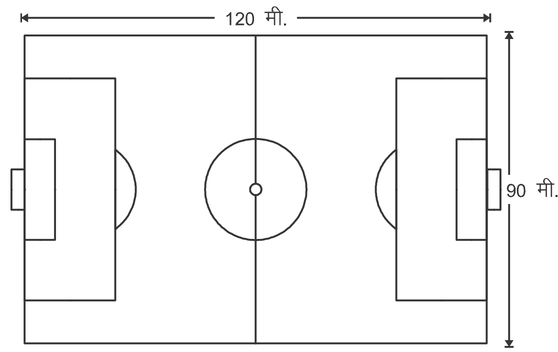
अध्याय

06

निर्देशांक ज्यामिति
[COORDINATE GEOMETRY]

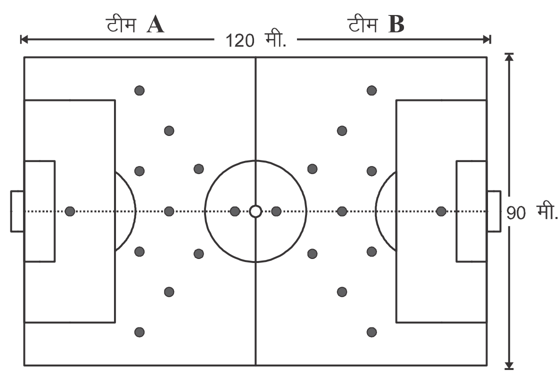
EK3ZZG

आपने फुटबॉल का मैदान देखा ही होगा शायद खेला भी हो। यह तो हमें पता है कि खेल शुरू होने के पहले फुटबॉल को मैदान के ठीक बीच रखते हैं। दोनों टीमों के खिलाड़ी मैदान में आमने–सामने रहते हैं एक टीम एक तरफ तथा दूसरी टीम दूसरी तरफ। मैदान में दोनों तरफ गोल पोस्ट होते हैं जैसा कि आप चित्र (i) में देख रहे हैं। यह बीच में रखे फुटबॉल से बराबर–बराबर दूरी पर होते हैं।



चित्र–(i)

फुटबॉल के मैदान की मानक लंबाई 120 मीटर तथा मानक चौड़ाई 90 मीटर होती है। हालांकि खेल तो कितने भी बड़े मैदान पर हो सकता है। मैदान में खिलाड़ी अपनी–अपनी तरफ अपनी भूमिका अनुसार फैले रहते हैं हालांकि खेलते समय वे मैदान में हर जगह जा सकते हैं। दिए गए चित्र (ii) में हम दोनों टीमों के खिलाड़ियों की शुरूआती स्थिति को देखते हैं चित्र के बायें भाग में टीम A है तथा दायें भाग में टीम B है।



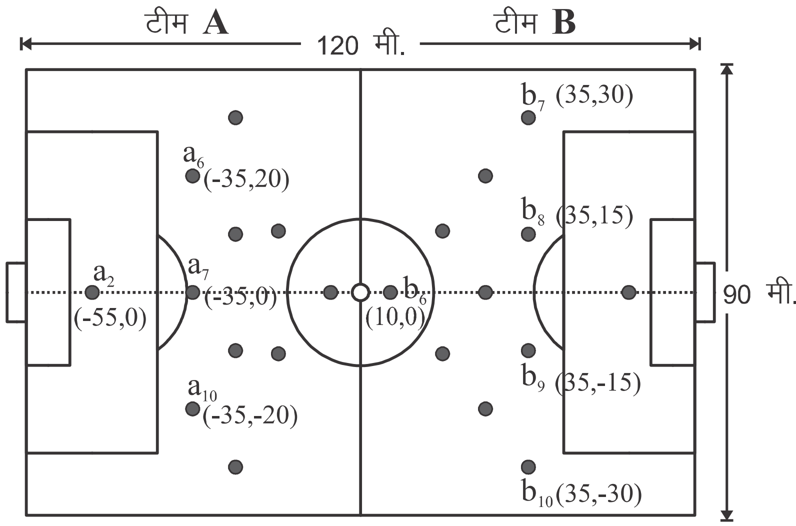
चित्र–(ii)

फुटबॉल मैदान के ठीक मध्य बिंदु पर है। मैदान पर मध्य रेखा जो दोनों टीमों को अलग–अलग करती है, खींची रहती है। अब इसके लंबवत एक खड़ी रेखा खींची हो तो, फुटबॉल का मैदान चार भागों में बँट जाएगा। हमने ऐसा करके चित्र (iii) बनाया है। चित्र में मैदान के बायीं ओर टीम A के खिलाड़ी और दायीं ओर टीम B के खिलाड़ी हैं। बायीं ओर टीम A के खिलाड़ी की शुरूआती स्थिति को $a_1, a_2, a_3 ..... a_{11}$ तथा दायीं ओर टीम B के खिलाड़ियों की शुरू में स्थिति को $b_1, b_2, b_3 .... b_{11}$ से दर्शाया गया है।

आप देख सकते हैं कि दोनों गोलकीपर सबसे पीछे गोलपोस्ट के पास हैं उसके बाद फुलबैक हैं जो गोल पोस्ट से लगभग 20-25 मीटर आगे है। फिर मिड फील्डर हैं जो 40-45 मीटर आगे हैं। ठीक मध्य रेखा के पास दोनों तरफ के फार्वर्ड अपनी–अपनी ओर स्थित हैं।

हम बायीं ओर यानी टीम A की दिशा को ऋणात्मक दिशा व दायीं ओर टीम B की दिशा को धनात्मक दिशा मानेंगे। उनकी स्थिति को इंगित करने के लिए हम मध्य बिन्दु से गुजर रही रेखाओं से उनकी दूरी का इस्तेमाल करेंगे।

गोलकीपर दोनों तरफ मध्य बिंदु से 55 मीटर दूर है किन्तु आड़ी रेखा पर स्थित हैं अतः इन्हें (55, 0) व (–55, 0) से निरूपित करेंगे। इसी तरह टीम A के फुल बैक, आड़ी रेखा के ऊपर के भाग में मध्य बिंदु (मध्य रेखा के) से –35 और टीम B के +35 रेखा पर डटे हैं। टीम A ने 3 फुल बैक रखे हैं और टीम B के 4 फुल बैक हैं। ये सभी बीच की रेखा से ऊपर की ओर, जिसे हम (+) मानेंगे और नीचे की ओर, जिसे हम (–) मानेंगे, पर हैं।



चित्र–(iii)

टीम A के तीन फुल बैक (–35, 20), (–35, 0) और (–35, –20) पर स्थित हैं इसी तरह टीम B के चार फुल बैक (+35, 30), (+35, +15), (+35, –15) और (+35, –30) पर स्थित हैं।

सोचें एवं चर्चा करें

अब आप भी अपने दोस्तों के साथ मिलकर मैदान में फैले हुए दोनों टीमों के बाकी खिलाड़ियों की स्थिति पता कर उनके बिंदु लिखिए। (चित्र–ii)

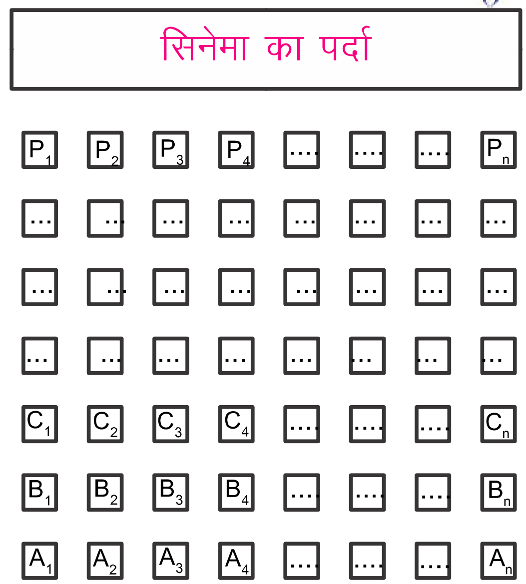
करके देखें

1. वॉलीबाल के मैदान के नेट को मध्य रेखा मानकर इसके मध्य ठीक बीचो–बीच एक लंबवत रेखा खींचिए तथा इसके कटान मध्य बिंदु से सभी खिलाड़ियों की स्थिति पता कीजिए।

2. क्रिकेट के मैदान में बल्लेबाज की स्थिति को मध्य बिंदु पर एक आड़ी रेखा के लंबवत एक रेखा खींचकर खिलाड़ियों की स्थिति को दर्शाइए व उन बिंदुओं को लिखिए।

आइए एक और उदाहरण से किसी तल पर रखी वस्तुओं की स्थिति का पता लगाते हैं आप कभी अपने शहर या कस्बे के सिनेमाघर में कोई फिल्म देखने गए होंगे। क्या आपको याद है कि आपने अपनी सीट कैसे ढूँढ़ी थी? कुछ सिनेमाघरों में कुर्सी की पंक्तियों को A,B,C,D.... आदि

नाम देकर प्रत्येक पंक्ति की कुर्सियों को क्रमांक 1,2,3,4 दे दिया जाता है। इस तरह सभी कुर्सियों को कोई न कोई नाम जैसे – A_1, A_2, B_4, C_{19}, D_{40} मिल जाता है।

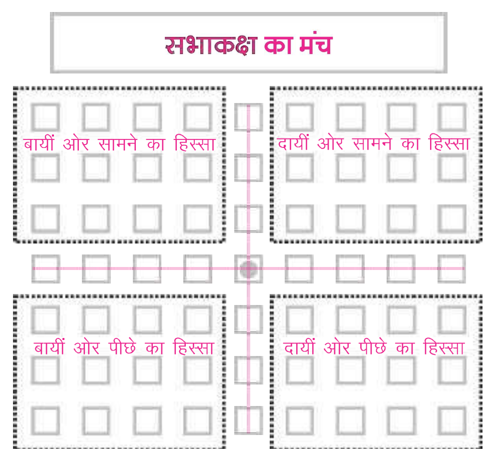


चित्र–(iv)

मान लें किसी बड़े सभाकक्ष में आड़ी और खड़ी अनेक कतारों में कुर्सियाँ रखी हुई हैं। आप सभाकक्ष के ठीक बीच वाली कुर्सी पर बैठे हैं। आपके मित्रों के बैठने की जगह कहाँ–कहाँ है, यह आपको पता है।

यह उन्हें कैसे बताएँगे?

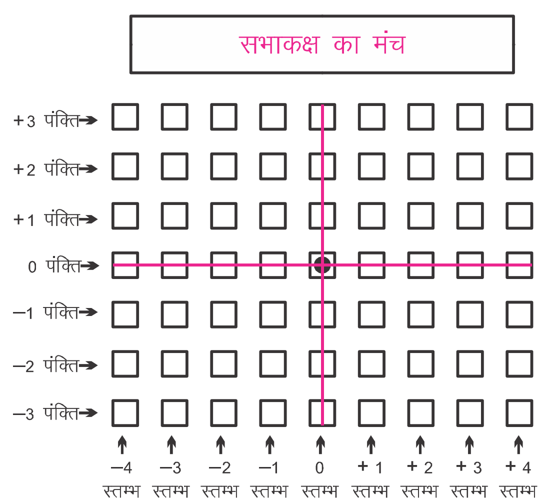
आप जिस कुर्सी पर बैठे हैं उसके नीचे एक आड़ी पट्टी है जो सभाकक्ष के बायें से दायें किनारे तक गई है। यह पट्टी सभाकक्ष के फर्श को दो हिस्सों में बाँटती है। आपके सामने का हिस्सा और आपके पीछे का हिस्सा। इससे आप सभाकक्ष की कुर्सियों के बारे में बता सकते हैं कि उनकी स्थिति कहाँ पर है जैसे आपके सामने की कुर्सियाँ, पीछे की कुर्सियाँ और पट्टी के ऊपर रखी कुर्सियाँ।



चित्र–(v)

यदि ऐसी ही एक और पट्टी आपकी कुर्सी के नीचे से गुजरती हो जो पहली पट्टी के लंबवत हो और सभाकक्ष के सामने से पीछे तक जाती हो, तो यह पट्टी भी सभाकक्ष को दो हिस्सों में बाँटेगी। आपके दायीं ओर का हिस्सा और आपके बायीं ओर का हिस्सा। इसी तरह कुर्सियों के बारे बताने के लिए भी आपके पास कुछ नई बात होगी जैसे आपके दायीं ओर की कुर्सियाँ, आपके बायीं ओर की कुर्सियाँ और इस खड़ी पट्टी के ऊपर रखी कुर्सियाँ।

अब आप देखेंगे कि सभाकक्ष का समतल (फर्श) चार हिस्सों में बँट गया है। इसके साथ–साथ कुर्सियाँ भी चार हिस्सों में बँट गई हैं। कुर्सियों के संदर्भ में यह बात ध्यान में रखनी होगी कि आड़ी और खड़ी पट्टियों पर भी कुर्सियाँ रखी हुई हैं जो चारों हिस्सों को अलग करती हैं और उनमें शामिल नहीं हैं।



चित्र–(vi)

पिछली कक्षाओं में आपने संख्या रेखा का उपयोग किया है। यहाँ भी उसकी सहायता लेंगे। मानलें आपकी कुर्सी के नीचे से जाने वाली आड़ी और खड़ी पट्टियाँ दो संख्या रेखाएँ हैं जो एक दूसरे के लंबवत हैं और एक दूसरे को वहाँ काटती हैं जहाँ

आपकी कुर्सी रखी है यानी सभा कक्ष के ठीक बीच में। आपकी कुर्सी ही वह जगह है जहाँ दोनों संख्या रेखाओं का शून्य है। तो अब इस आड़ी पट्टी पर आपके दायीं ओर रखी कुर्सियों को क्रमशः +1, +2, +3, +4 आदि पर रखी गई कुर्सियाँ तथा बायीं ओर रखी कुर्सियों को क्रमशः –1, –2, –3, –4 आदि पर रखी गई कुर्सियाँ कह सकते हैं। इसी तरह खड़ी पट्टी पर आपके सामने और पीछे की कुर्सियों को क्रमशः +1, +2, +3, +4 और –1, –2, –3, –4 की कुर्सियाँ कह सकते हैं।

क्या हम सभाकक्ष में रखी कुर्सियों की कतारों को भी नाम दे सकते हैं?

यदि हम कुर्सियों की खड़ी कतारों को **स्तम्भ** तथा आड़ी कतारों को **पंक्ति** कहें तो आप कह सकेंगे कि आपकी कुर्सी के नीचे से जाने वाली खड़ी पट्टी एक स्तम्भ है जो आड़ी संख्या रेखा के शून्य से गुजरती है। आपके दायीं ओर के सभी स्तम्भ आड़ी संख्या रेखा के क्रमशः +1, +2, +3, +4 आदि से गुजरते हैं। इन्हें हम +1 स्तम्भ, +2 स्तम्भ, +3 स्तम्भ कहेंगे। इसी तरह बायीं ओर के स्तम्भों को क्रमशः –1 स्तम्भ, –2 स्तम्भ, –3 स्तम्भ कहेंगे।

आपकी कुर्सी के नीचे से जाने वाली खड़ी पट्टी को क्या कहेंगे?

स्पष्ट है इसे आप 0 स्तम्भ (शून्य स्तम्भ) कहेंगे।

ठीक इसी तरह आड़ी पट्टी शून्य पंक्ति और इसके ऊपर की पंक्तियाँ +1 पंक्ति, +2 पंक्ति, +3 पंक्ति तथा नीचे की पंक्तियाँ –1 पंक्ति, –2 पंक्ति, –3 पंक्ति कहलाएँगी।

आपके मित्र A,B,C,D और E सभी आपके पास हॉल के बीच में ही खड़े हैं और उन्हें अपने लिए निर्धारित कुर्सियों पर जाना है। उनके स्थान चित्र (vii) में दिखाए गए हैं। आइए उन्हें उनकी जगह बताएँ।

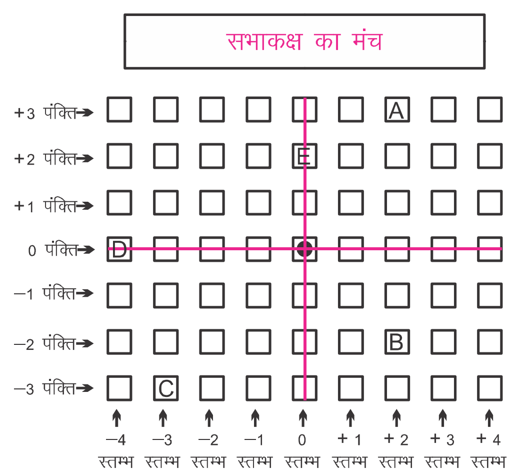
A का स्थान – स्तंभ 2, पंक्ति 3 पर रखी कुर्सी

B का स्थान – स्तंभ 2, पंक्ति –2 पर रखी कुर्सी

C का स्थान – स्तंभ –3, पंक्ति –3 पर रखी कुर्सी

D का स्थान – स्तंभ –4, पंक्ति 0 पर रखी कुर्सी

E का स्थान – स्तंभ 0, पंक्ति 2 पर रखी कुर्सी



चित्र–(vii)

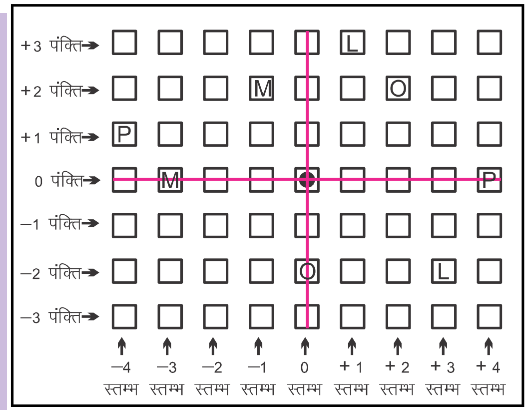
सोचें और चर्चा करें

आपकी कुर्सी किस जगह पर है?

करके देखें

1. एक बगीचे में आड़ी और खड़ी कतारों में पौधे लगे हुए हैं। उन्हें स्तम्भों और पंक्तियों में दर्शाया गया है। L, M, O, P क्रमशः नीबू, आम, संतरे और पपीते के पौधों को प्रदर्शित करते हों, तो उनके स्थान स्तंभ और पंक्ति के रूप में लिखें।

पौधे	स्तम्भ और पंक्ति
नींबू ..	(+1 स्तम्भ, +3 पंक्ति), ...
आम	..................................., ...
संतरा	..................................., ...
पपीता	..................................., ...



फुटबॉल के मैदान के चित्र (iii) को देखकर नीचे दी गई तालिका पूरी कीजिए –

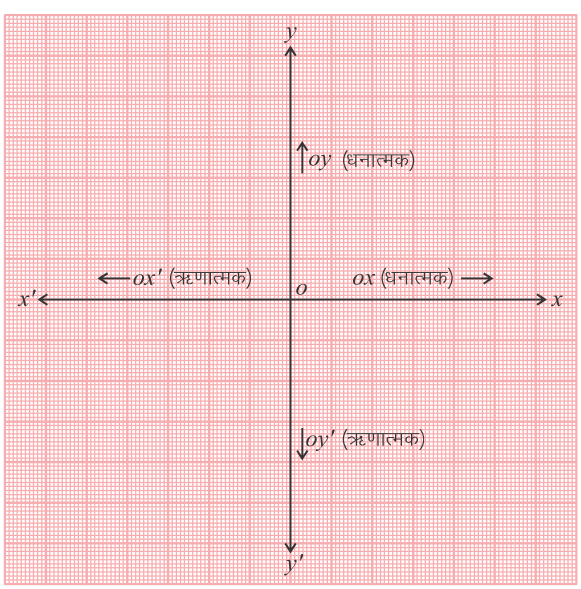
खिलाड़ी	फुटबॉल से खिलाड़ी की दूरी		खिलाड़ी की स्थिति
	कितने बाएँ/दाएँ चले ?	कितने इकाई ऊपर/नीचे चले ?	
a_2			
a_6			
a_7			
a_{10}			
b_6			
b_7			
b_8			
b_9			
b_{10}			

ऊपर के उदाहरणों में आपने यह देखा कि एक तल पर रखी हुई किसी वस्तु की स्थिति दो परस्पर लंब रेखाओं की सहायता से बताई जा सकती है। इस विचारधारा से गणित की एक महत्वपूर्ण शाखा **निर्देशांक ज्यामिति** (Coordinate Geometry) की उत्पत्ति हुई। इस अध्याय में निर्देशांक ज्यामिति की कुछ आधारभूत संकल्पनाओं से हम आपको परिचित कराएँगे।

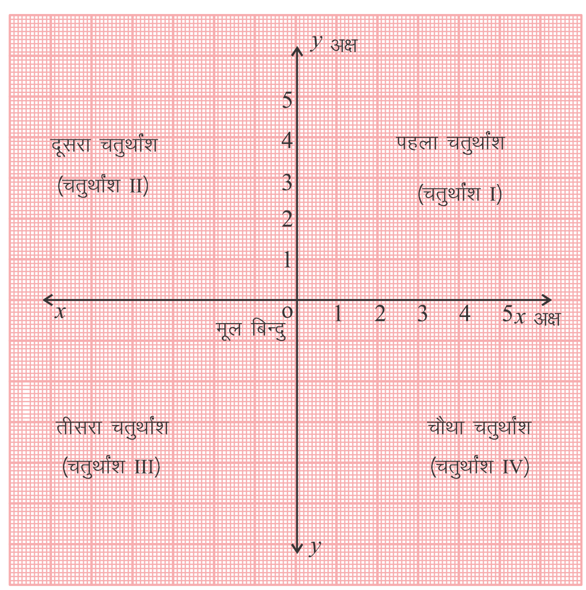
प्रारंभ में फ्रांसीसी दार्शनिक और गणितज्ञ **रेने दकार्ते** ने इस पर अध्ययन किया, उन्होंने एक तल में एक बिंदु की स्थिति का निर्धारण करने की समस्या का हल प्राप्त कर लिया। उनकी विधि अक्षांश और देशांतर की विचारधारा का ही एक विकसित रूप थी। एक तल पर स्थित किसी बिंदु की स्थिति का निर्धारण करने में प्रयुक्त पद्धति को दकार्ते के सम्मान में **कार्तीय पद्धति (Cartesian System)** भी कहा जाता है।

दकार्ते ने एक तल पर परस्पर लंबवत दो रेखाओं को खींचने और इन रेखाओं के सापेक्ष तल पर बिंदुओं का स्थान निर्धारण करने का विचार प्रस्तुत किया। लंब रेखाएँ किसी भी दिशा में हो सकती हैं। इस अध्याय में हमने एक क्षैतिज (आड़ी) और दूसरी उर्ध्वाधर (खड़ी) रेखा का उपयोग किया है। दोनों रेखाएँ एक दूसरे को जिस बिंदु पर काटती हैं उसे **मूलबिंदु** (Origin) कहा जाता है। इसे O से प्रदर्शित किया जाता है। क्षैतिज रेखा X'X को x- अक्ष और उर्ध्वाधर रेखा YY' को y- अक्ष कहा जाता है। चूँकि OX और OY दिशाओं में धनात्मक संख्याएँ स्थित हैं इसलिए OX और OY को क्रमशः x- अक्ष और y- अक्ष की धनात्मक दिशाएँ कहा जाता है। इसी प्रकार, OX' और OY' को क्रमशः x- अक्ष और y- अक्ष की ऋणात्मक दिशाएँ कहा जाता है।

ये दोनों अक्ष तल को चार बराबर भागों में विभाजित करते हैं। इन चार भागों को **चतुर्थांश (quadrants)** कहा जाता है। इन्हें OX से वामावर्त दिशा में क्रमशः I, II, III और IV चतुर्थांश कहा जाता है। इस प्रकार, इस तल में दोनों अक्ष और चारों चतुर्थांश सम्मिलित हैं। इस तल को कार्तीय तल (Cartesian plane) या निर्देशांक तल (Coordinate plane) या xy तल (xy-*plane*) कहते हैं। अक्षों को निर्देशांक अक्ष (Coordinate axes) कहा जाता है।



आलेख–01

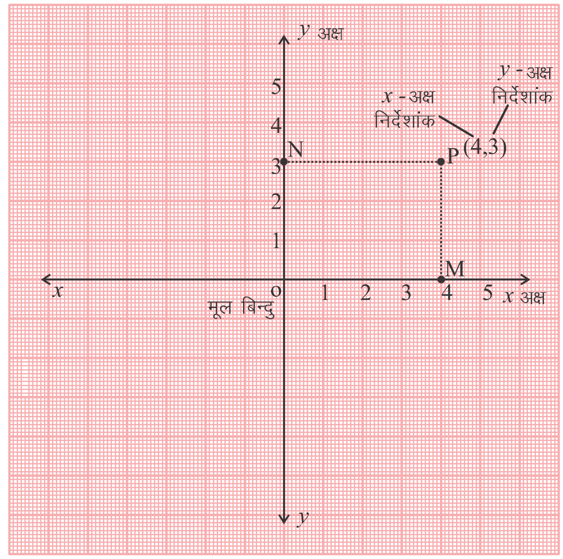


आलेख–02

निर्देशांक समतल में किसी बिंदु की स्थिति का पता लगाना :–

हम निर्देशांक समतल पर किसी बिंदु का पता कैसे करेंगे, आइए इसे एक उदाहरण से समझते हैं।

एक ग्राफ पेपर पर x और y अक्ष खींचिए। पहले चतुर्थांश में कहीं पर एक बिंदु P लीजिए। P से x और y अक्ष पर क्रमशः लम्ब PM और PN डालिए।



आलेख–03

यहाँ y अक्ष से बिंदु P की लंबवत दूरी PN 4 इकाई है। (इसे x अक्ष की धनात्मक दिशा में मापा गया है।) और x अक्ष से बिंदु P की लंबवत दूरी PM 3 इकाई है। (इसे y अक्ष की धनात्मक दिशा में मापा गया है।) इन दूरियों की सहायता से बिंदु P का निर्धारण करेंगे। किसी बिंदु का निर्धारण करने के लिए हम निम्नलिखित परंपराओं का ध्यान रखते हैं :

1. किसी बिंदु का x-निर्देशांक y- अक्ष से इस बिंदु की लंबवत दूरी है जिसे x- अक्ष पर मापा जाता है। यह दूरी x- अक्ष की धनात्मक दिशा में धनात्मक और x- अक्ष की ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक होती है। बिंदु P के लिए यह +4 है। x-निर्देशांक को **भुज (abscissa)** कहा जाता है।

2. किसी बिंदु का y-निर्देशांक x- अक्ष से इस बिंदु की लंबवत दूरी है जिसे y- अक्ष पर मापा जाता है। यह दूरी y- अक्ष की धनात्मक दिशा में धनात्मक और y- अक्ष की ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक होती है। बिंदु P के लिए यह +3 है। y-निर्देशांक को **कोटि (ordinate)** कहा जाता है।

3. निर्देशांक तल में किसी बिंदु के निर्देशांक लिखते समय पहले x-निर्देशांक लिखते हैं और उसके बाद y-निर्देशांक लिखते हैं। निर्देशांकों को कोष्ठक के अंदर लिखा जाता है।

   अतः बिंदु P के निर्देशांक (4,3) हैं।

उदाहरणः–1. बिंदु A (4,5) को निर्देशांक समतल में प्रदर्शित कीजिए।

हलः– चूँकि x-निर्देशांक +4 है अर्थात बिंदु की y-अक्ष से लंबवत दूरी +4 है। इसलिए पहले हम x-अक्ष की धनात्मक दिशा अर्थात OX दिशा में +4 इकाई बढ़ेंगे। चूँकि y-निर्देशांक +5 है, अर्थात बिंदु की x-अक्ष से लंबवत दूरी +5 है। इसलिए अब हम y-अक्ष की धनात्मक दिशा अर्थात OY दिशा में +5 इकाई बढ़ेंगे। इस तरह हमें बिंदु A (4,5) प्राप्त हुआ।

उदाहरणः–2. बिंदु B (-4,5) को दर्शाइए।

हलः– बिंदु B का x-निर्देशांक –4 है, तो हमें किस दिशा में बढ़ना होगा?

चूँकि बिंदु B का x-निर्देशांक ऋणात्मक है इसलिए हम x-अक्ष में OX' की दिशा में आगे बढ़ेंगे। आगे के चरण आप स्वयं करें और निर्देशांक समतल में बिंदु B (-4,5) को दर्शाइए।

करके देखें

1. नीचे कुछ बिंदुओं के निर्देशांक दिए गए हैं। ये किस–किस चतुर्थांश में स्थित हैं? प्रत्येक को निर्देशांक समतल पर प्रदर्शित कीजिए–

   (i) (5,7) (ii) (-2,5) (iii) (2,-2) (iv) (-4,-5)

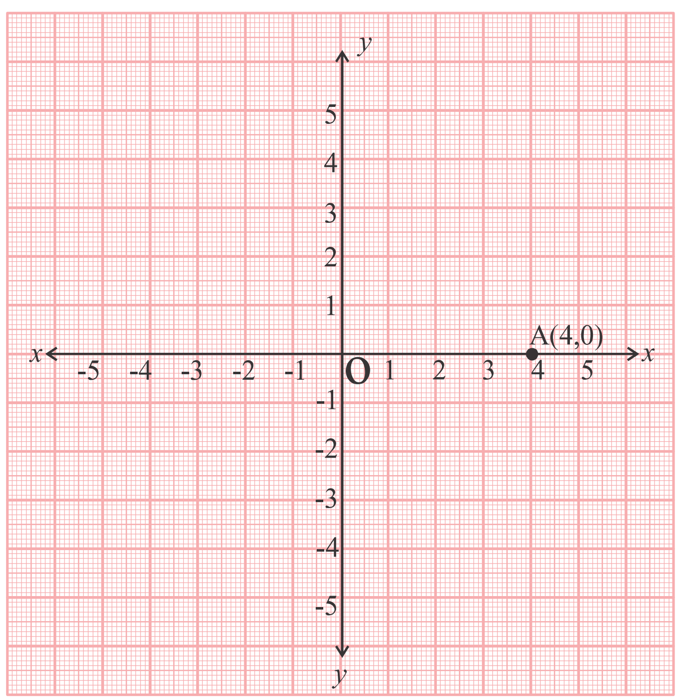
2. कोई भी 5 और निर्देशांक जोड़े लिखें। उन्हें उनके चर्तुथांशों पर उपयुक्त स्थान पर प्रदर्शित करें।

अक्षों पर बिंदु :

यदि कोई बिंदु x-अक्ष पर हो तो उसके निर्देशांक क्या होंगे? हम जानते हैं कि किसी बिंदु तक पहुँचने के लिए हमें दो दूरियाँ चलनी होती हैं। पहला x-अक्ष के अनुदिश (y-अक्ष के लंबवत), दूसरा y-अक्ष के समांतर (x-अक्ष के लंबवत) अब यदि कोई बिंदु x-अक्ष पर ही स्थित हो तो हमें मूल बिंदु से उस बिंदु तक केवल एक दूरी चलनी होगी। चूँकि y-अक्ष के समांतर चली गई दूरी शून्य होगी। इसलिए उस बिंदु का y-निर्देशांक शून्य होगा। अतः x-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक (x,0) या (-x,0) होंगे। जैसे x-अक्ष पर स्थित बिंदु A के निर्देशांक (4,0) हैं।

इसी तरह y-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक (0,y) या (0,-y) होंगे।

स्पष्ट है कि मूलबिंदु O के निर्देशांक (0,0) होंगे।



आलेख–04

उदाहरणः—3. निर्देशांक समतल पर बिंदु P(3,0) को दर्शाइए।

हलः— चूँकि बिंदु P का y-निर्देशांक 0 है, इसलिए x-अक्ष से इस बिंदु की लंबवत् दूरी शून्य है। अतः यह बिंदु x-अक्ष पर होगा। बिंदु P का x-निर्देशांक 3 है, इसलिए यह बिंदु OX की दिशा में मूलबिंदु से 3 इकाई की दूरी पर होगा।

करके देखें

1. बिंदुओं B (0,4), C (-4,0) और D (0,-2) को निर्देशांक समतल पर दर्शाइए।
2. तीन ऐसे अलग–अलग बिन्दुओं के निर्देशांक लिखें जो x-अक्ष पर हैं।
3. इसी तरह y-अक्ष पर स्थित तीन अलग–अलग बिन्दुओं के निर्देशांक लिखिए।

प्रश्नावली – 01

1. नीचे कुछ बिंदुओं के निर्देशांक दिए गए हैं उन्हें निर्देशांक समतल पर प्रदर्शित कर बताइए कि बिंदु किस चतुर्थांश में हैं ?

   (i) (3,4) (ii) (-5,6) (iii) (-2,-1) (iv) (2.5, -7)

2. निम्नलिखित बिंदुओं के निर्देशांक के आधार पर बताइए कि बिंदु किस अक्ष पर स्थित है?

   (i) (0,5) (ii) (-6,0) (iii) (-3,0) (iv) (0, -3.5)

3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

   (i) बिंदु P (-4,-7) __________ चतुर्थांश में स्थित है।

   (ii) x-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु का y-निर्देशांक ________ होता है।

   (iii) निर्देशांक समतल पर दोनों अक्ष परस्पर _______ होते हैं।

   (iv) y-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु का x-निर्देशांक ________ होता है।

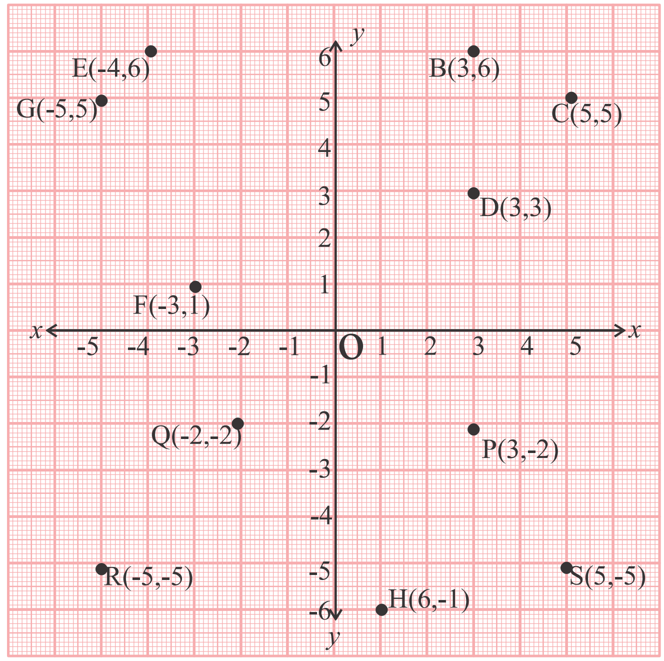
   (v) मूल बिंदु के निर्देशांक ________ होते हैं।

4. आलेख–05 में प्रदर्शित बिंदुओं की स्थितियों का अवलोकन कर निम्नलिखित निर्देशों के अनुसार कार्य कीजिए–

a) ऐसे बिंदुओं को लिखिए जिनके x-निर्देशांक समान हैं।

b) ऐसे बिंदुओं को लिखिए जिनके y-निर्देशांक समान हैं।

c) ऐसे बिंदुओं को लिखिए जिनके x-निर्देशांक और y-निर्देशांक समान हैं।



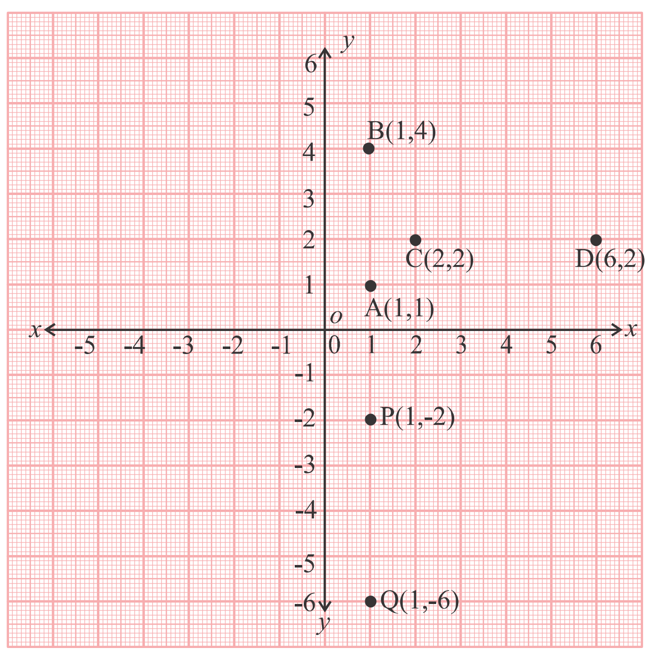
आलेख–05

बिंदुओं के बीच की दूरी

दिए गए आलेख में चार बिंदुओं A, B, C और D को प्रदर्शित किया गया है। क्या आप बता सकते हैं कि A, B और C, D बिंदुओं के बीच की दूरियाँ कितनी–कितनी हैं?

क्या बिंदु A और बिंदु B के बीच की दूरी AB , बिंदु C और बिंदु D के बीच की दूरी CD से कम है या दोनों दूरियाँ बराबर हैं? हम उन दोनों बिंदुओं के बीच की दूरी कैसे ज्ञात करेंगे जिनके निर्देशांक दिए गए हों?

उन दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना आसान है जो क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर अक्षों पर या उनके समांतर किसी रेखा पर स्थित जैसे हों। जैसे – A (1,1) व B (1,4)। इसी तरह C (2,2) और D (6,2) हैं।



आलेख–06

इनमें पहले दोनों बिंदुओं के y-निर्देशांकों का अंतर लेने पर दूरी AB तथा बाद के दो बिंदुओं के x-निर्देशांकों का अंतर लेने पर दूरी CD क्रमशः प्राप्त कर सकते हैं।

दूरी AB = 4–1 = 3 इकाई

(चूँकि AB = $y_2 - y_1$, क्योंकि x_2 और x_1 बराबर हैं।)

दूरी CD = 6–2 = 4 इकाई

(चूँकि CD = $x_2 - x_1$, क्योंकि y_1 और y_2 बराबर हैं।)

इसी तरह P (1,–2) और Q (1,–6) के बीच की दूरी

PQ = $y_2 - y_1$ क्योंकि x_2 और x_1 बराबर हैं।

PQ = –6 – (–2) = –4

दूरी धनात्मक ली जाती है। अतः PQ = 4 इकाई

करके देखें

इन बिंदुओं के बीच की दूरियाँ ज्ञात कीजिए ।

(i) (5,8) और (5,-3)

(ii) (2,3) और (2,7)

किन्हीं भी दो बिंदुओं के बीच की दूरी –

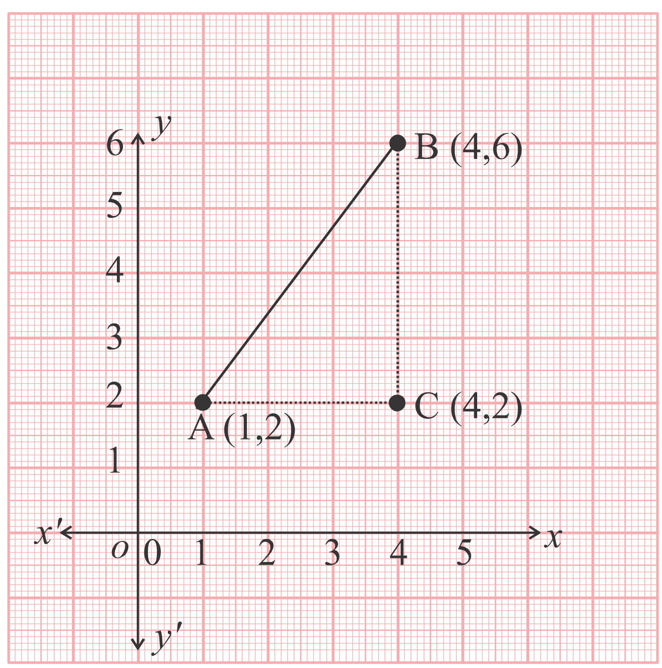
पिछले उदाहरण में ऐसी परिस्थिति में किन्हीं दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात की गई जिसमें रेखा अंतराल AB, CD अथवा PQ या तो उर्ध्वाधर हैं या क्षैतिज।

यदि ऐसे दो बिंदु हों जो उर्ध्वाधर या क्षैतिज रेखा अथवा उनके समांतर रेखा पर न हों यानी ऐसा रेखा अंतराल हो जो न तो उर्ध्वाधर हो न ही क्षैतिज तो उनके बीच की दूरी कैसे ज्ञात करेंगे? आइए एक उदाहरण देखें –

उदाहरणः–4. बिंदुओं A (1,2) और B (4,6) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल :– बिंदु A से x-अक्ष के समांतर रेखा खींचिए। इसी तरह बिंदु B से y-अक्ष के समांतर रेखा खींचिए। ये दोनों रेखाएँ बिंदु C पर प्रतिच्छेद करती हैं।

दूरी AC= 4–1= 3 इकाई



आलेख–07

और दूरी BC= 6–2 = 4 इकाई।

त्रिभुज ABC में बौधायन– पाइथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$= 3^2 + 4^2$$

$$= 9 + 16$$

$$= 25$$

दूरी AB = 5 इकाई।

व्यापक परिस्थिति में दूरी

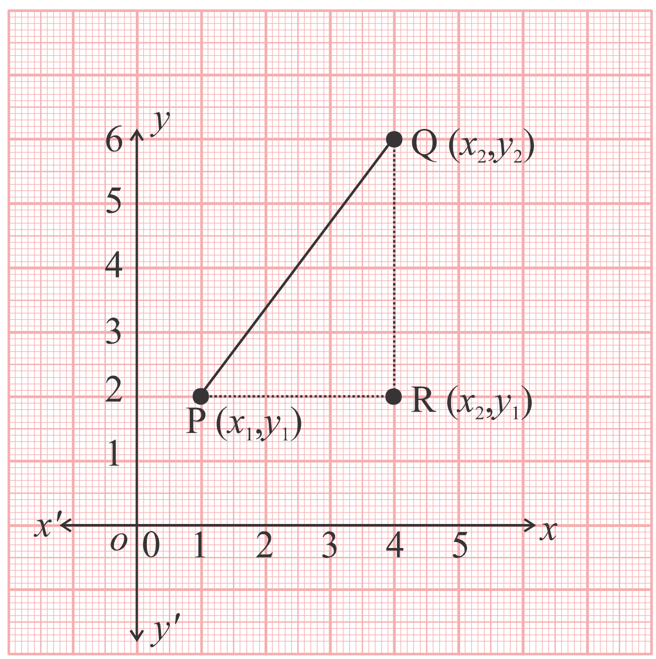
निर्देशांक समतल में किन्हीं भी दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करने के लिए हमें ऐसा तरीका चाहिए जो हर तरह की दूरियों पर लागू हो। हम Q और P के बीच दूरी निकालेंगे।

मान लीजिए कि बिंदु P के निर्देशांक (x_1,y_1) और Q के निर्देशांक (x_2,y_2) हैं।

समकोण त्रिभुज PRQ में,

दूरी PR= x_2-x_1

दूरी QR= y_2-y_1



आलेख–08

समकोण त्रिभुज PRQ में बौधायन–पाइथागोरस प्रमेय से

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

चूँकि $(x_1 - x_2)^2$ और $(x_2 - x_1)^2$ बराबर हैं इसलिए हम बिंदु P से बिंदु Q की दूरी ज्ञात करें या बिंदु Q से बिंदु P की दूरी ज्ञात करें, परिणाम में अंतर नहीं पड़ेगा।

अर्थात दूरी PQ = दूरी QP

यह निर्देशांक समतल पर किन्हीं भी दो बिंदुओं के बीच दूरी पता करने के लिए उपयोग किया जा सकता है।

उदाहरणः—5. बिंदुओं P(2,-3) और Q(5,-7) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः— यहाँ $x_1=2, y_1=-3$ और $x_2=5, y_2=-7$

$$\because PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

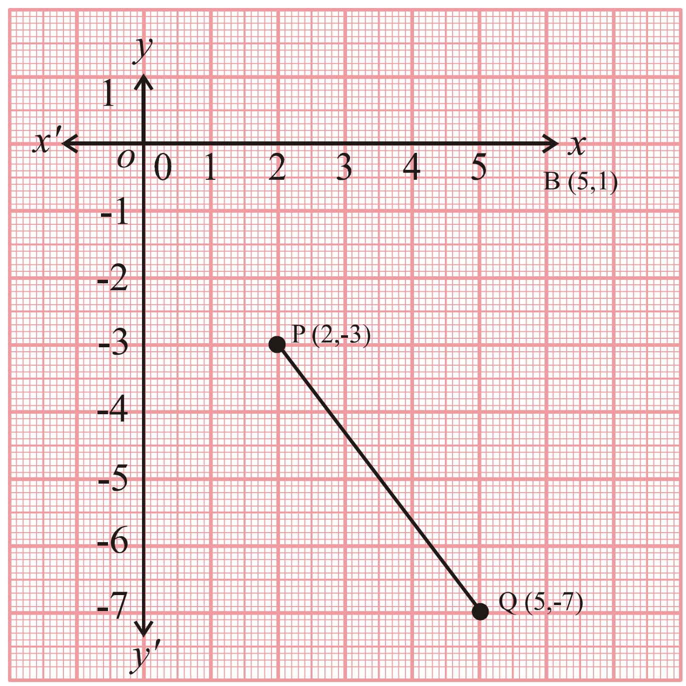
$$= \sqrt{(5-2)^2 + \{-7-(-3)\}^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{9+16}$$

$$= \sqrt{25}$$

$\therefore PQ = 5$ इकाई



आलेख—09

उदाहरणः—6. y-अक्ष पर एक ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं A(6, 5) और B(–4, 3) से समदूरस्थ हो।

हल :— आप जानते हैं कि y-अक्ष पर स्थित कोई भी बिंदु $(0, y)$ के रूप का होता है। अतः मान लीजिए कि बिंदु $P(0, y)$ बिंदुओं A और B से समदूरस्थ है। तब,

$$PA = PB$$

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

$$36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$$

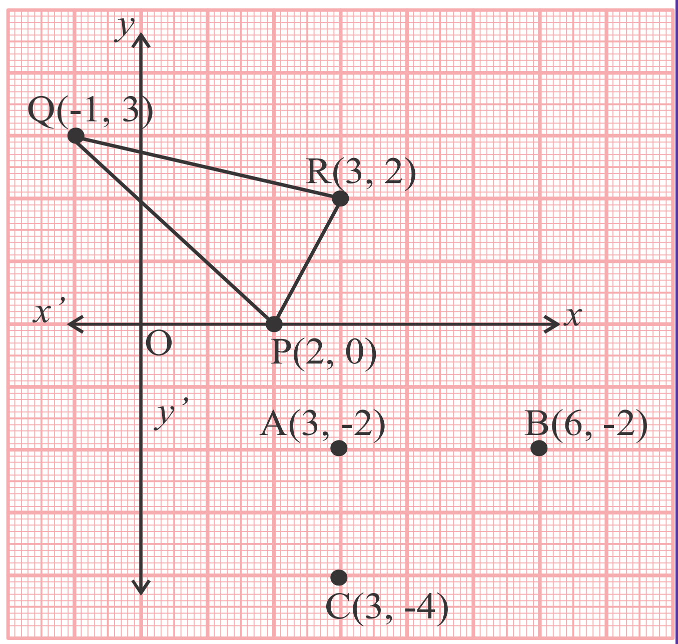
$$4y = 36$$

$$y = 9$$

अतः अभीष्ट बिंदु (0, 9) है।

प्रश्नावली – 02

1. fn, x, vkyş k&10 esa fcanq P की Q व R से दूरी ज्ञात कीजिए।
2. आलेख–10 को देखकर AC, AB व BC का मान ज्ञात कीजिए।
3. बिंदु (3, 4) की मूल बिंदु से दूरी ज्ञात कीजिए।
4. यदि PA = PB हो तथा बिंदु A, B के निर्देशांक क्रमशः (2, 0) व (-2, 4) हों और P, y–अक्ष पर स्थित हो तब P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
5. y–अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं (5,-2) व (3,4) से समदूरस्थ है।
6. x और y में एक संबंध ज्ञात कीजिए, ताकि बिंदु (x, y) बिंदुओं (7, 1) और (3, 5) से समदूरस्थ हो।

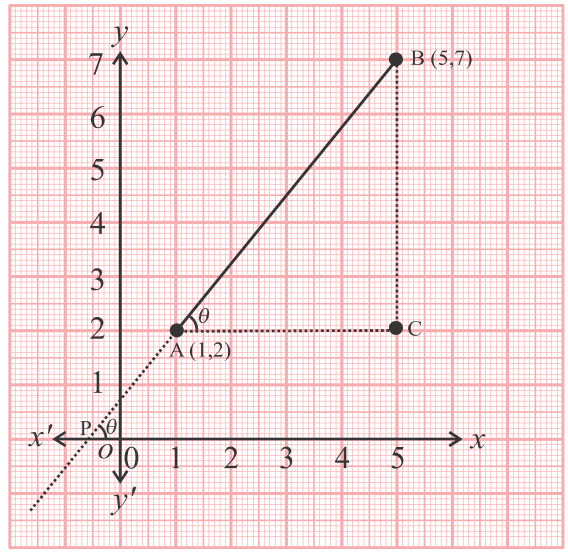


आलेख–10

ढाल या प्रवणता

अंतराल की ढाल या प्रवणता (SLOPE OF THE INTERVAL)

किसी रेखा या उसके किसी अंतराल की ढाल यह बताती है कि रेखा कितनी तेजी से चढ़ती या उतरती है। रेखा के किसी अंतराल AB की ढाल का मान y-निर्देशांक के B बिंदु से A बिंदु तक परिवर्तित होने तथा x-निर्देशांक के B बिंदु से A बिंदु तक परिवर्तित होने के बीच का अनुपात है। (ढाल को प्रवणता भी कहा जाता है, हम ढाल के लिए 'प्रवणता' शब्द का उपयोग करेंगे।)

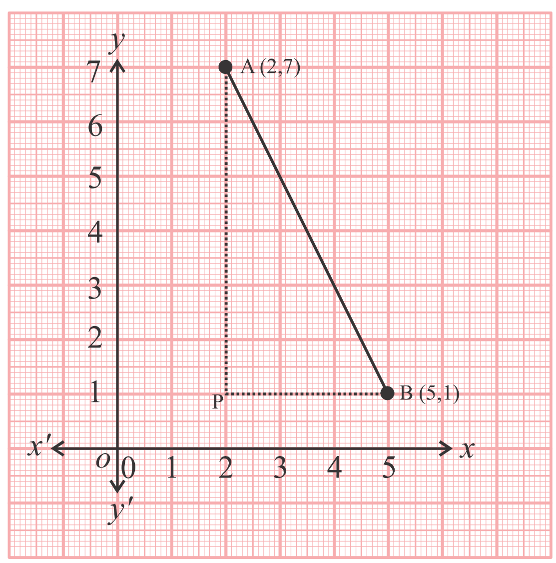


आलेख–11

यदि बिंदु A के निर्देशांक (1, 2) और बिंदु B के निर्देशांक (5, 7) हैं। तब

$$\text{अंतराल AB की ढाल} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-2}{5-1} = \frac{5}{4}$$

इस आकृति को हम ध्यानपूर्वक देखें तो हमें एक समकोण त्रिभुज नजर आता है जिसका समकोण बिंदु C पर है। यदि हम रेखाखंड AB का विस्तार करें तो वह किसी बिंदु P पर x-अक्ष को प्रतिच्छेद करेगा। यह रेखा x-अक्ष पर जो कोण बनाएगी वही कोण त्रिभुज ABC के बिंदु A पर बन रहा है (माना यह कोण θ है।)



आलेख–12

$$\text{अंतराल AB की प्रवणता} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{BC}{AC} = \tan\theta$$

$$\text{प्रवणता} = \frac{BC}{AC} = \tan\theta$$

यदि बिंदु B को पहला और बिंदु A को दूसरा बिंदु मानें तब क्या ढाल बदल जाएगा?

प्रवणता $= \dfrac{2-7}{1-5}$

$= \dfrac{-5}{-4}$

$= \dfrac{5}{4}$

अर्थात् दिए गए दो बिंदुओं में से किसी भी बिंदु को प्रथम बिंदु या द्वितीय बिंदु मानने पर उन बिंदुओं से गुजरने वाली रेखा या अंतराल की प्रवणता का मान परिवर्तित नहीं होता।

अब आलेख 12 में दिखाए गए अंतराल AB की प्रवणता पर विचार कीजिए।

अंतराल AB की प्रवणता $= \dfrac{(1-7)}{(5-2)}$

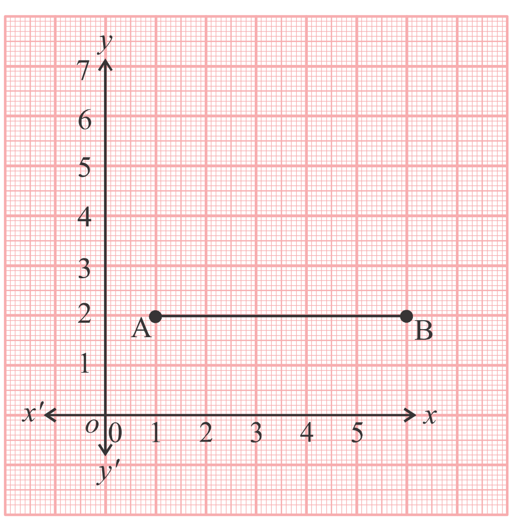
$= \dfrac{-6}{3}$

$= -2$

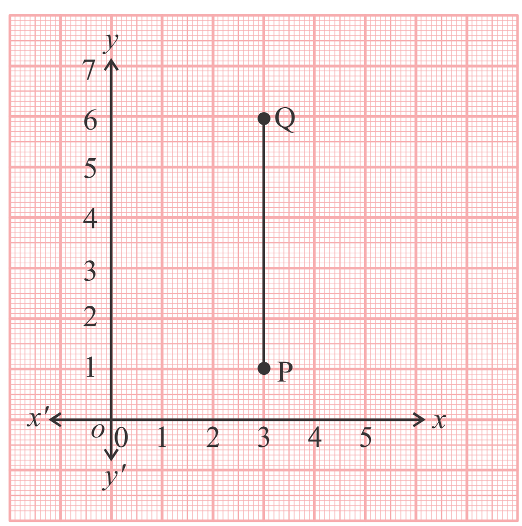
अर्थात यदि किसी अंतराल में A से B की दिशा में बढ़ने पर y का मान घटता जाता हो और x का मान बढ़ता जाता हो तो इस प्रकार के अंतराल की प्रवणता ऋणात्मक होती है।

विशेष स्थितियाँ

1) जब अंतराल क्षैतिज हो – इस स्थिति में $y_2 - y_1$ शून्य है और इसलिए प्रवणता शून्य है।



आलेख–13

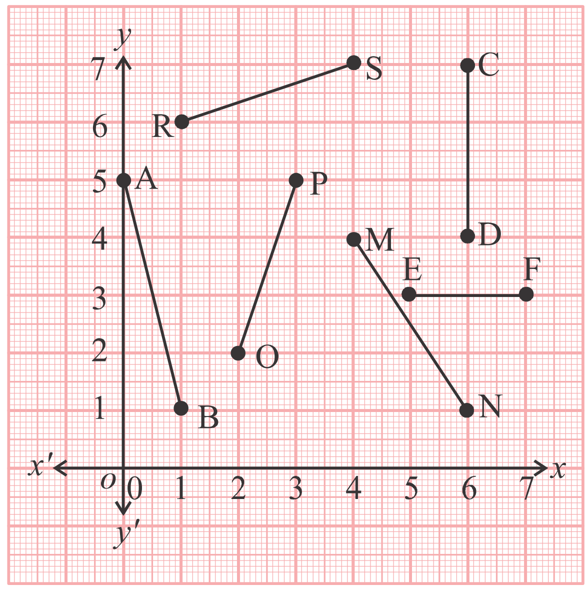


आलेख–14

2) जब अंतराल उर्ध्वाधर हो – इस स्थिति में x_2-x_1 शून्य है, चूँकि शून्य से विभाजन परिभाषित नहीं है इसलिए हम कह सकते हैं कि प्रवणता परिभाषित नहीं है।

सोचें एवं चर्चा करें

दिए गए आलेख–15 को देखिए। आप इनकी प्रवणता के विषय में क्या कहेंगे? अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए। कौन–कौन से रेखाखंड की प्रवणता धनात्मक है और कौन–कौन से रेखाखंड की प्रवणता ऋणात्मक ?



आलेख–15

रेखा की प्रवणता

रेखा की प्रवणता को रेखा के किसी अंतराल की प्रवणता से परिभाषित किया जाता है, क्योंकि रेखा के किन्हीं भी दो अंतरालों की प्रवणता बराबर होती हैं।

मान लीजिए कि दो अंतराल AB और PQ एक ही रेखा पर हैं। समकोण त्रिभुज ABC और PQR कि रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ AC और PR, x-अक्ष के समांतर हैं तथा BC और QR, y-अक्ष के समांतर हैं।

त्रिभुज ABC और त्रिभुज PQR में

AC समांतर है PR के तथा AQ तिर्यक रेखा उन्हें काटती है।

इसलिए $\angle A = \angle P$ (संगत कोण)

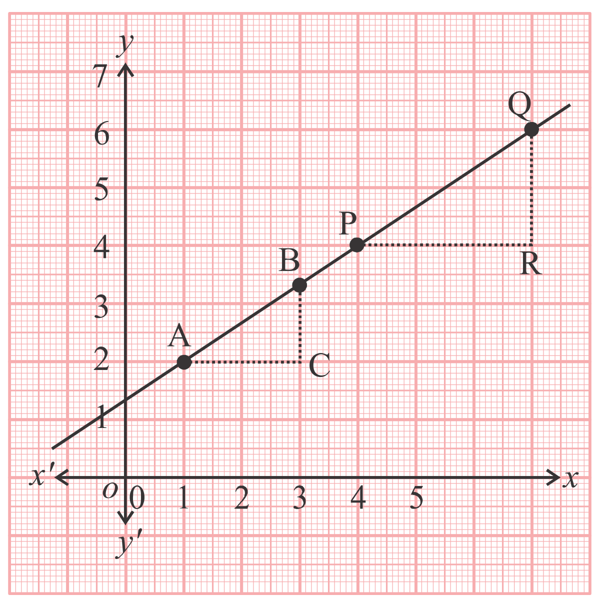
इसी तरह BC समांतर है QR के तथा AQ तिर्यक रेखा उन्हें काटती है।

इसलिए $\angle B = \angle Q$ (संगत कोण)

$\angle C = \angle R$ (समकोण)

इसलिए $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

इसलिए $\dfrac{QR}{PR} = \dfrac{BC}{AC}$



आलेख–16

हम कह सकते हैं कि इन दोनों अंतरालों AB और PQ की प्रवणता बराबर है।

उदाहरणः–7. एक रेखा बिंदु (1,2) और (5,10) से गुजरती है। इसकी ढाल ज्ञात कीजिए।

हलः– ढाल $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{10-2}{5-1}$$

$$= \frac{8}{4}$$

$$= 2$$

उदाहरणः–8. एक रेखा बिंदु (5, 7) से गुजरती है और इसकी ढाल $\dfrac{2}{3}$ है। इस रेखा पर उस बिंदु के x निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसका y निर्देशांक 13 हो।

हल :– रेखा पर स्थित पहला बिंदु (5, 7) है। दूसरे बिंदु के निर्देशांक (x, 13) होंगे।

रेखा की ढाल $= \dfrac{13-7}{x-5}$

$$= \frac{6}{(x-5)}$$

इसलिए $\dfrac{6}{(x-5)} = \dfrac{2}{3}$ (दिया है।)

$$18 = 2(x-5)$$

$$18 = 2x - 10$$

$$x = 14$$

ढाल की तुलना

अभी आपने ढाल को किसी रेखा के अंतराल के दो बिंदुओं के निर्देशांकों के संदर्भ में देखा। आइए इसे एक अन्य संदर्भ में देखते हैं।

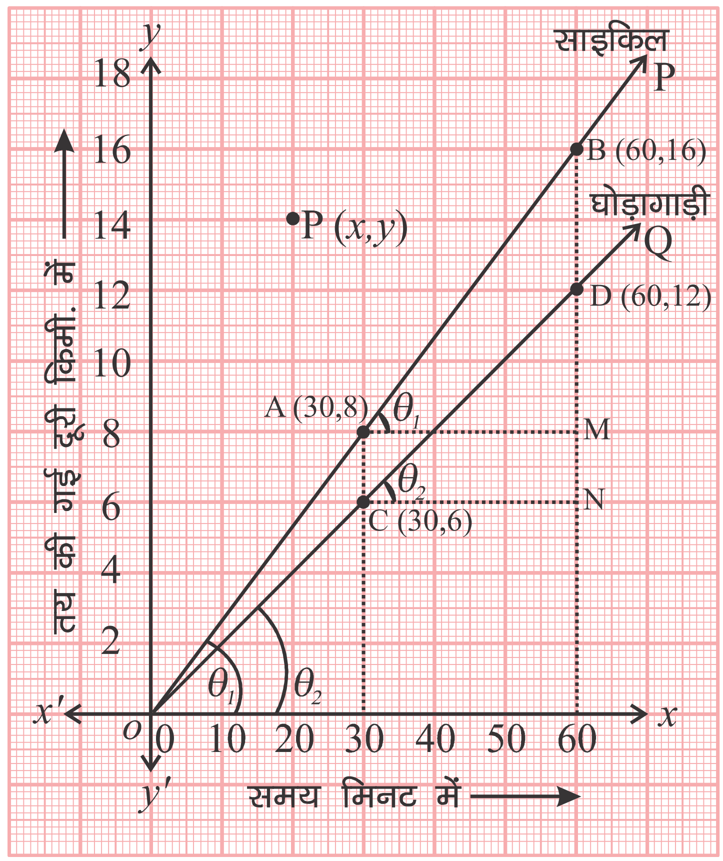
एक घोड़ागाड़ी और एक साइकिल किसी एक जगह से एक साथ चलना (क्रमशः 12 किमी./घंटा और 16 किमी./घंटा की चाल से) शुरू करते हैं। अलग–अलग समय पर इनके द्वारा तय की गई दूरी को इस तालिका में देखा जा सकता है–

तय की गई दूरी	15 मिनट में	30 मिनट में	60 मिनट में
घोड़ागाड़ी द्वारा तय की गई दूरी	3 किमी.	6 किमी.	12 किमी.
साइकिल द्वारा तय की गई दूरी	4 किमी.	8 किमी.	16 किमी.

समय और दूरी को निर्देशांक मानकर बनाए गए आलेख को ध्यान से देखें।

रेखा OP साइकिल के और रेखा OQ घोड़ागाड़ी के आलेख को प्रदर्शित करती है।

इन रेखाओं के अंतराल क्रमशः AB और CD है।



आलेख–17

AB की ढाल $= \dfrac{16-8}{60-30}$

$= \dfrac{8}{30}$

$= \dfrac{4}{15}$

CD की ढाल $= \dfrac{12-6}{60-30}$

$= \dfrac{6}{30}$

$= \dfrac{3}{15}$

स्पष्ट है कि $\dfrac{4}{15} > \dfrac{3}{15}$

AB की ढाल, CD की ढाल से ज्यादा है।

अब AB की ढाल को समकोण त्रिभुज AMB में देखिए

AB की ढाल $= \dfrac{16-8}{60-30}$

$= \dfrac{BM}{AM}$

$= \tan\theta_1$

(चूँकि $\angle BAM = \angle BOX$, रेखा OP द्वारा x–अक्ष के साथ बनाया गया कोण θ_1)

इसी तरह CD की ढाल $= \tan\theta_2$ ($\theta_2 =$ OQ द्वारा x–अक्ष के साथ बनाया गया कोण)

आपने देखा कि किसी रेखा के द्वारा x–अक्ष के साथ बनाए गए कोण का स्पर्शज्या (tangent) ही उस रेखा की ढाल है। स्पष्ट है कि कोण बढ़ने के साथ–साथ ढाल भी बढ़ती जाती है। एक और बात यहाँ देखी जा

सकती है कि त्रिभुज AMB में AM, 30 मिनट के समय अंतराल को और BM इस 30 मिनट में चली गई 8 किमी. की दूरी को बताता है तथा BM और AM का अनुपात साइकिल की चाल को बताता है। अतः हम देखते हैं कि यहाँ साइकिल की चाल उसकी रेखा की ढाल को व्यक्त करती है।

अंतःखंड

कोई रेखा x–अक्ष को जिस बिंदु पर काटती है, उस बिंदु की मूलबिंदु से दूरी x–अंतःखंड कहलाती है। इसीतरह, कोई रेखा y–अक्ष को जिस बिंदु पर काटती है, उस बिंदु की मूलबिंदु से दूरी y–अंतःखंड कहलाती है।

रेखा का समीकरण

EKLS3R

समीकरण $y = 2x + 4$ पर विचार कीजिए। क्या आप ऐसे निर्देशांकों के युग्म ज्ञात कर सकते हैं, जो इस समीकरण को संतुष्ट करें। उदाहरण के लिए

$x = 0$ के लिए

$$y = 2 \times 0 + 4$$

$$y = 4$$

इसलिए (0, 4) इस तरह का एक निर्देशांक युग्म है। इसी तरह के दूसरे निर्देशांक युग्म ज्ञात कीजिए। अब इन बिंदुओं को आलेखित कीजिए। आपने किस तरह की रेखा खींची? क्या यह सरल रेखा है?

अब आप एक ऐसी रेखा पर विचार कीजिए जिसकी ढाल 2 और y–अंतःखंड 4 है। यह रेखा बिंदु A (0, 4) से गुजरेगी।

इस रेखा पर कोई बिंदु P (x, y) लीजिए।

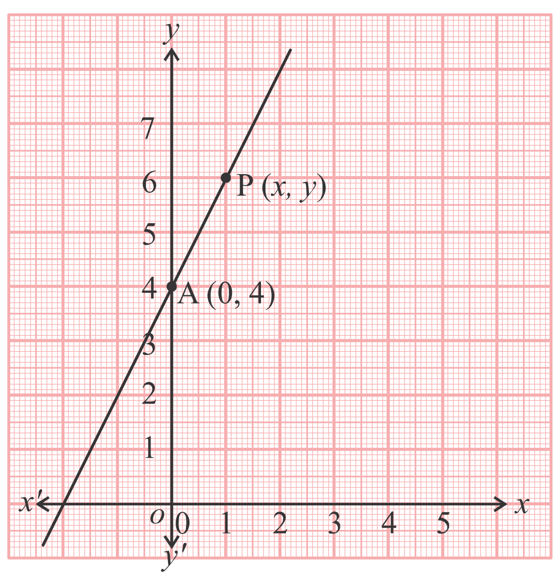
अंतराल AP की प्रवणता $= \dfrac{(y-4)}{(x-0)}$

$$= \frac{(y-4)}{x}$$

दिया गया है कि रेखा की ढाल 2 है,

अतः $$\frac{(y-4)}{x} = 2$$

$$y = 2x + 4$$



आलेख–18

यह उस रेखा का समीकरण है जो बिंदु $(0, 4)$ से गुजरती है और जिसकी ढाल 2 है। चूँकि बिंदु P भी इस रेखा पर स्थित है इसलिए बिंदु $P(x, y)$के निर्देशांक $y = 2x + 4$ को संतुष्ट करते हैं।

आइए, अब एक ऐसी रेखा पर विचार करें जिसकी ढाल m और Y अक्ष से अंतःखंड c है। इस रेखा का समीकरण क्या होगा? यह रेखा बिंदु A(0, c) से गुजरेगी। मान लीजिए कि इस रेखा पर बिंदु $P(x, y)$ है।

अंतराल AP की ढाल $= \dfrac{(y-c)}{(x-0)}$ ....(1)

लेकिन हमें पता है कि इस रेखा की ढाल m है ....(2)

(1) और (2) से

$$\frac{(y-c)}{(x-0)} = m$$

$$y - c = mx$$

$$y = mx + c$$

अर्थात् कार्तीय समतल में उस रेखा का समीकरण $y = mx + c$ है, जिसका ढाल m और Y अक्ष से अंतःखंड c है।

विलोमतः वे सभी बिंदु जिनके निर्देशांक समीकरण $y = mx + c$ को संतुष्ट करते हैं, सदैव उस रेखा पर स्थित होंगे जिसकी ढाल m और Y अक्ष से अंतःखंड c है।

उदाहरणः–9. रेखा की ढाल (या प्रवणता) और Y अक्ष से अंतःखंड लिखिए :–

(1) $y = 7x - 5$

(2) $y = -x + 5$

हलः–

(1) $y = 7x - 5$ की तुलना व्यापक समीकरण $y = mx + c$ से करने पर $m = 7, c = -5$

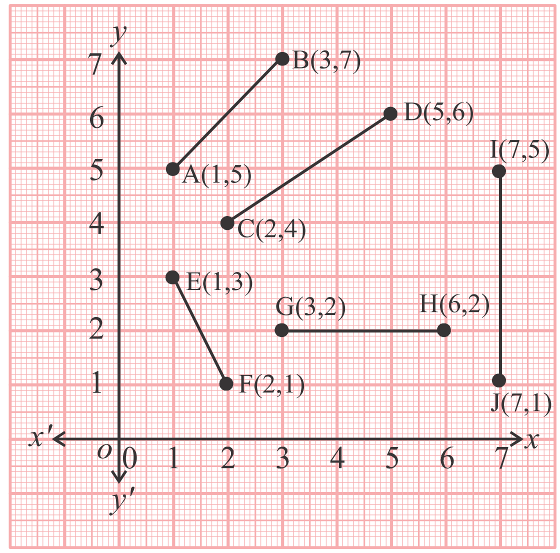
इसलिए रेखा की ढाल 7 और Y अक्ष से अंतःखंड –5 है।

(2) $y = -x + 5$ की तुलना $y = mx + c$ से करने पर $m = -1, c = 5$

इसलिए रेखा की ढाल –1 और Y अक्ष से अंतःखंड 5 है।

प्रश्नावली 3

1. दिए गए आलेख–19 में अंतराल की ढाल या प्रवणता ज्ञात कीजिए।



आलेख–19

2. X अक्ष के समांतर रेखा की प्रवणता क्या होगी?

3. एक रेखा बिंदु (7,10) से गुजरती है जिसकी ढाल $\frac{5}{6}$ है। (i) इस रेखा पर उस बिंदु के x निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसका y निर्देशांक 15 हो।

   (ii) Y निर्देशांक –3 पर x का मान क्या होगा?

4. एक रेखा बिंदु (3,7) व (6,8) से होकर जाती है तो उस रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

5 सरल रेखा $5x+6y=7$ को $y=mx+c$ के रूप में लिखिए तथा रेखा की ढाल तथा Y अक्ष से अंतःखंड ज्ञात कीजिए।

6. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो Y अक्ष से 3 माप का अंतःखंड काटती है एवं जिसकी प्रवणता $\frac{5}{4}$ है।

7. Y अक्ष के समांतर रेखा की प्रवणता क्या होगी?

8. Y अक्ष से 6 माप का अंतःखंड काटने वाली $\frac{-5}{3}$ ढाल वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

9. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी प्रवणता $\frac{7}{3}$ है तथा रेखा बिंदु (6,0) से होकर जाती है।

10. मूल बिंदु से होकर जाने वाली उस सरल रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए जो बिंदु (2,3) से भी होकर जाती है।

EKVN5E

हमने सीखा

1. यदि किसी समतल पर दो परस्पर लंबवत रेखाएँ XOX' व YOY' एक बिंदु O पर प्रतिच्छेद करें तब हम XOX' को X अक्ष, YOY' को Y अक्ष कहते हैं। प्रतिच्छेद बिंदु O, ''मूल बिंदु'' तथा यह समतल, 'निर्देशांक समतल' कहलाता है।
2. निर्देशांक समतल में किसी बिंदु के लिए x–निर्देशांक, Y अक्ष से लंबवत दूरी व y–निर्देशांक X अक्ष से लंबवत दूरी के बराबर होता है।
3. निर्देशांक समतल पर किन्हीं दो बिंदुओं $P(x_1, y_1)$ व $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ होती है।
4. समतल पर रेखा की ढाल या प्रवणता $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, जहाँ x निर्देशांक के A बिंदु से B बिंदु तक परिवर्तित होने का मान x_2-x_1 है तथा y निर्देशांक के A बिंदु से B बिंदु तक परिवर्तित होने का मान y_2-y_1 है।
5. ऐसी रेखा जिसकी ढाल m और Y अक्ष से अंतःखंड c हो, का समीकरण $y = mx + c$ होता है।

उत्तरमाला–1

1. (i) प्रथम (ii) द्वितीय (iii) तृतीय (iv) चतुर्थ
2. (i) y–अक्ष (ii) x–अक्ष (iii) x–अक्ष (iv) y–अक्ष
3. (i) तृतीय (ii) शून्य (iii) लंब (iv) शून्य (v) (0,0)
4. (a) B, D, P ; और G, R और C,S (b) B, E ; P,Q,C,G
   (c) Q, R, D, C

उत्तरमाला–2

1. $PQ = 3\sqrt{2}$, $PR = \sqrt{5}$ 2. $AC = 2, AB = 3, BC = \sqrt{13}$ 3. 5
4. P(0,2) 5. $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ 6. $x - y - 2 = 0$

उत्तरमाला–3

1. AB की प्रवणता $= 1$, CD की प्रवणता $= \frac{2}{3}$, EF की प्रवणता $= -2$, GH की प्रवणता $= 0$, IJ की प्रवणता = अपरिभाषित

2. शून्य 3. (i) $x = 13$ (ii) $x = -\frac{43}{5}$ 4. $\frac{1}{3}$

5. $y = -\frac{5}{6}x + \frac{7}{6}$, ढाल $= -\frac{5}{6}$, अंतःखंड $= \frac{7}{6}$

6. $5x - 4y + 12 = 0$ 7. अपरिभाषित 8. $5x + 3y - 18 = 0$

9. $7x - 3y - 42 = 0$ 10. $\frac{3}{2}$