दिन के लिए 300 रु. इत्यादि, अर्थात् पहले दिन का जुर्माना 200 रु. है और इसके बाद प्रत्येक दिन का जुर्माना 50 रु. बढ़ जाएगा। ठेकेदार ने कार्य में 30 दिन का विलंब किया तो उसे कुल कितना जुर्माना देना होगा और 30 वें दिन के लिए कितना जुर्माना होगा?

18. विद्यालय में विद्यार्थियों के समग्र शैक्षिक प्रदर्शन पर 7 नकद पुरस्कार देने के लिए 700 रु. की राशि रखी गई है। यदि प्रत्येक पुरस्कार अपने से ठीक पहले वाले पुरस्कार से 10 रु. कम है, तो प्रत्येक पुरस्कार की राशि कितनी है?

19. 200 लट्ठों (logs) को इस तरह जमाया गया कि सबसे नीचे वाली पंक्ति में 20 लट्ठे, उससे ऊपर की पंक्ति में 19 लट्ठे, उससे ऊपर की पंक्ति में 18 लट्ठे रखे गए हैं। यह क्रम सभी लट्ठों के रखे जाने तक चला।



ये 200 लट्ठे कितनी पंक्तियों में रखे गए हैं और सबसे ऊपर की पंक्ति में कितने लट्ठे हैं?

20. एक आलू दौड़ (potato race) प्रतियोगिता में प्रारंभिक स्थान पर एक बाल्टी रखी है। इस बाल्टी से 5 मीटर की दूरी पर पहला आलू रखा है तथा अन्य आलुओं को एक सीधी रेखा में परस्पर 3 मीटर की दूरी पर रखा गया है। इस रेखा पर 10 आलू रखे गए हैं। (देखिए आकृति)

प्रत्येक प्रतियोगी बालिका बाल्टी से चलना प्रारंभ करती है, निकटतम आलू को उठाती है और उसे लेकर वापस दौड़कर बाल्टी में डालती है। ऐसा वह तब तक करती रहती है, जब तक सभी आलू बाल्टी में न आ जाएँ। इसमें प्रत्येक प्रतियोगी बालिका को कुल कितनी दूरी दौड़नी पड़ेगी?

(संकेत : पहले और दूसरे आलुओं को उठाकर बाल्टी में डालने तक दौड़ी गई दूरी $= 2 \times 5 + 2\,(5 + 3)$ है।)

हमने सीखा

1. संख्याओं की ऐसी श्रृंखला समांतर श्रेढ़ी कहलाती है, जिसमें प्रथम पद के अतिरिक्त प्रत्येक पद, अपने से ठीक पहले पद में एक निश्चित संख्या d जोड़कर प्राप्त होता है। इस निश्चित संख्या d को इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर कहते हैं। यदि प्रथम पद a है, तो समांतर श्रेढ़ी का व्यापक रूप है–
   $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots\ldots\ldots$
2. संख्याओं की एक दी गई श्रृंखला a_1, a_2, a_3 ....समांतर श्रेढ़ी होती है, यदि अंतरों $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots\ldots$, से एक ही (बराबर) मान प्राप्त हो, अर्थात् $a_{k+1} - a_k$ का मान एक ही हो, जहाँ $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots$
3. समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a और सार्व अंतर d हो, तो इस समांतर श्रेढ़ी का nवाँ पद होगा $a_n = a + (n-1)\,d$
   इस nवें पद को ही समांतर श्रेढ़ी का व्यापक पद (General Term) कहते हैं।
4. यदि a, A, b समांतर श्रेढ़ी में हैं, तब $A = \frac{a+b}{2}$ और A, a तथा b का समांतर माध्य कहलाता है।
5. दो राशियों a और b के बीच n पद $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ इस प्रकार लें कि $a, A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n, b$ समांतर श्रेढ़ी में हो तो श्रेढ़ी का प्रथम पद a, अंतिम पद b और पदों की संख्या (n+2) होगी।

6. किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग S_n निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त होता है :–

(i) $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

(ii) $S_n = \frac{n}{2}[a+l]$

जहाँ समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a, सार्व अंतर d, पदों की संख्या n और अंतिम पद l है।

उत्तरमाला–1

(1) (i) (b) (ii) (d) (iii) (a) (iv) (c) (v) (b)

(2) (b) ,(d)
(3) –27
(4) –1070
(5) $\frac{3n-2}{9}$

(6) $1000 - 50m$
(7) 31
(8) 10वाँ पद

(9) 99
(10) 10
(11) 10

(12) हाँ, 27वाँ पद
(13) 178
(14) 2m+1

(15) 65वाँ पद
(16) –13, –8, –3
(17) 300

(18) 208
(22) 13

उत्तरमाला–2

(1) 0
(2) $\frac{x^2+y^2}{2}$
(3) 5 और 9

(4) 3,9
(5) –2, 0, 2, 4, 6, 8
(6) 8,5,2,–1,–4

(8) n = 5

उत्तरमाला–3

(1) (i) 504 (ii) –979 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$

(v) $\frac{10(2n^2-17)}{n}$ (vi) $\frac{1}{2}(n-1)$

(2) 23
(3) 4 या 13
(4) $n = 6, d = 2$

(5) 38, 6973
(6) 1683
(7) 625

(8) 5610	(9) n^2	(11) 33	
(12) 672	(16) (i) 550	(ii) 750	(iii) 4375
(17) 27750 रु.	(18) पुरस्कारों की राशि (रु. में), 130,120,110,100,90,80,70		
(19) 16 पंक्तियाँ, 5 लट्ठों को सबसे ऊपरी पंक्ति में रखते हैं।			

संकेत : $S = 200, a = 20, d = -1$, सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ में रखने पर n के दो मान 16 और 25 प्राप्त होते हैं। अब $a_{25} = a + 24d = -4$ अर्थात् 25वीं पंक्ति में लट्ठों की संख्या ऋणात्मक है, जो संभव नहीं है। अतः $n = 25$ स्वीकार नहीं कर सकते। $n = 16$ के लिए $a_{16} = a + 15d = 5$, अतः 16 पंक्तियाँ हैं और सबसे ऊपर वाली पंक्ति में 5 लट्ठे रखे हैं।

(20) 370 मीटर