4

पूर्णांक (INTEGERS)

29H3CJ

एक दिन कक्षा के सभी छात्रों ने शिक्षक से अनुरोध किया कि वे कोई खेल खेलना चाहते हैं। इस पर शिक्षक ने अपनी स्वीकृति देते हुए कहा ''क्यों नहीं आइए आज संख्याओं से संबंधित खेल खेलें''।

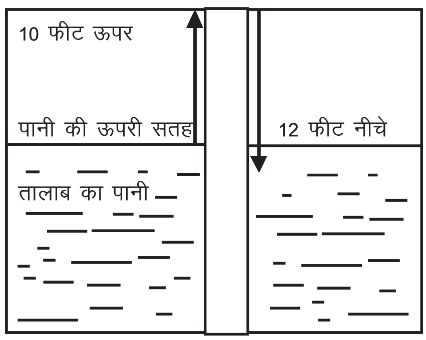
आप सभी अपनी कॉपी में एक अंक की कोई संख्या लिखकर इसे दो से गुणा करें, प्राप्त गुणनफल में से 12 घटाएँ और मुझे उत्तर बताएँ –

निर्देश	Qkfrek	deyh	eku
सोची गई संख्या	7	6	5
2 से गुणा करने पर	7×2=14	6×2=12	5×2=10
प्राप्त गुणनफल में 12 घटाइए	14–12=2	12–12=0	10–12= ?

छात्रों द्वारा किए जाने वाले हल की तीन संभावनाएँ हो सकती हैं :

1. कक्षा के कुछ विद्यार्थियों के परिणाम फातिमा के समान आ सकते हैं।
2. कुछ विद्यार्थियों के परिणाम कमली के समान आ सकते हैं।
3. कुछ विद्यार्थियों की समस्या मोनू के समान हो सकती है, वे संख्या को घटा सकने में असमर्थ रहे हों।

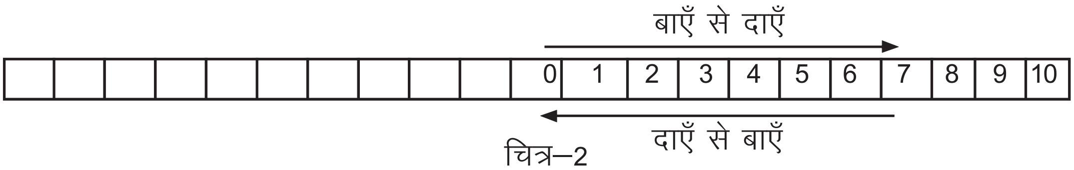
मोनू जैसे अन्य बच्चे भी थे उन सबने कहा, ''हम क्या करें'', शिक्षक ने कहा ''चलिए हम इसे समझने का प्रयास करें।'' ''मान लीजिए कि अपने गांव के तालाब में एक बाँस सीधा गड़ा हुआ है। तालाब का एक कीड़ा बाँस पर पानी के ऊपरी सतह से 10 फीट सीधा ऊपर चढ़ता है, इसके बाद वह कीड़ा वहां से 12 फीट नीचे की ओर आता है।''



चित्र 1

अतः यह स्पष्ट है कि वह कीड़ा पानी की ऊपरी सतह से 2 फीट नीचे है। पानी की सतह को यदि 0 से दर्शाया जाए तो नीचे के पैमाने को कैसे दिखाएं ?

परंतु मोनू को अब भी यह समझ में नहीं आया की (10–12) किस अंक के बराबर होगा। उसने कहा ''मुझे अभी भी समझ नहीं आया कि क्या करूँ।'' तब शिक्षक ने पासा और पट्टी का एक खेल खिलाया। ''हमारे पास एक लम्बी पट्टी है जिसके बीचों बीच 0 लिखा है। 0 के दायीं ओर 10 और बायीं ओर 10 खाने बने हैं। दाँयी ओर के खानों में (चित्र–2) 1 से 10 तक अंक लिखे हैं तथा दो पासे है, एक लाल और दूसरा हरा।



चित्र–2

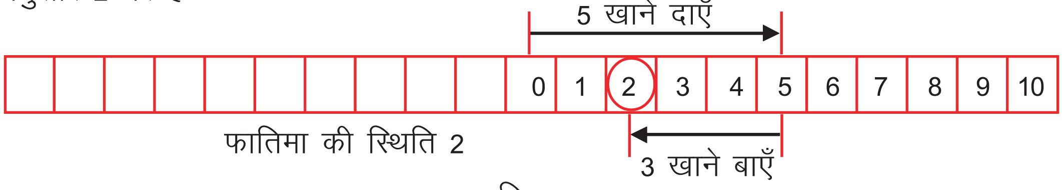
इस खेल में दो शर्तें हैं: (There are two conditions for the game.)

पहली:– फेंके गए लाल पासे के ऊपरी फलक पर जितने बिन्दु आएंगे लम्बी पट्टी पर 0 के दायीं ओर उतने ही खानें चलेंगे।

दूसरी:– फेंके गए हरे पासे के ऊपरी फलक पर जितने बिन्दु आएंगे उतने ही खाने पट्टी पर बाँयी ओर चलेंगे। यह चलना उस स्थान से प्रारंभ करेंगे जहाँ लाल पासे के कारण दाहिने ओर चलकर पहुँचे थे।

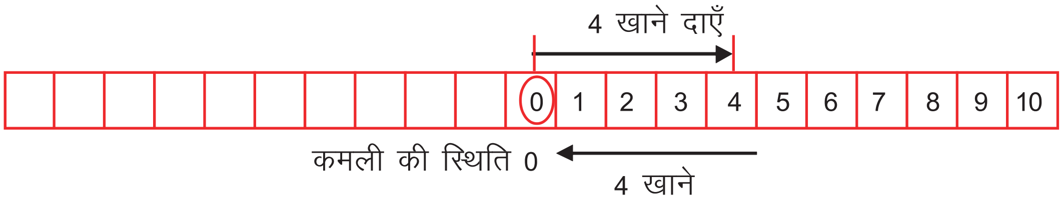
खेल आरम्भ होता है (The Game Starts Now) :

सबसे पहले पासा फातिमा फेंकती है। फातिमा के लाल पासे पर 5 तथा हरे पर 3 बिन्दु आए। शर्त के अनुसार फातिमा शून्य से दाहिने ओर 5 खाने चलेगी और 3 खाने वापस आएगी। उसकी स्थिति नीचे चित्र 3 के अनुसार 2 पर है–



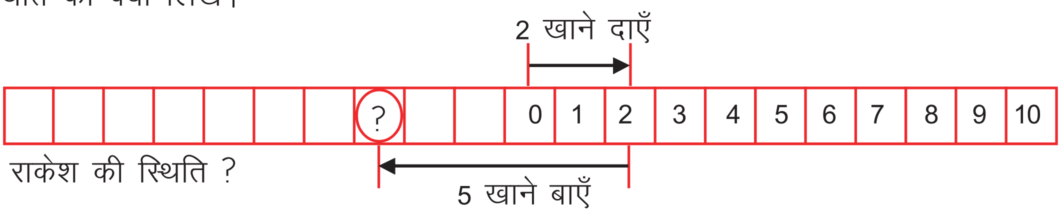
चित्र–3

अब कमली दोनों पासे फेंकती है। दोनों ही पासों पर 4 बिन्दु आए। (शर्त अनुसार) कमली की स्थिति को नीचे दर्शाया गया है–



चित्र–4

अन्त में राकेश दोनों पासे फेंकता है। उसके लाल पासे पर 2 और हरे पासे पर 5 बिन्दु आए। शर्त के अनुसार राकेश 2 खाना दाँयी ओर चलता है, और वहां से वापस मुड़ कर 5 खानें बायीं ओर जाता है। वह अपनी स्थिति शून्य से तीन खाने बाँए तरफ पाता है। एक बार फिर बच्चों को समझ नहीं आता की राकेश की स्थिति को क्या लिखें।



चित्र–5

परंतु कमली और कुछ अन्य को कुछ कुछ समझ में आने लगा है कि शून्य के दाँयी ओर की संख्याएँ क्रमशः एक–एक बढ़ रही है। दाँये ओर बढ़ने के लिए पिछली संख्या में 1 जोड़ कर क्रमशः अगली संख्या प्राप्त करते हैं। उसी प्रकार बाँये ओर जाने के लिए एक –एक घटा कर क्रमशः पीछे वाली संख्या प्राप्त करते जाते हैं। शून्य के दाहिने ओर की संख्याएँ क्रमशः एक–एक जोड़ने पर प्राप्त होती हैं और शून्य के बाएं ओर

जैसे

0 + 1 = 1
1 + 1 = 2
2 + 1 = 3
3 + 1 = 4
... + ... = ...
... + ... =....

की संख्याएँ क्रमशः एक–एक घटाने पर प्राप्त होती है। जैसे

3 – 1 = 2
2 – 1 = 1
1 – 1 = 0
0 – 1 = –1
–1–1 = –2
...– ... = ...
...– ... = ...
...– ... = ...

क्या यह बात आपके समझ में आई? मोनू ने कहा "क्या इसका अर्थ यह है कि शून्य के दायीं ओर की संख्याएँ धनात्मक हैं और 0 के बायीं ओर की संख्याएँ ऋणात्मक हैं। शिक्षक ने कहा, ''बिल्कुल ठीक है।'' यदि शून्य से क्रमशः एक–एक कम करते जाएँ तो 0–1=–1, –1–1=–2, –2–1=–3 इत्यादि संख्याएँ मिलती हैं। अतः राकेश की स्थिति –3 पर है क्योंकि शून्य से बाँयी ओर तीसरे खाने का यही मान होगा। इस प्रकार शून्य के बाँयी ओर –1,–2,–3,–4,–5,.... इत्यादि संख्याएँ (सभी ऋणात्मक संख्याएँ) होंगी। जैसे–जैसे बाँयीं ओर हम जाएंगे संख्या कम होती जाएगी अर्थात् ज्यादा बड़ी ऋणात्मक संख्या बनती जाएगी।

					–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

शून्य के बाएँ ओर की संख्याएँ शून्य के दाएँ ओर की संख्याएँ

चित्र–6

फातिमा कहती है कि शून्य के दायीं ओर की संख्यायें क्रमशः बढ़ती जाती हैं। 1>0, 2>1, 3>2, 4>3, 5>4, ... इत्यादि और बाएँ ओर की संख्या कम होती जाएगी अर्थात –1< 0, –2<–1, –3<–2......इत्यादि।

(आप ऋणात्मक संख्याओं को समझने के लिए यह खेल कक्षा में व घर पर जरूर खेलें। यदि आपको पासे प्राप्त नहीं होते हैं तो दो रंग के कागज लेकर दोनों पर 1 से 6 तक की संख्या अलग–अलग लिख कर इस प्रकार मोड़ लें कि संख्या नजर नहीं आए। अब प्रत्येक रंग का एक–एक कागज खींचे, इन्हीं अंकों से शर्तानुसार खेल खेलें।)

अपने अनुभव के आधार पर नीचे दी गयी संख्याओं के बीच बने बाक्स में उचित चिन्ह > (बड़ा) या (छोटा) < लगाएँ।

0		–1	–1		–2
50		70	100		101
–5		5	–53		–5

ऐसे ही कुछ और जोड़े सोचें व अपने साथियों को हल करने को दें।

ऋणात्मक संख्याएँ (Negative Numbers)

क्रियाकलाप (ACTIVITY) 1.

3 + $\boxed{4}$	=	7
3 + □	=	6
3 + □	=	5
3 + □	=	4
3 + □	=	3
3 + □	=	2
3 + □	=	1
3 + □	=	0

पूर्व के उदाहरणों में आपने पाया कि जिस प्रकार धनात्मक संख्याएँ हैं उसी प्रकार ऋणात्मक संख्याएँ भी हैं। इन संख्याओं को शामिल करने से हम कई नई संक्रियाएँ कर पाएँगे जैसे 12 में से 14 घटा पाएंगे और उत्तर को दर्शा पाएँगे। 3 और 4 जोड़ने पर परिणाम 7 आता है। यदि जोड़ का प्रथम अंक 3 स्थिर रखें तो उसमें कौनसी संख्या जोड़ें कि परिणाम क्रमशः 6,5,4,3,2,1, और 0 प्राप्त हो? इन मानों को खाली बाक्सों में लिखिए। ऐसे और भी सवाल सोचें व हल करें। क्या आप सबसे छोटी और सबसे बड़ी ऋणात्मक संख्या का मान बता सकते हैं?

पूर्णांक (Integer)

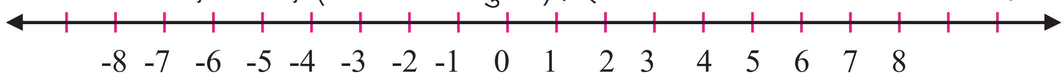
आप प्राकृत संख्याओं और पूर्ण संख्याओं से परिचित हैं। उनमें यदि ऋणात्मक संख्याएँ जोड़ लें तो? शून्य के दाँईं ओर प्राकृत संख्याएँ हैं और बाँयी ओर ऋणात्मक संख्याएँ। धनात्मक संख्याएँ, ऋणात्मक संख्याएँ तथा शून्य को मिलाकर पूर्णांक बनते हैं। पूर्णांक को I या Z से दिखाते हैं। अर्थात्

पूर्णांक (I) = {.............-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,.......} आदि।

जिस प्रकार सबसे बड़ी पूर्ण संख्या नहीं है उसी प्रकार सबसे बड़ी पूर्णांक भी नहीं है। क्या आप सबसे छोटी पूर्णांक सोच सकते हैं ?

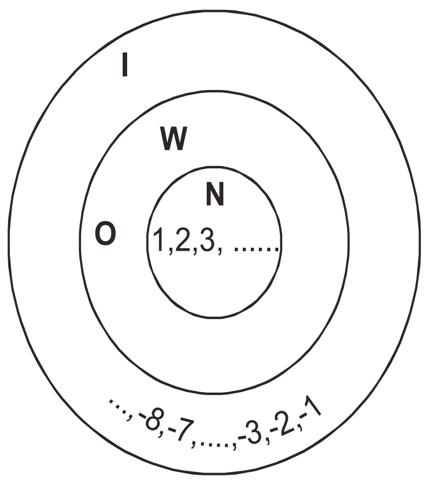
संख्या रेखा पर पूर्णांक संख्या को निरूपित करना

एक सरल रेखा खींचिए। इस सरल रेखा पर एक समान दूरी पर कुछ बिन्दु अंकित कीजिए। इस रेखा पर बीच में स्थित किसी बिन्दु को शून्य लिखकर इसके दाहिने ओर धनात्मक संख्याएँ तथा शून्य के बाँये ओर ऋणात्मक संख्याएँ लिखिए (चित्र–7 के अनुसार)। इस प्रकार बनी रेखा संख्या रेखा कहलाती है।



चित्र–7

छाया चित्र के माध्यम से पूर्णांकों का प्रदर्शन :–



यहाँ

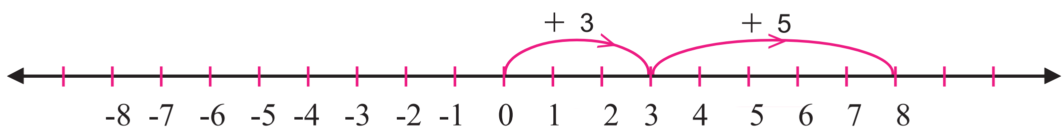
N = प्राकृतिक संख्याएँ
W = पूर्ण संख्याएँ
I = पूर्णांक संख्याएँ

उपरोक्त संकेतों को देखकर चित्र 8 में पूर्णांक में शामिल संख्याओं की पहचान कीजिए। पूर्ण संख्या में कौन–कौन सी संख्या शामिल है।

पूर्णांकों पर की गई संक्रियाओं को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करना।

पूर्णांकों को जोड़ना –

जब दोनों संख्याएँ धनात्मक हों, जैसे 3 + 5 = ?



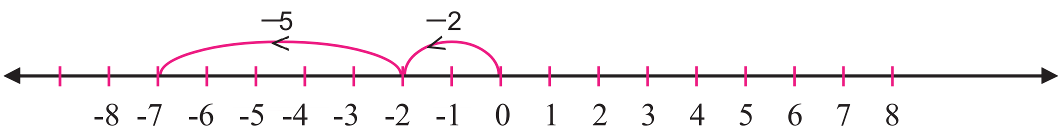
चित्र–9

पहले शून्य से 3 अंक धनात्मक दिशा में, फिर वहीं से 5 अंक धनात्मक दिशा में जाने पर 8 पर पहुँचते हैं अतः 3 + 5 = 8

और **जब दोनों संख्याएँ ऋणात्मक हों,** जैसे (–2)+(–5)।

तो पहले ऋणात्मक दिशा में 2 अंक जाते हैं। फिर वहीं से 5 अंक ऋणात्मक दिशा में और बढ़ें तो –7 अंक पर पहुंचते हैं।

अर्थात् (–2)+(–5) = –7

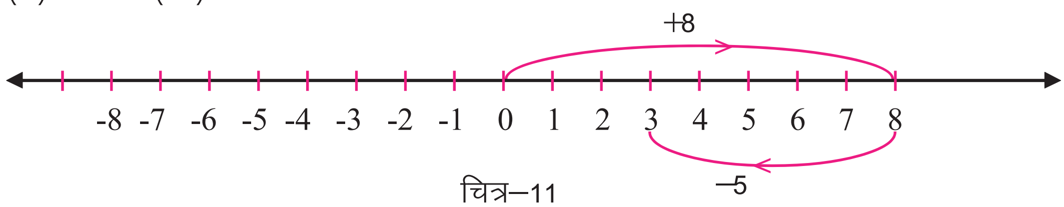


चित्र–10

जब एक संख्या धनात्मक और दूसरी संख्या ऋणात्मक हो–

जैसेः (अ) 8 +(–5) = ?

(अ)

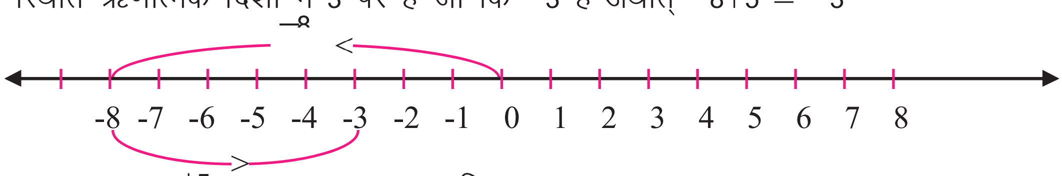


चित्र–11

पहले शून्य से 8 अंक धनात्मक दिशा में जाएंगे और फिर वहां से वापस 5 अंक ऋणात्मक दिशा में लेंगे। शून्य से उस दिशा को मालूम करें। यहाँ हमें धनात्मक दिशा में 3 प्राप्त होता है अर्थात् 8+(–5) = 3

(ब) –8 + 5 = ?

ऋणात्मक दिशा में 8 अंक चलकर वहां से वापस 5 अंक शून्य की ओर (धनात्मक दिशा) में आने पर अंतिम स्थिति ऋणात्मक दिशा में 3 पर है जो कि –3 है अर्थात् –8+5 = –3



चित्र–12

इसी प्रकार आप भी दो–दो पूर्णांक लेकर उन्हें जोड़िए। प्राप्त परिणामों पर विचार करें।

इस प्रकार उपरोक्त उदाहरणों से यह मालूम होता है कि –

1. दो धनात्मक पूर्णांकों का योगफल सदैव धनात्मक पूर्णांक तथा दो ऋणात्मक पूर्णांकों का योगफल सदैव ऋणात्मक पूर्णांक होता है।
2. एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का योगफल धनात्मक पूर्णांक होगा यदि धनात्मक पूर्णांक का आंकिक मान अधिक हो तथा योगफल ऋणात्मक होगा यदि ऋणात्मक पूर्णांक का आंकिक मान अधिक हो।

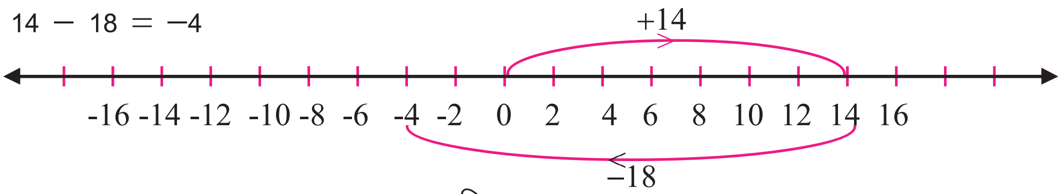
पूर्णांकों को जोड़ने में उन सभी गुणों का पालन होता है। जिनका पूर्ण संख्याएँ पालन करती है।

1. दो पूर्णांकों का योग एक पूर्णांक ही होगा।
2. सभी पूर्णांकों के योग में क्रम विनिमय नियम लागू होता है।
3. दो पूर्णांकों का योग हमेशा एक पूर्णांक संख्या होती है, यही पूर्णांकों के योग के लिए संवरक नियम है।
4. पूर्णांकों में शून्य जोड़ने पर उनके मान में कोई परिवर्तन नहीं आता है।

पूर्णांक संख्याओं का घटाना (Subtraction of Integers)

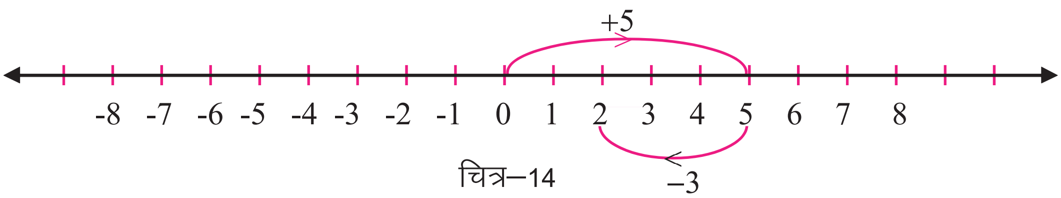
जिस प्रकार पूर्ण संख्याओं में घटाने की संक्रिया योग की विपरित संक्रिया है, उसी प्रकार पूर्णांक संख्याओं में घटाने की संक्रिया भी योग की विपरीत संक्रिया है। निम्न उदाहरणों पर ध्यान दीजिए।

(अ) 14 – 18 = –4



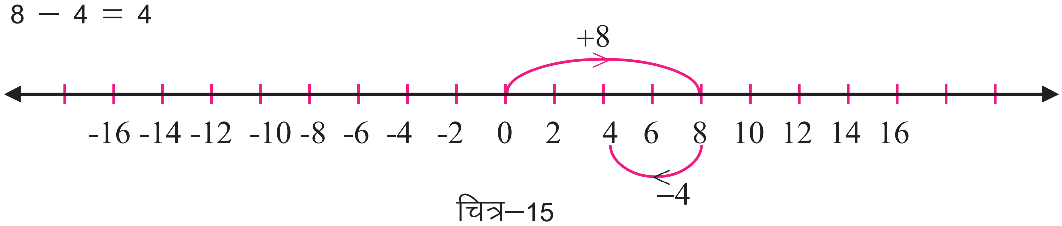
चित्र–13

(ब) 5 – 3 = 2



चित्र–14

(स) 8 – 4 = 4



चित्र–15

घटाने की प्रक्रिया तो आप जान चुके हैं। परंतु, यदि कभी 10 से –6 घटाने को कहा जाता है तब परेशानी हो सकती है क्योंकि ऋणात्मक संख्याओं को कैसे घटाएं, वह ठीक से समझ नहीं आता है। आइए, इस बात को समझें :

आप जानते हैं कि 5 + 0 = 5, 8 + 0 = 8, 111 + 0 = 111

अर्थात् किसी भी संख्या में यदि शून्य जोड़ा जाए तो योगफल वही रहता है जो संख्या का मान है। **इस तरह शून्य को योज्य तत्समक (additive identity) कहते हैं।**

सोचिए, 5 में क्या जोड़े कि शून्य प्राप्त हो? आपका उत्तर होगा (–5)

अर्थात् 5 + (–5) = 0 (योज्य तत्समक)

इसी प्रकार (–7) में क्या जोड़े कि शून्य प्राप्त हो? आपका उत्तर होगा (+7)

अर्थात् (–7) + (+7) = 0 (योज्य तत्समक)

यहाँ (–5) योज्य प्रतिलोम है 5 का तथा + 7 योज्य प्रतिलोम है (–7) का।

अतः किसी संख्या का योज्य प्रतिलोम (additive inverge) वह संख्या है जिसे उस संख्या के साथ जोड़ने पर योज्य तत्समक (शून्य) प्राप्त होता है।

अर्थात् $\boxed{\text{संख्या + संख्या का योज्य प्रतिलोम = योज्य तत्समक}}$

नीचे दी गई संख्याओं का योज्य प्रतिलोम ज्ञात कीजिए :

संख्या		संख्या का योज्य प्रतिलोम		योज्य तत्समक
35	+	(......................)	=	0
–40	+	(......................)	=	0
–17	+	(......................)	=	0
–35	+	(......................)	=	0
–13	+	(......................)	=	0

पहली संख्या में दूसरी संख्या घटाने का अर्थ है पहली संख्या में दूसरी संख्या के योज्य प्रतिलोम को जोड़ना। क्या आपको यह बात उचित लगती है?

जैसे 12 –(5) = 12 +(5 का योज्य प्रतिलोम)

= 12 +(–5)

उसी प्रकार 12–(–5) = 12 +(–5 का योज्य प्रतिलोम)

= 12 +(+5) = 12 +5 =17

क्या आप 10 में से (–6) को घटा सकते हैं?

अभ्यास (Practice) –4.1

नीचे दिए गए प्रश्नों में घटायीं जाने वाली संख्या का योज्य प्रतिलोम निकाल कर हल कीजिए:

1) 3–(–7) 2) 12–(–10) 3) 15–(+7)

4) 7 –(+18) 5) 19–(–7)

ऊपर अभ्यास के प्रश्नों में आप देख रहे हैं कि ऋणात्मक संख्या का ऋणात्मक एक धनात्मक संख्या है और धनात्मक संख्या का ऋणात्मक एक ऋणात्मक संख्या है।

जैसे : – (–3) = +3

या (–1) × (–3) = +3

(–5) × (–3) = + 15

अर्थात् दो ऋणात्मक पूर्णांको का गुणनफल सदैव धनात्मक पूर्णांक होता है।

इसी प्रकार,

$-(+7) = -7$

या $(-1) \times (+7) = -7$

$(-5) \times (+3) = -15$

अर्थात् एक ऋणात्मक पूर्णांक तथा धनात्मक पूर्णांक का गुणनफल सदैव ऋणात्मक पूर्णांक होता है।

घटाने की संक्षिप्त विधि (Short Cut Method of Subtraction)

जब किसी संख्या को 10, 100, 1000 आदि से घटाना होता है तो आप सबसे बड़े स्थान के 1 को उससे छोटी इकाइयों में बदलते हैं। जैसे, इस उदाहरण में देखें –

उदाहरण 1.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0 \\ -\quad 7 \\ \hline \end{array}$$

हल :– यहाँ इकाई के शून्य से 7 नहीं घट सकता। दहाई में भी शून्य है, वहाँ से भी आपको कुछ नहीं मिल सकता। आप एक सैकड़े को दस दहाइयों में और इनमें से एक दहाई को दस इकाई में बदलते हैं –

सै.	द.	इ.		सै.	द.	इ.	
1	0	0	→	0	9	10	(100 = 90 + 10)

याने एक सैकड़ा छोटी इकाइयों में बदलकर 9 दहाई और 10 इकाई बन जाता है। ऐसे में सौ से छोटी किसी भी संख्या को घटाना आपके लिए आसान हो जाता है।

घटाइए

$$\begin{array}{ccc} \text{सै.} & \text{द.} & \text{इ.} \\ 0 & 9 & 10 \\ - & & 7 \\ \hline & 9 & 3 \\ \hline \end{array}$$

(100 − 7 = 90 + 10 − 7)

(= 90 + 3 = 93)

एक और उदाहरण देखें –

उदाहरण 2.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ -\qquad 2\ 8\ 7\ 4 \\ \hline \end{array}$$

हल :–

दिया है –

	दसह.	ह.	सै.	द.	इ.
	1	0	0	0	0
–		2	8	7	4

संख्या दस हजार को छोटी इकाइयों में बदलिए –

	दसह.	ह.	सै.	द.	इ.	
	0	9	9	9	10	(10000=9990+10)
–		2	8	7	4	
		7	1	2	6	

उदाहरण 3. 1 0 0 0 – 8 7 6

	9	9	(10)
–	8	7	6

इन उदाहरणों में आपने देखा कि इकाई के अंक को दस से घटाया जा रहा है बाकी सभी को नौ से।

अब आप चाहें तो सीधे उत्तर लिख सकते हैं।

$100 - 23 = (9 - 2)\ (10 - 3) = 77$

$100 - 69 = (9 - 6)\ (10 - 9) = 31$

$1000 - 512 = (9 - 5)\ (9 - 1)\ (10 - 2) = 488$

$1000 - 32 = (9 - 0)\ (9 - 3)\ (10 - 2) = 968$

$1000 - 8 = 992$

$10{,}000 - 982 = 9018$

$10{,}000 - 8374 = 1626$

पूर्णांकों के घटाने से संबंधित गुण (Properties Related to Subtraction of Integers)

1. दो पूर्णांकों का अन्तर एक पूर्णांक होता है।(संवरक गुण)
2. पूर्णांक में से 0 घटाने पर उनका मान नहीं बदलता।

3. प्रत्येक पूर्णांक का पूर्ववर्ती एवं परवर्ती भी पूर्णांक होता है।

जैसे 0 का पूर्ववर्ती –1 एवं –1 का पूववर्ती –2, –5 का पूर्ववर्ती –6 इत्यादि तथा –1 का परवर्ती 0,–2 का परवर्ती –1, –6 का परवर्ती –5 इत्यादि।

बीजांक के प्रयोग से जोड़ने, घटाने की जाँच

तुम्हें पता ही है कि किसी संख्या का बीजांक ज्ञात करने के लिए उसके अंकों का योग तब तक करते हैं जब तक एक अंक वाली संख्या न मिल जाए। अंत में प्राप्त अंक ही बीजांक होता हैं।

जैसे –	45 का बीजांक	4 + 5 = 9 है
और	457 का बीजांक	4 + 5 + 7 = 16
	16 में दो अंक है इसीलिए	1 + 6 = 7
अर्थात्	457 का बीजांक 7 है।	

बीजांक की सहायता से हम अपने बनाए सवालों की जाँच कर सकते हैं।

जोड़ की जाँच (Verification of Addition)

जोड़ के सवालों की जाँच करने के लिए हम जोड़ी जाने वाली संख्याओं और योगफल का बीजांक ज्ञात करते हैं।

यदि संख्याओं के बीजांक का योग उत्तर के बीजांक के बराबर हो तो उत्तर सही होगा।

आइए एक उदाहरण से समझते हैं – 453 + 158 = 611

453 के बीजांक 3 और 158 के बीजांक 5 का योग उत्तर 611 के बीजांक 8 के बराबर है।

अर्थात् उत्तर सही है।

इसी प्रकार अपने बनाए हुए जोड़ के सवालों के उत्तर की जाँच आप खुद ही कर सकते हैं।

घटाने की जाँच (Verification of Subtraction)

यदि उत्तर के बीजांक में घटाई जाने वाली संख्या का बीजांक जोड़ने पर ऊपर वाली संख्या का बीजांक प्राप्त हो तो उत्तर सही होगा।

आइए एक उदाहरण देखें – 587 – 235 = 352

उत्तर 352 के बीजांक 1 और घटने वाली संख्या 235 के बीजांक 1 को जोड़ने पर 2 प्राप्त होता है।

587 का बीजांक भी 2 है।

अर्थात् उत्तर सही है।

इस तरीके से उन प्रश्नों के उत्तरों की जाँच कीजिए जिन्हें आपने हल किया है।

पूर्णांकों का गुणा (Multiplication of Integers)

क्रियाकलाप (ACTIVITY) 1

नीचे तालिका में पूर्णांक संख्याओं का गुणा करके दिखाया गया है।
कुछ रिक्त स्थान तालिका में है, उनकी पूर्ति कीजिए –

क्र.	पहली संख्या	दूसरी संख्या	पहली संख्या × दूसरी संख्या	गुणनफल	निष्कर्ष
01.	3	4	3×4	+12	दो धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है।
02.	–6	–2	$(-6) \times (-2)$	+12	दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है।
03.	–5	2	$(-5) \times (+2)$	–10	एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक होता है।
04.	3	–6	$(+3) \times (-6)$	–18	....
05	– 5	–4	....	....	....
06	–7	2	....	....	....
07.	–8	–12	....	....	....
08.	15	–13	....	....	....
09	–17	–19	....	....	....

9, 99, 999......... आदि का गुणा

एक, दो और तीन अंकों वाली किसी संख्या में क्रमशः 9, 99, 999 जैसी संख्याओं का गुणा करने पर हमें एक मजेदार पैटर्न मिलता है। आइए कुछ उदाहरण देखें –

$8 \times 9 = 72$ $\qquad$ $47 \times 99 = \underline{46}\ \underline{53}$

$7 \times 9 = 63$ $\qquad$ $78 \times 99 = \underline{77}\ \underline{22}$

$5 \times 9 = 45$

आप देख रहे हैं कि गुण्य और गुणक एक–एक अंक वाली संख्याएँ हैं। प्राप्त गुणनफल में दहाई का अंक हर बार गुण्य से एक कम है और दहाई में मिली इस संख्या को 9 से घटाने पर जो मिला उसे इकाई में रखा गया है। क्या यही पैटर्न दूसरी संख्याओं में भी मिलेगा?

देखें :–

	दहाई	इकाई	द.	इ.	
6 × 9	= (6 − 1)	(9 − 5)	= 5	4	= 54 सत्य है।
4 × 9	= (4 − 1)	(9 − 3)	= 3	6	= 36 सत्य है।

यदि गुण्य और गुणक दो–दो अंकों की संख्याएँ हों तो क्या होगा? यहाँ हमें गुणनफल के रूप में चार अंकों की संख्या मिलेगी (10 × 99 को छोड़कर)

	ह. सै.	द. इ.	ह.	सै.	द.	इ.
10×99	= (10-1)	(99-9)	=	9	9	0
75 × 99	= (75 − 1)	(99 − 74)	= 7	4	2	5
84 × 99	= (84 − 1)	(99 − 83)	= 8	3	1	6

इसे थोड़ा और बढ़ाएँ (take it slightly more)–

100 × 999 को हल करें।

	दस ह. ह.	सै. द. इ.	
100 × 999	= (100 − 1)	(999 − 99)	
	99	900	= 9 9 9 0 0

यदि 100 से बड़ी कोई भी तीन अंक वाली संख्या लें तो गुणनफल 6 अंकों की संख्या होगी।

217 × 999	= (217 − 1)	(999 − 216)	
	216	783	= 2 1 6 7 8 3
999 × 999	= (999 − 1)	(999 − 998)	
	998	001	= 9 9 8 0 0 1

अब थोड़ो सोचें ये सब कैसे होता है ?

$$8 \times 9 = 8 \times (10 - 1) = 80 - 8 = 70 + 10 - 8$$
$$= 70 + 9 - 7$$
$$= 70 + 2$$
$$= 72$$

$$(7 + 1)\ (10 - 1) = 70 + 10 - 7 - 1$$
$$= 70 + 10 - 1 - 7$$
$$= 70 + 9 - 7$$
$$= 70 + 2$$
$$= 72$$

अब इन उदाहरणों को ध्यानपूर्वक देखिए–

$3 \times 2 = 6$, $2 \times 1 = 2$, $4 \times 2 = 8$, $1 \times 4 = 4$

$5 \times 3 = 15$, $2 \times 8 = 16$, $7 \times 3 = 21$, $9 \times 9 = 81$

ऊपर के पहले चार उदाहरणों में आप देख रहे हैं कि इकाई की संख्या में इकाई की संख्या का गुणा करने पर इकाई की संख्या ही मिल रही है। नीचे के चारों उदाहरणों में भी इकाई में इकाई का गुणा हुआ और गुणनफल में इकाई के साथ – साथ दहाई की भी कोई संख्या मिल रही है।

इसी तरह आप देख सकते हैं कि दहाई में इकाई का गुणा करने पर या तो दहाई और सैकड़ा या केवल दहाई की संख्या मिलेगी।

जैसे $20 \times 3 = 60$, $30 \times 1 = 30$, $10 \times 4 = 40$

$40 \times 3 = 120$, $50 \times 5 = 250$, $30 \times 7 = 210$

20 यानी दो दहाई में 3 का गुणा करने पर 60 इकाइयाँ यानी 6 दहाइयाँ मिलीं। 4 दहाइयों (40) में 3 का गुणा करने पर 12 दहाइयाँ या 1 सैकड़ा और 2 दहाइयाँ मिलीं।

यदि इन बातों का ध्यान रखते हुए गुणा करें तो गुणा करना थोड़ा संक्षिप्त हो जाता है। आगे कुछ उदाहरणों से हम समझेंगे यह गुणा कैसे किया जाता है।

उदाहरण 1 13×12

हल –

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 12 \end{array}$$

चरण – 1

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 12 \\ \hline 6 \end{array}$$

इकाई 3 में इकाई 2 का गुणा किया।

6 इकाइयाँ मिलीं। इन्हें इकाई में लिखा।

चरण – 2

$$\begin{array}{r} 1\ 3 \\ \times\ \ 1\ 2 \\ \hline 5\ 6 \end{array}$$

पहली संख्या की इकाई 3 में दूसरी संख्या की दहाई 1 का गुणा किया, 3 दहाइयाँ मिलीं। दूसरी संख्या की इकाई 2 में पहली संख्या की दहाई 1 का गुणा किया, 2 दहाइयाँ मिलीं, कुल 5 दहाइयाँ (3 + 2) मिलीं, इसे दहाई में लिखा।

$$\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ & \times \\ 1 & 2 \end{array}$$

$(3\times1) + (2\times1) = 3 + 2 = 5$ दहाइयाँ

चरण – 3

$$\begin{array}{r} 1\ 3 \\ \times\ \ 1\ 2 \\ \hline 1\ 5\ 6 \end{array}$$

पहली संख्या की दहाई 1 में दूसरी संख्या की 1 दहाई का गुणा किया 1 सैकड़ा मिला। इसे सैकड़े में लिखा। कुल 156 मिला।

इन तीनों चरणों को इस तरह देख सकते हैं –

सै.	द.	इ.	
1	1	3	3
$\updownarrow$	$\times$		$\updownarrow$
1	1	2	2
1	(3 + 2)		6
1	5	6	= 156

उदाहरण 2 12×31 को हल करें।

हल

चरण – 1

$$\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ & \updownarrow \\ \times\ 3 & 1 \\ \hline & 2 \end{array}$$

इकाई 2 $\times$ इकाई 1 = 2 इकाइयाँ

इकाई में लिखा।

चरण – 2

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ & \times \\ 3 & 1 \\ \hline 7 & 2 \end{array}$$

इकाई 2 $\times$ दहाई 3 = 6 दहाइयाँ

इकाई 1 $\times$ दहाई 1 = 1 दहाइयाँ

योग = 7 दहाइयाँ (दहाई में लिखा)

चरण 3

$$\begin{array}{r} 1\;\;2 \\ \updownarrow\;\;\; \\ \times 3\;\;1 \\ \hline 3\,7\;\;2 \end{array}$$

सैकड़ा $1 \times$ सैकड़ा 3 = $1 \times 3 = 3$ (सैकड़े में लिखा)

हल मिला $12 \times 31 = 372$

इन दोनों उदाहरणों में गुणा करने पर हमें हासिल नहीं मिला। यदि संख्याओं को थोड़ा बड़ा लें तो यह स्थिति बनेगी।

आइए देखें –

उदाहरण 3 43×12 को हल करें

चरण 1

$$\begin{array}{r} 4\;3 \\ \times\;1\;2 \\ \hline 6 \end{array}$$

इकाई $3 \times$ इकाई $2 = 6$ इकाइयाँ
(इकाई में लिखा।)

चरण 2

$$\begin{array}{r} 4\;\;3 \\ \times \\ 1\;\;2 \\ \hline 1\;6 \end{array}$$

(इकाई $3 \times$ दहाई 1) + (इकाई $2 \times$ दहाई 4)
$3 + 8 = 11$ दहाई
11 दहाई = 1सैकड़ा + 1 दहाई

1 दहाई को दहाई में लिखा। 1सैकड़ा हासिल के रूप में आगे के लिए रखा।

चरण 3

$$\begin{array}{r} 4\;\;3 \\ \updownarrow\;\;\; \\ \times 1\;\;2 \\ \hline 5\;1\;6 \\ \hline \end{array}$$

दहाई $4 \times$ दहाई $1 =$ 4 सैकड़ा
= + 1 सैकड़ा (हासिल का)

योग = 5 सैकड़ा
इसे सैकड़े में लिखा।

गुणनफल मिला $43 \times 12 = 516$

उदाहरण 4 हल कीजिए – 76×58

चरण 1

$$\begin{array}{r} 7\;6 \\ \times\;5\;8 \\ \hline 8 \\ (4)\;\; \end{array}$$

$6 \times 8 = 48$ 8 इकाई
4 दहाई (हासिल के)

चरण 2

$$\begin{array}{cc} 7 & 6 \\ & \times \\ 5 & 8 \\ \hline 0 & 8 \\ (9) & (4) \end{array}$$

$(6 \times 5) + (8 \times 7)$

$30 + 56 = 86$ दहाइयाँ

$+ \quad 4$ दहाइयाँ (हासिल के)

90 दहाइयाँ

$=$ 9 सैकड़े + 0 दहाई

दहाई में 0 लिखा, 9 सैकड़े (हासिल की)

चरण 3

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 6 \\ & \updownarrow & \\ \times & 5 & 8 \\ \hline 4 & 4 & 0 & 8 \\ \hline & (5) & (4) & \end{array}$$

हल मिला

$7 \times 5 = 35$ सैकड़े

$+ 9$ सैकड़े (हासिल)

44 दहाइयाँ

4 हजार और 4 सैकड़े

इन्हें इनके स्थानों पर लिखा।

$76 \times 58 = 4408$

पूर्णांकों में गुणन संक्रिया के गुण (Properties of Multiplication of Integers)

1. दो पूर्णांकों का गुणनफल सदैव एक पूर्णांक होता है। इसे संवरक गुण कहते हैं।

   जैसे :– $3 \times (-6) = -18$ (यहाँ 3 एवं –6 का गुणनफल –18 एक पूर्णांक संख्या है)

2. पूर्णांकों की गुणन संक्रिया क्रम–विनिमेय नियम का पालन करती है।

   जैसे :– $(-7) \times 2 = 2 \times (-7) = -14$

3. प्रत्येक पूर्णांक में एक का गुणा करने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है।

   जैसे :– $(-4) \times 1 = 1 \times (-4) = -4$

   यहाँ संख्या 1 को गुणन–तत्समक अवयव कहते हैं।

4. किसी पूर्णांक में उसके गुणंन प्रतिलोम का गुणा करने पर सदैव 1 प्राप्त होता है।

   जैसे :– $5 \times \frac{1}{5} = 1$

   यहाँ संख्या 5 का गुणन प्रतिलोम $\frac{1}{5}$ है। शून्य का गुणन प्रतिलोम अस्तित्व में नहीं है।

5. **शून्य का गुणा** – किसी पूर्णांक में शून्य का गुणा करने पर गुणनफल सदैव शून्य प्राप्त होता है।

   जैसे :– $(-3) \times 0 = 0 \times (-3) = 0$

6. पूर्णांकों के गुणा पर साहचार्य नियम लागू होता है।

   जैसे :–

$$-3 \times (4 \times 5) = (-3 \times 4) \times 5$$
$$\Rightarrow 3 \times (-20) = (-12) \times 5$$
$$\Rightarrow -60 = -60$$

7. वितरण गुण :– पूर्णांकों में गुणन संक्रिया योग संक्रिया पर वितरण गुण का पालन करती है।

जैसे :– $3 \times (-4+5) = 3 \times (-4) + 3 \times 5$

या $3(-4+5) = 3(-4) + 3 \times 5$

$= -12 + 15$

$= 3$

पूर्णांकों का भाग (Division of Integers)

पिछले पाठ में पूर्ण संख्याओं के संदर्भ में आपने भाग देना सीखा है। पूर्णांक संख्याओं के गुणा के उदाहरण भी हम देख चुके है। इन्हीं के आधार पर हम पूर्णांकों के भाग के बारे में समझ सकते हैं।

3 × 4 = 12	-5 × 6 = - 30	(-7) × (-2) = 14
12 ÷ 3 = ?	-30 ÷ -5 = ?	14 ÷ (-2) = ?
12 ÷ 4 = ?	30 ÷ 6 = ?	14 ÷ (-7) = ?

गुणन एवं भाग संक्रियाएँ परस्पर विपरीत संक्रियाएँ है। यह शून्य के लिए लागू नहीं होता क्योंकि शून्य से किसी भी पूर्णांक को भाग नहीं दिया जा सकता। इसी आधार पर ऊपर दिए कथनों में प्रश्न चिह्नों के स्थान पर संख्याएँ लिखें।

पूर्णांक में भाग संक्रिया के गुण (Properties of Division in Integers)

1. पूर्णांकों के भाग पर सदैव संवरक गुण लागू नहीं होता है। जैसे 3÷4 में भागफल पूर्णांक नही है।
2. प्रत्येक पूर्णांक में (शून्य को छोड़कर)उसी पूर्णांक संख्या का भाग देने पर भागफल हमेशा 1 आता है। जैसे :– $7 \div 7 = 1$
3. शून्य को छोड़कर प्रत्येक पूर्णांक को उसके योज्य प्रतिलोम से भाग देने पर परिणाम–1 प्राप्त होता है। जैसे :– $15 \div (-15) = -1$
4. शून्य में किसी भी पूर्णांक संख्या का भाग देने पर भागफल का मान शून्य ही रहता है। जैसे :– $0 \div 16 = 0$
5. किसी पूर्णांक संख्या में शून्य से भाग देने पर भागफल ज्ञात नहीं कर सकते। अर्थात् $4 \div 0 =$ **अपरिभाषित**

प्रश्नावली (EXERCISE) –4

29QYE7

1. निम्न संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित करके परिणाम बताइए –

(i)	2 + (-4)	(ii)	-3 + 5	(iii)	(-6) + (-3)
(iv)	6 + 4 + (-2)	(v)	4 + (-3) + (-5)	(vi)	0 + 3
(vii)	0 + (-5)	(viii)	9 + 0 + (-1)		

2. योगफल ज्ञात कीजिए–

(i)	1531, (-503)	(ii)	-55, -211	(iii)	117, -81
(iv)	-18, 172				

3. fuEu esa ls izR;sd fjDr LFkku esa >, = या < का चिह्न लगाइए जिससे कथन सत्य हो–

(i) 8 + (-3) .... -3 + 8

(ii) -28 + 25 .... -25 + 28

(iii) -4 + 0 .... 4 + 0

(iv) 0 + 9 .... 9 + 0

(v) 25 + (+25) .... + 25 - (-25)

(vi) 208 + 53 .... 208 - 53

4. निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए–

(i) (+2) × (3) × (5) (ii) 3 × (-5) × (-6)

(iii) (-4) × 3 × (-2) (iv) (-6) × (-4) × 1

(v) 3 × 0 × (-2) (vi) 2 × (-7) × (-3)

5. रिक्त स्थानों की पूर्ति >, = या < लिखकर कीजिए –

(i) (2) × (5) .... (-3) × (5)

(ii) 2 × -4 × -3 .... 8 × 3

(iii) 4 × -3 × -1 28

(iv) (-8) × (-5) .... 2 × 20

(v) 2 × -3 × 0 .... 0 × -8

(vi) 4 × 5 × (-3) .... -4 × (+5) × (-3)

(vii) 3 × 8 × (-5) .... 3 × 8 × (-5)

6. दो पूर्णांकों का योग 69 है। यदि उनमें से एक पूर्णांक 56 है तो दूसरा पूर्णांक बताइए।

7. दो पूर्णांकों का योग 85 है यदि एक पूर्णांक –15 है तो दूसरा पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

8. निम्न में से प्रत्येक का भागफल ज्ञात कीजिए –

(i) 30 ÷ 2 (ii) 40 ÷ (-4) (iii) -48 ÷ 12

(iv) 24 ÷ 0 (v) -14 ÷ 1 (vi) 95 ÷ (-5)

9. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

(i) -80 ÷ ....= - 20 (ii) 46 ÷ .... = -23

(iii) -24 ÷ .... = 24 (iv) 12 ÷ .... = -1

10. नीचे दी गई संख्याओं का योज्य प्रतिलोम ज्ञात कीजिए –

(i) 17 (ii) -23 (iii) 68

(iv) -75

11. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

(i) -18 + ... = 0 (ii) 26 + ... = 0

(iii) 161 + ... = 0 (iv) -79 + ... = 0

हमने सीखा (We Learnt)

1. दो धनात्मक पूर्णांकों का योगफल सदैव धनात्मक पूर्णांक तथा दो ऋणात्मक पूर्णांकों का योगफल सदैव ऋणात्मक पूर्णांक होता है।
2. एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का योगफल धनात्मक पूर्णांक होगा यदि धनात्मक पूर्णांक का आंकिक मान अधिक हो तथा योगफल ऋणात्मक होगा यदि ऋणात्मक पूर्णांक का आंकिक मान अधिक हो।
3. दो पूर्णांकों का योग हमेशा एक पूर्णांक होता है, यही पूर्णांकों के योग के लिए संवरक नियम है।
4. पूर्णांक में शून्य जोड़ने पर उसके मान में कोई परिवर्तन नहीं आता है। शून्य को योज्य तत्समक अवयव कहते हैं।
5. पूर्णांक में 1 का गुणा करने पर उसके मान में परिवर्तन नहीं आता है। संख्या 1 को गुणन तत्समक कहते हैं।
6. किसी धनात्मक संख्या को किसी ऋणात्मक संख्या के साथ गुणा करने पर गुणनफल ऋणात्मक संख्या होता है। जैसे $(+1) \times (-1) = -1$ या $(-1) \times (+1) = -1$
7. ऋणात्मक संख्या का ऋणात्मक संख्या के साथ गुणा होने पर धनात्मक संख्या प्राप्त होती हैं। जैसे – $(-1) \times (-1) = +1$
8. दो पूर्णांकों का योग, अन्तर एवं गुणा एक पूर्णांक होता है।
9. पूर्णांक से 0 घटाने पर उसका मान नहीं बदलता।
10. प्रत्येक पूर्णांक की पूर्ववर्ती एवं परवर्ती संख्या होती है।
11. किसी ऋणात्मक संख्या का योज्य प्रतिलोम धनात्मक संख्या तथा किसी धनात्मक संख्या का योज्य प्रतिलोम ऋणात्मक संख्या होती है।
12. पूर्णांक के भाग पर सदैव संवरक गुण लागू नहीं होता है। जैसे $3 \div 4$ में भागफल पूर्णांक नहीं है।
13. शून्य को छोड़कर प्रत्येक पूर्णांक में उसी पूर्णांक का भाग देने पर भागफल हमेशा 1 आता है।
14. शून्य को छोड़कर प्रत्येक पूर्णांक को उसके योज्य प्रतिलोम से भाग देने पर परिणाम -1 प्राप्त होता है।
15. शून्य का गुणन प्रतिलोम अस्तित्व नहीं रखता है।
16. पूर्णांकों के गुण –

गुण	योग संक्रिया	अंतर संक्रिया	गुणन संक्रिया	भाग संक्रिया
संवरक	✓	✓	✓	×
क्रमविनिमेय	✓	×	✓	×
साहचार्य	✓	×	✓	×