6

गुणनखण्ड एवं गुणज (FACTORS AND MULTIPLES)

2AILJ5

पूर्णांक के पाठ में आपने पढ़ा है कि भाग की संक्रिया हमेशा संवरक नियम का पालन नहीं करती हैं, अर्थात किसी पूर्णांक को यदि किसी अन्य पूर्णांक से भाग दिया जावे तो हमेशा पूर्णांक प्राप्त नहीं होता। सोचकर बताइये कि 8 में किन–किन संख्याओं का भाग जाता है और शेष नहीं बचता? और 7 में किस–किस का भाग जाता है?

गुणनखंड (Factors)

$2 \times 5 = 10$ में आपने देखा कि 2 तथा 5 का भाग 10 में पूरी तरह चला जाता है। किसी संख्या के गुणनखंड वे संख्याएँ हैं जो उस संख्या को पूरी तरह विभाजित करें ।

$10 \div 2 = 5$ अर्थात 2 तथा 5,10 के गुणनखंड है

$10 \div 5 = 2$

किसी संख्या के गुणनखंड उस संख्या की सभी भाजक संख्याएँ होंगी।

प्रत्येक संख्या कम से कम 1 व स्वयं से अवश्य विभाजित होती है।

जैसे : 12 में 1 का भाग पूरी तरह चला जाता है।

12 में 12 का भाग पूरी तरह चला जाता है।

क्या आप ऐसी कोई संख्या जानते हैं जिसमें एक का अथवा उसी संख्या का भाग पूरी तरह नहीं जाता हो?

भाज्य संख्याएँ (Divisible Numbers)

वह संख्या जिनमें 1 तथा उसी संख्या के अतिरिक्त अन्य संख्याओं से पूरा–पूरा भाग दिया जा सकता है, भाज्य संख्या कहलाती है।

आइए, देखे 12 में और किन किन संख्याओं का भाग जाता है।

$$\begin{aligned} 12 &= 1 \times 12 \\ &= 2 \times 6 \\ &= 3 \times 4 \\ &= 3 \times 2 \times 2 \end{aligned}$$

12, संख्या 1 ,2, 3, 4, 6, 12 से पूर्णतया विभाजित हो जाता है।

अतः किसी संख्या का गुणनखंड उस संख्या को पूर्णतया विभाजित करता है।

अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers)

वह संख्या जिसका गुणनखंड केवल 1 तथा स्वयं वही संख्या हो अभाज्य संख्या कहलाती है।

जैसे : 13 में केवल 1 एवं 13 का पूरा–पूरा भाग जाता है, अन्य किसी संख्या का नहीं अतः 13 एक अभाज्य संख्या है इसी प्रकार 2, 3, 5,... इत्यादि अभाज्य संख्याएँ हैं।

क्रियाकलाप (ACTIVITY) 1.

नीचे सारणी में कुछ संख्याओं सभी गुणनखंड दिये गये हैं। शेष संख्याओं के सभी गुणनखंडों को रिक्त स्थानों में लिखिए तथा एक गुणनखंड, दो गुणनखंडों वाली एवं दो से अधिक गुणनखंडों वाली संख्याओं को अलग–अलग छाँटिये–

सारणी

संख्या	सभी गुणनखंड	संख्या	सभी गुणनखंड
1	1	6	1, 6,2,3
2	1,2	7	....
3	....	8	....
4	1,4,2	9	....
5	....	10	....

उपरोक्त सारणी में हमें तीन प्रकार की संख्याएँ दिखाई देती हैं –

1. एक गुणनखंड वाली संख्या : ऐसी संख्या जिसका केवल एक ही गुणनखंड है। ऐसी संख्या 1 है। यह न तो अभाज्य संख्या है और न ही भाज्य संख्या, यह एक अद्वितीय संख्या है।
2. दो गुणनखण्डों वाली संख्याएँ : 2, 3, 5, 7, इत्यादि ऐसी संख्याएँ हैं जिनके केवल दो ही गुणनखंड होते हैं । अतः यह अभाज्य संख्याएँ होगी। इस प्रकार अभाज्य संख्याओं के पॉच अन्य उदाहरण अपनी कॉपी में लिखिए।
3. दो से अधिक गुणनखंडों वाली संख्या : 4, 6, 8, 9, 10 इत्यादि ऐसी संख्याएँ हैं जिनके दो से अधिक गुणनखंड है ये सभी भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

क्रियाकलाप (ACTIVITY) 2.

एरटोस्थनींज की छलनी : भाज्य और अभाज्य संख्याओं को अलग–अलग छांटने के लिए एरटोस्थनींज ने एक तरीका अपनाया था, इसे एरटोस्थनींज की छलनी कहते हैं।

एरटोस्थनींज की छलनी

सारणी में 1 से 100 तक की संख्या दी गई है। नीचे दिये गये निर्देशों का पालन कीजिए–

निर्देश :

(1) 1 को काट दीजिए, क्योंकि 1 अभाज्य संख्या नहीं है।

(2) 2 के चारो ओर एक घेरा बना दीजिए तथा 2 से विभाजित होने वाली सभी संख्याओं को एक लकीर से काट दीजिए। जैसे 4,6,8,. . . इत्यादि।

(3) अब अगली बिना कटी संख्या 3 को घेरे लगाकर 3 से विभाजित होने वाली सभी संख्याओं को एक लकीर से काट दीजिए। यहाँ हमने 2 और 3 से विभाजित होने होनी वाली कुछ संख्याओं को काट दिया है शेष संख्याओं को काट कर सारणी को पूरा कीजिए।

(4) इसी प्रकार अगली बिना कटी संख्या को घेरिये तथा उससे विभाजित होनी वाली सभी संख्याओं को काटिए।

(5) यह प्रक्रिया तब तक दोहराइये जब तक 100 तक की सभी संख्याए कट न जाए या घिर न जाए।

सारणी

इस प्रक्रिया के बाद इस छलनी में घेरों के अंदर की सभी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ है तथा 1 को छोड़कर, काटी गई सभी संख्याएँ भाज्य संख्याएँ है।

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

क्रियाकलाप (ACTIVITY) 3.

भाज्य और अभाज्य संख्याओं को तो आपने जान लिया है। अब आइए गुणनखण्ड निकालने का एक खेल खेलें।

आप अपनी कापी में कुछ घेरे बनाइए । प्रत्येक घेरा के नीचे चित्रानुसार मान 1, 2, 3, 4 ..., इत्यादि लिखिए। और नीचे लिखे निर्देशों का पालन करिए –

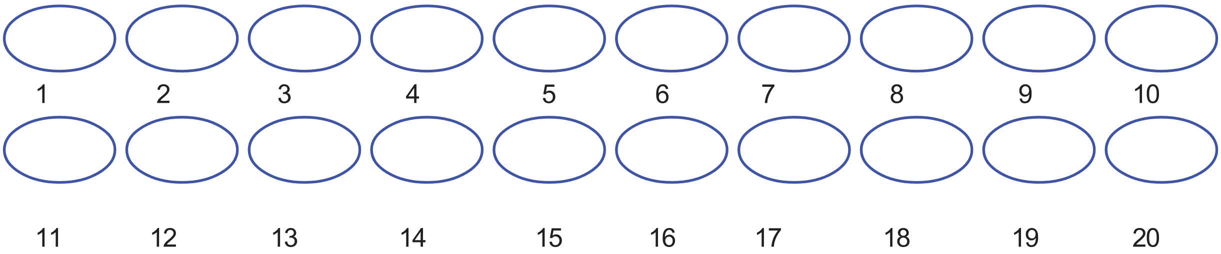
निर्देश :

1 का भाग जिन संख्याओं में जाता है उन सभी घेरों में 1 लिखिए।

जिन संख्याओं में 2 का भाग जाता है उन घेरों में 2 लिखिए।

जिन संख्याओं में 3 का भाग जाता है, उन घेरों में तीन लिखिए।

इसी प्रकार आगे की संख्याएँ लिखते जाइए एवं निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



प्रश्न 1. ऐसे कितने घेरे है जिनके अंदर मात्र एक संख्या है। उस घेरे के बाहर की संख्या का मान लिखिए। . . . .

प्रश्न 2. ऐसे कितने घेरे है जिनके अंदर दो संख्याएँ है। उन घेरों के बाहर की संख्या का मान लिखिए। . . . .

प्रश्न 3. ऐसे कितने घेरे है जिनके अंदर दो से अधिक संख्याएँ है, उन घेरों के बाहर की संख्या का मान लिखिए। . . . .

घेरे के अंदर की सभी संख्याएँ घेरे के बाहर की सभी संख्याओं के गुणनखण्ड हैं। **वे संख्याएँ जिनके मात्र दो गुणनखंड (1 एवं स्वयं वह संख्या) होते हैं अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।**

सहभाज्य संख्याएँ (Co-Prime Numbers)

आइये 8 और 15 के गुणनखंडों पर विचार करें।

8 के गुणनखंड = 1, 2, 4, 8

15 के गुणनखंड = 1, 3, 5, 15

उक्त दोनो संख्याओं के गुणनखण्डों को देखने पर यह स्पष्ट होता हैं कि केवल 1 ही है जो 8 और 15 का उभयनिष्ठ गुणनखंड है। 1 के अतिरिक्त और कोई संख्या ऐसी नहीं है जो 8 और 15 का उभयनिष्ठ गुणनखंड हो। ऐसी स्थिति में संख्याएँ 8 और 15 सह अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

इसी तरह 9, 10 और 49 के गुणनखण्डों पर विचार करें।

9 के गुणनखंड = 1, 3, 9

10 के गुणनखंड = 1, 2, 5, 10

49 के गुणनखंड = 1, 7, 49

उक्त उदाहरण में केवल 1 ही ऐसी संख्या है जो 9, 10 और 49 तीनों का उभयनिष्ठ गुणनखंड है इसके अतिरिक्त और कोई संख्या नहीं है जो 9, 10, 49 सभी का गुणनखंड हो, इसलिए 9, 10, और 49 सह अभाज्य संख्याएँ हैं।

ऐसी संख्याएँ जिनका केवल एक ही उभयनिष्ठ गुणनखंड 1 हो, सह अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

अभ्यास (Practice)

(1) 1 से 100 के बीच आने वाली अभाज्य संख्याओं को अपनी कॉपी में लिखिए।

(2) 75 से 100 के बीच आने वाली भाज्य संख्याओं को अपनी कॉपी में लिखिए।

(3) 70 से 80 के बीच सबसे ज्यादा गुणनखण्ड वाली संख्या कौन सी है?

(4) क्या 12 और 25 सह अभाज्य संख्याएँ हैं ?

(5) क्या दो क्रमागत संख्याएँ सह अभाज्य संख्याएँ होंगी ?

संख्याओं के अन्य प्रकार (Some other Types of Numbers)

1. **सम संख्या (EVEN NUMBERS) :** वे संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाजित होती हैं सम संख्या कहलाती है। जैसे : 2, 4, 6, 8, 10, 12 ....

2. **विषम संख्या (ODD NUMBERS) :** वे संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाजित नहीं होती हैं विषम संख्या कहलाती है। जैसे : 1, 3, 5, 7, 9, 11. . . इत्यादि।

   नीचे आपको कुछ विषम संख्याएँ दी गई है। उनमें से भाज्य और अभाज्य संख्याओं को छाँटकर सारणी में दिए गये स्थान पर लिखिए।

   41, 45, 47, 53, 55, 57, 63, 67, 69, 71, 73, 77, 81, 83, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99

सारणी

भाज्य संख्याएँ	अभाज्य संख्याएँ

क्या सभी विषम संख्याएँ अभाज्य होती हैं?

अभाज्य गुणनखंड (Prime Factors)

आइये देखें 42 के अभाज्य गुणनखण्ड क्या होंगे?

42 = 14 x 3, यहां 3 अभाज्य है,

क्या 14 भी अभाज्य है?

नहीं, 14 को 2 x 7 लिख सकते है।

अर्थात् 42 = 2 x 7 x 3, अब यहां 2, 7, 3 सभी अभाज्य संख्याएँ हैं। ये 42 के अभाज्य गुणनखण्ड है। इन्हें अभाज्य गुणनखण्ड कहते है।

6 के अभाज्य गुणनखण्ड कौन–कौन से हैं? और भी कुछ संख्याएँ लेकर उनके अभाज्य गुणनखण्ड पता करिए।

अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करना (Finding Prime Factor)

अभाज्य गुणनखण्ड कैसे पता करें? क्या एक–एक संख्या को कई–कई बार भाग करके देखें? सामान्य तौर पर नीचे दिया तरीका इस्तेमाल करने से किसी भी संख्या के अभाज्य गुणनखण्डों का पता लग सकता हैं। दी गई संख्या को सबसे पहले 2 से भाग करके देखें। यदि संख्या 2 से विभाज्य है तो संख्या और फिर उसके भागफलों में तब तक 2 का भाग देते है जब तक वह 2 से विभाज्य रहती है। फिर यदि संख्या

3 से विभाज्य है तो उस में 3 से बारी–बारी तब तक भाग देते हैं जब तक वह 3 से विभाज्य है। इसी प्रकार 5, 7, 11. . ., इत्यादि के लिए भी वही प्रक्रिया दोहराते हैं जब तक की भागफल 1 प्राप्त नहीं हो जाता।

उदाहरण (Example) 1 आइए 24 के अभाज्य गुणनखंड निकालें।

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

24 = 2 X 2 X 2 X 3

अतः 24 के अभाज्य गुणनखण्ड 2,2,2,3 है।

उदाहरण 2 अब 30 के अभाज्य गुणनखंड निकालें।

2	30
3	15
5	5
	1

30 = 2 X 3 X 5

अतः 30 के अभाज्य गुणनखण्ड 2,3 एवं 5 हैं।

अभ्यास (Practice)

1. निम्न संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।
   (i) 16 (ii) 48 (iii) 60 (iv) 84

अभाज्य गुणनखंड निकालना तो आपने सीख लिया। आइए, अब किसी संख्या के सभी गुणनखंडों पर विचार करें।

उदाहरण 3. क्या 18, 108 का गुणनखंड है?

प्रथम विधि : यदि 18 , 108 का गुणनखंड हो तो 108 में 18 का भाग पूरी तरह चला जाना चाहिए।

18) 108 (6
– 108
0

अतः 108 का एक गुणनखंड 18 है ।

द्वितीय विधि : (I) 18 के अभाज्य गुणनखंड निकालिए।
(II) 108 के अभाज्य गुणनखंड प्राप्त कीजिए।

18 = 2x3x3
108 = 2x2x3x3x3

चूंकि 18 के अभाज्य गुणनखंडों में शामिल सभी संख्याएँ, 108 के अभाज्य गुणनखंडों में भी शामिल हैं इसलिए 108 का गुणनखंड 18 है।

उदाहरण 4. 18 के सभी गुणनखंड लिखिए।

विधि 1 : जैसा कि आप जानते हैं कि 18 में 1,18,2,3,6,9 इन सभी संख्याओं का भाग दिया जाये तो शेषफल शून्य (0) रहता है।

अतः 1,18,2,3,6,9, सभी 18 के गुणनखण्ड अथवा अपवर्तक है।

गुणनखंड को अपवर्तक भी कहते हैं।

विधि 2 : यहाँ 18 के सभी अपवर्तको को निम्न प्रकार से भी ज्ञात किया जा सकता है।

18 = 1 x 18

18 = 2 x 9

18 = 3 x 6

इस प्रकार 18 के सभी अपवर्तक होगें : 1, 2, 3, 6, 9, 18

उदाहरण 5. 60 के सभी गुणनखंडो को लिखिए।

हल : 60 = 1 x 60

= 2 x 30

= 3 x 20

= 4 x 15

= 5 x 12

= 6 x 10

अतः 60 के सभी गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 होंगे।

अभ्यास (Practice)

1. निम्नलिखित संख्याओं के सभी अपवर्तक लिखिये।

(i) 28 (ii) 36 (iii) 45 (iv) 72

इस विधि से गुणनखंड निकालने में आपको अधिक समय लग रहा है। आपको विभाज्यता की जांच के नियम मालूम नहीं हैं, जिसके कारण बिना भाग दिये आप यह नहीं बता सकते कि किसी संख्या में 3, 5 अथवा 7. . . ,इत्यादि का भाग जाएगा या नहीं। आइये, विभाज्यता पता करने के कुछ नियम सीखें।

विभाज्यता की जाँच के नियम (Verification Rule of Divisibility) :

(1) 2 से विभाज्यता की जाँच (Verification of Divisibility by 2)

यदि किसी संख्या के इकाई के अंक 0, 2, 4, 6, 8 हों तो वह संख्या 2 से पूर्णतः विभाजित होगी।

20, 62, 34, 26, 18 .... 2 से विभाज्य है।

21, 63, 33, 35, 17 .... 2 से अविभाज्य है।

यहाँ 18, 2 से विभाज्य है, आइए भाग देकर इसकी जाँच करें –

2) 18 (9

–18

0 2 से पूर्णतः विभाजित है।

2) 21 (10

– 2

01

– 00

1 2 से पूर्णतः विभाजित नहीं है।

(2) 3 से विभाज्यता की जाँच (Verification of divisibility by 3)

यदि किसी संख्या के सभी अंकों का योगफल 3 से विभाजित होता है तो वह संख्या तीन से विभाजित होगी ।

जैसे : 111111 में सभी अंकों का योग 1+1+1+1+1+1 = 6 है अतः संख्या 3 से विभाजित होगी।
इसी प्रकार 5112 में सभी अंकों का योग 9 है अतः संख्या 3 से विभाजित होगी।
412 में सभी अंकों का योग 7 है अतः संख्या 3 से विभाजित नहीं होगी।

(3) 6 से विभाज्यता की जाँच (Verification of divisibility by 6)

यदि कोई संख्या 2 तथा 3 से अलग–अलग विभाजित हो तो वह संख्या 6 से भी विभाजित होगी।
जैसे 216, 2 से विभाज्य है (इकाई अंक 6 है)
216,3 से विभाज्य है (अंको का योग 9 है)
अतः यह 6 से भी विभाज्य होगी।
इसी प्रकार 643212, 2 से विभाज्य है (क्योंकि इकाई का अंक 2 है।)
3 से विभाज्य है (क्योंकि अंको का योग 18 है।)
अतः संख्या 6 से भी विभाज्य होगी।

(4) 9 से विभाज्यता की जाँच

यदि किसी संख्या के अंकों का योग 9 से विभाज्य हो तो पूरी संख्या भी 9 से विभाज्य होगी।
जैसे 3663, 9 से विभाज्य है, क्योंकि (अंको का योग 3+6+6+3 = 18 है, जिसमें 9 का भाग पूरा–पूरा जाता है।)
1827, 9 से विभाज्य है (अंको का योग 18, 9 से विभाज्य हैं)
1227, 9 से विभाज्य नहीं है (अंको का योग 12, 9 से विभाज्य नहीं हैं)

(5) 5 से विभाज्यता की जाँच

यदि किसी संख्या में इकाई का अंक 0 अथवा 5 हों तो वह संख्या 5 से विभाज्य होगी।
जैसे : 1045 5 से विभाज्य है, क्योंकि इकाई का अंक 5 है।
940 5 से विभाज्य है, क्योंकि इकाई का अंक 0 है।

(6) 10 से विभाज्यता की जाँच

यदि किसी संख्या के इकाई का अंक शून्य हों तो वह संख्या 10 से विभाज्य होगी
जैसे : 1000, 10 से विभाज्य है (इकाई का अंक शून्य है)
2130, 10 से विभाज्य है (इकाई का अंक शून्य है)
5003, 10 से विभाज्य नहीं है (इकाई का अंक 3 है)

(7) 4 से विभाज्यता की जाँच

जब किसी संख्या के दहाई एवं इकाई के अंकों से बनी संख्या 4 से विभाजित होती है अथवा दहाई व इकाई के स्थान पर शून्य हो तो वह संख्या 4 से विभाजित होगी।
जैसे –
79412 में दहाई एवं इकाई के अंकों से बनी संख्या 12 है जो कि 4 से विभाजित है अतः संख्या 79412, 4 से विभाजित होगी।
1300, 4 से विभाजित है जिसमें दहाई व इकाई के अंक शून्य हैं।
413, 4 से विभाजित नहीं है क्योंकि 13 में 4 का भाग पूरा–पूरा नहीं जाता है।

(8) 8 से विभाज्यता की जाँच

यदि किसी संख्या के सैकड़ा, दहाई, इकाई वाले तीन अंकों की संख्या 8 से विभाजित हो।
या सैकड़ा, दहाई व इकाई के स्थान पर शून्य हो तो वह संख्या 8 से विभाज्य होगी।

31000, 8 से विभाज्य है। (इकाई, दहाई व सैकड़ा के अंक शून्य है)

1816, 8 से विभाज्य है। (816, 8 से विभाजित है।)

12317, 8 से विभाज्य नहीं है। (317, 8 से विभाजित नहीं है।)

(9) 7 से विभाज्यता की जाँच

किसी संख्या के अंतिम अंक का दुगुना कर शेष अंकों की संख्या से घटाइए तथा बची हुई संख्या पर पुनः यही प्रक्रिया दोहराइये जब तक 1 या 2 अंक की संख्या प्राप्त नहीं हो जाती यदि प्राप्त संख्या 7 से विभाजित हो तो दी गई संख्या भी 7 से विभाज्य होगी।

जैसे : 1729 में अंतिम अंक 9 है। 9 का दुगुना = 18

172 – 18 = 154 में अंतिम अंक 4 है। 4 का दुगुना = 8

15 – 8 = 7 अंतिम अंक 7 है। अतः 7 से विभाज्य है

क्या आप जानते हैं कि 1729 को **रामानुजन संख्या** भी कहा जाता है?

भारत के महान गणितज्ञ रामानुजन जब इंग्लैंड में थे। उस समय वह एक बार बहुत बीमार हो गये। उनसे मिलने इग्लैड के प्रो. हार्डी आए उनमें जो बातचीत हुई वह इस प्रकार है –

रामानुजन ने पूछा	–	आप कैसे आए?
प्रो. हार्डी	–	टैक्सी द्वारा
रामानुजन	–	टैक्सी का नम्बर क्या था?
प्रो. हार्डी	–	1729, कोई विशेष संख्या नहीं है।
रामानुजन	–	आप गलती पर हैं यह संख्या बहुत रूचिकर है यह एक मात्र ऐसी सबसे छोटी संख्या है जिसे दो संख्याओं के घनों के योगफल के रूप में दो विभिन्न तरीके से लिखा जा सकता है। अर्थात $1729 = 1^3+12^3 = 9^3+10^3$

(10) 11 से विभाज्यता की जाँच

किसी संख्या के विषम स्थानों के अंकों का योग निकालिए तथा सम स्थानों के अंकों का योग निकालिए। यदि विषम स्थानों के अंकों का योग तथा सम स्थानों के अंकों के योग का अंतर 0, 11 अथवा 11 का गुणज हों तो वह संख्या 11 से विभाजित होगी।

जैसे : 856592 के विषम स्थानों के अंकों का योग = 8+6+9 = 23

सम स्थानों के अंकों का योग = 5+5+2 = 12

दोनों योगों का अंतर = 23 - 12 = 11

अतः संख्या 11 से विभाज्य है।

उदाहरण 6.

जाँच कीजिए की क्या 805130425, 11 से विभाज्य है?

हल : संख्या 805130425 के

1. विषम स्थानों पर स्थित अंकों का योग = 8+5+3+4+5 = 25
2. सम स्थानों पर स्थित अंकों का योग = 0+1+0+2 = 3

योग का अंतर = 25 - 3

= 22, जो 11 से विभाजित है।

अतः संख्या 805130425 भी 11 से विभाजित होगी।

अभ्यास

1. जिस संख्या से दी गई संख्या विभाज्य है उसमें ✓ का निशान लगाइये।

Ø-	la[;k	ftul la[;k i.kZr% foHkkftr gks tk,									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2550	✓	✓	✓		✓	✓				✓
2	4914										
3	9432										
4	7332										
5	13310										
6	872										
7	1210										

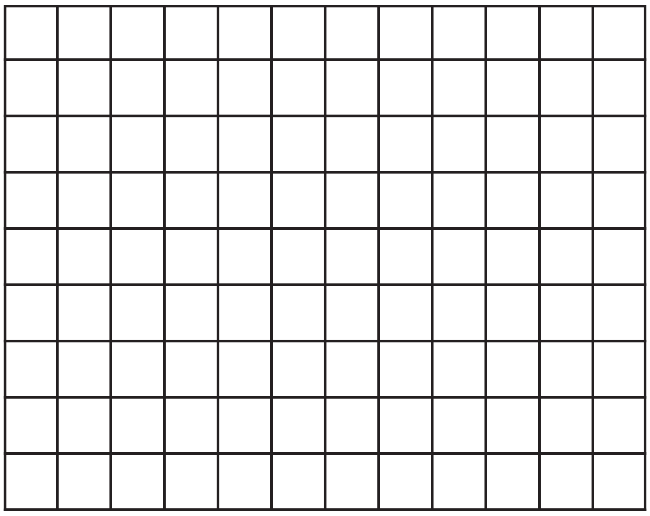
2. 27720 किन–किन संख्याओं से विभाज्य है? बताइए।
3. नीचे लिखे कथन सत्य हैं अथवा असत्य बताइए।
   (i) 78, 2 से विभाजित हो सकती है।
   (ii) 375 में 3, 5 व 10 का भाग पूरा–पूरा चला जाता है।
   (iii) जिस संख्या में इकाई का अंक 0 हों वह संख्या 5 से विभाजित होगी।
   (iv) किसी संख्या के सम स्थानों के अंकों का योग व विषम स्थानों के अंकों के योग का अन्तर यदि 0 हो तो वह संख्या 11 से भाज्य होगी।
   (v) संख्या 10080, क्रमशः 2,3,4,5,6,7,8,9 से पूर्णतः विभाजित है।

2ASHKS

महत्तम समापवर्तक (Highest common factor)

क्रियाकलाप 4

नीचे 12 फीट लम्बे तथा 9 फीट चौड़े कमरे को नापने के लिये एक लकड़ी का स्केल बनाना हैं। उस बड़े से बड़े स्केल की लम्बाई क्या होगी जिससे 12 फीट और 9 फीट दोनों को नापा जा सके।



12 फीट की लम्बाई आप किस–किस माप के स्केल से नाप सकते हैं ?

आप पायेंगे 1, 2, 3, 4, 6, 12 फीट लम्बी स्केल से 12 फीट की लम्बाई नापी जा सकती है, ये सभी 12 के गुणनखण्ड है।

उसी प्रकार 9 फीट की लम्बाई 1, 3 और 9 फीट लम्बे स्केल से नापी जा सकती है ये सभी 9 के गुणनखण्ड है। परन्तु ऐसे बड़े से बड़े स्केल की आवश्यकता है जो 12 फीट और 9 फीट दोनों को नाप सके। यह 12 और 9 का सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड अर्थात् "3" होगा।

चूंकि यह सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड (अपवर्तक) है, इसलिए इसे हम **महत्तम समापवर्तक** (H.C.F.) भी कहते हैं।

आइए अपवर्तक (गुणनखंड) की सहायता से एक से अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करें।

उदाहरण 7.

48 के सभी गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 48

64 के सभी गुणनखंड 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64

72 के सभी गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 72

उपरोक्त सभी उभयनिष्ठ गुणनखंडों पर घेरा लगाइए आप देखेगे 48, 64,72 के सम अपवर्तक 1, 2, 4, 8, है। इनमें सबसे बड़ा अपवर्तक 8 है

अतः 48, 64, 72 का म. स. 8 है।

दो या दो से अधिक संख्याओं के समअपवर्तकों में से सबसे बड़ा सम अपवर्तक उन संख्याओ का महत्तम समापवर्तक (म. स.) कहलाता है।

म. स. = सबसे बड़ा समान गुणनखंड।

म. स. ज्ञात करने की विधियाँ (Method of Determining the H.C.F)

1. अभाज्य गुणनखंड विधि से (prime factor method)

उदाहरण 8. 24, 36, 60 का म. स. ज्ञात कीजिए।

24

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

24 = 2 x 2 x 2 x 3

36

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

36 = 2 x 2 x 3x 3

60

2	60
2	30
3	15
5	5
	1

60 = 2 x 2 x 3 x 5

अतः 24, 36, 60 का उभयनिष्ठ गुणनखंड

24 = 2 x 2 x 2 x 3

36 = 2 x 2 x 3 x 3

60 = 2 x 2 x 3 x 5

म.स. = 2 x 2 x 3 = 12

2. अपवर्तक विधि (factorisation method)

24 के अपवर्तक 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

36 के अपवर्तक 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

60 के अपवर्तक 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

अतः 24, 36, 60 के समअपवर्तक 1, 2, 3, 4, 6, 12

सबसे बड़ा सम अपवर्तक = 12

म. स. = 12

3. भाग विधि से म. स. ज्ञात करना (Division Method)

भाग विधि से म.स. दो तरीके से ज्ञात किया जा सकता है –

प्रथम विधि :

उदाहरण 9. 16 तथा 36 का म. स. ज्ञात कीजिए?

$$\begin{array}{r|l} 2 & 16,\ 36, \\ \hline 2 & 8,\ 18 \\ \hline & 4,\ 9 \end{array}$$

चरण

1) सबसे छोटी अभाज्य संख्या 2 से 16 एवं 36 को भाग देने पर ।
2) 2 से 8 एवं 18 को भाग देने पर।
3) चूंकि किसी एक ही अभाज्य संख्या से 4 एवं 9 को भाग देना संभव नहीं है।

इसलिए जिन अभाज्य संख्याओं से दी गई सभी संख्याओं में एक साथ भाग जाता है उनका गुणनफल ही म.स. होगा

16 और 36 का महत्तम समापवर्तक 2 **x** 2 **=** 4

उदाहरण 10. 60, 90, 210 का महत्तम समापवर्तक भाग विधि से ज्ञात कीजिए ?

$$\begin{array}{r|l} 2 & 60,\ 90,\ 210 \\ \hline 3 & 30,\ 45,\ 105 \\ \hline 5 & 10,\ 15,\ 35 \\ \hline & 2,\ \ 3,\ \ 7 \end{array}$$

चरण

1) 2 से 60, 90, 210 को भाग देने पर ।
2) 3 से 30, 45, 105 को भाग देने पर।
2) 5 से 10, 15, 35 को भाग देने पर।
4) चूंकि किसी अन्य अभाज्य संख्या से 2, 3 एवं 7 को भाग देना संभव नहीं है।

अतः 60,90,210 का म.स. 2 x 3 x 5 = 30

द्वितीय विधि :

इस विधि से म.स. ज्ञात करने के लिए छोटी संख्या का भाग बड़ी संख्या में तब तक दीजिए जब तक कि शेषफल भाजक से छोटी न आ जाए। अब भाजक को भाज्य व शेषफल को भाजक मानकर हल करें। यह क्रिया तब तक करते रहिए जब तक कि शेषफल शून्य न आ जाए। जिस भाजक से भाग देने पर शेषफल शून्य होगा वही म.स. हैं।

उदाहरण 11. 15 एव 63 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए ?

15) 63 (4
– 60
3

3) 15 (5
- 15
0

अतः 15 व 63 का म.स. 3 है।

उदाहरण 12. वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 18 और 55 को भाग देने पर क्रमशः 2 और 3 शेष बचे।

हल : चूंकि 18 को भाग देने पर 2 शेष बचता है अतः संख्या = 18 – 2 = 16 है

उसी प्रकार दूसरी संख्या = 55 – 3 = 52 है।

16 और 52 का म.स. निकालने पर –

```
16 ) 52 ( 3
   - 48
      4 ) 16 ( 4
         - 16
            0
```

16 व 52 का म.स. 4 प्राप्त हुआ।

महत्तम समापवर्तक की विशेषताएं (Properties / Characteristics of Highest Common Factors)

आइये, महतम समापवर्तक की विशेषताओं को उदाहरणों के द्वारा समझे।

उदाहरण 13. 15, 60 का म. स. निकालिए।

चूंकि 15 से 60 पूर्णतः विभाजित होता है।

अतः 15 तथा 60 का म. स. 15 होगा।

उदाहरण 14.

12, 36 का म. स. निकालिए।

चूंकि 12,से 36 पूर्णतः विभाजित होता है।

अतः 12 तथा 36 का म.स. 12 होगा।

उदाहरण 15.

20, 40 का म. स. निकालिए।

चूंकि 20,से 40 पूर्णतः विभाजित होता है।

अतः 20 तथा 40 का म. स. 20 होगा।

उदाहरण 16.

15 और 16 में 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नही है।

अतः 15 एवं 16 का म. स. 1 होगा।

इसी प्रकार, 13 और 17 में 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

अतः 13 एवं 17 का म. स. 1 होगा ।

इससे यह स्पष्ट होता है कि –

1) यदि दो संख्याओ में बड़ी संख्या छोटी संख्या से पूरी तरह विभाजित होती है तो छोटी संख्या दोनों संख्याओ का म. स. होगी।

2) ऐसी संख्याएँ जिनका 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं होता उन संख्याओं का म.स. 1 होता है।

प्रश्नावली (EXERCISE) 6.1

1. अभाज्य गुणनखंड विधि से महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

   (i) 120, 204 (ii) 144, 198

   (iii) 150, 140, 210, (iv) 108, 135,162

2. भाग विधि से महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

   (i) 252, 576 (ii) 300, 450

   (iii) 72, 96, 144 (iv) 120, 300, 105

3. दो क्रमागत संख्याओं का महत्तम समपवर्तक क्या होगा?

4. निम्न से प्रत्येक भिन्न को उसके हर और अंश में उनके महत्तम समापवर्तक से भाग देकर सरल रूप में लिखिए।

(i) 1444 / 256 (ii) 2211 / 3025

5. दो छोटे टेंकरों में क्रमशः 85 और 68 लीटर पेट्रोल आता है। उस मापने वाले बर्तन की अधिकतम धरिता ज्ञात कीजिए जिससे प्रत्येक टेंकर का पेट्रोल पूरा–पूरा मापा जा सके।

6. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 389, 436 और 542 को भाग देने पर क्रमशः 4, 7, और 3 शेष बचे।

7. एक विद्यालय की कक्षा 6, 7, 8 में क्रमशः 220, 176 तथा 132 छात्र हैं। अधिक से अधिक छात्रों के समूह बनाएँ जो प्रत्येक कक्षा में बन सके तथा प्रत्येक समूह में छात्रों की संख्या समान हो।

8. हमीदा के पास 527 सेब, 646 चीकू व 748 संतरे है। इन्हें बराबर–बराबर फलों के ढेरों में रखना है। बड़े से बड़े ढेर में कितने फल होंगे? कुल कितने ढेर बनेंगे?

9. एक आयातकार कमरे की बाहरी लम्बाई 122 मी एवं चौड़ाई 92 मी है यदि दीवार की मोटाई 1 मीटर हो तो उस बड़े से बड़े स्केल की लम्बाई ज्ञात करो जो आंतरिक भाग की लम्बाई व चौड़ाई को पूर्णतः नाप सके ।

संकेत : आंतरिक लम्बाई = 122 – 2 = 120, आंतरिक चौड़ाई = 92 – 2 = 90

(120 एवं 90 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए)

गुणज (Multiple)

पिछली कक्षाओं में आप ने पहाड़ा तो पढ़ा ही होगा। पहाड़ा का उपयोग गुणा करने व भाग देने में भी आपने किया है।

आप जानते हैं कि 7 X 3 = 21 होता है, अर्थात् 7 व 3 दोनों का एक गुणज 21 है।

दो के पहाड़े में जो संख्याएँ आती है वे सभी दो के गुणज हैं इसी प्रकार 13,26,39,52,65,78. . . , इत्यादि सभी 13 के गुणज होंगे।

क्रियाकलाप 5.

नीचे कुछ संख्याएँ दी गई है, उनके प्रथम 5 गुणजों को दिये गये बॉक्स में लिखिए।

4 के गुणज :	4	8	12	16	20
7 के गुणज :					
12 के गुणज :					
15 के गुणज :					
16 के गुणज :					
20 के गुणज :					

3JUALG

लघुतम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple)

दैनिक जीवन में हमें मिलने वाले कुछ उदाहरणों पर चर्चा करें –

उदाहरण 17. राम फल खरीदने बाजार गया। वहाँ दुकानदार ने उसे दो तरह के केले बताये। पहले तरह के केले 10 रूपये के 6 थे व दूसरी तरह के 10 रूपये के 8 केले थे। राम दस–दस रूपये के नोट दे कर बिना खुदरा किए दोनों तरह के केले समान संख्या में खरीदना चाहता है। बताइए वह दोनों तरह के कितने केले खरीद सकता है।

हल : इसके लिए हम 6 व 8 के गुणज लिखेंगे।

6 के गुणज – 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78

8 के गुणज – 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72 ....

इसका मतलब यह है कि पहले तरह के 6,12,18,24 .... केले वह दस–दस रूपये के क्रमशः एक, दो, तीन, चार .... नोट देकर बिना खुदरा किए खरीद सकता है।

इसी तरह वह दूसरी तरह के 8,16,24 .... केले बिना खुदरा किए खरीद सकता है। एक ही संख्या में खरीदने के लिए उसे दोनों में आनी वाली संख्या के केले खरीदने होंगे। अर्थात् 6 व 8 के गुणज में जो संख्या समान है, उनको लेना होगा।

यह संख्या हैं 24, 48, 72, ...

समान संख्या में केले खरीदने के लिए राम 24, 48 व 72 .... केले खरीद सकता है।

आइए, एक और उदाहरण देखें।

उदाहरण 18. एक दुकानदार अपनी दुकान के लिए थोक में पेन खरीदने जाता है। उसे दो तरह के पेन पसंद आते है। पहले प्रकार के पेन के एक पैकेट में 12 पेन हैं तथा दूसरे प्रकार के पेन के पैकेट में 15 पेन हैं। थोक दुकानदार पैकेट खोलकर पेन नहीं बेचता है। क्या आप बता सकते है कि उसे कम से कम कितने पैकेट खरीदने चाहिए जिससे खरीदे गए दोनों प्रकार के पेनों की संख्या समान हो?

आइये इस प्रश्न को निम्न सारणी के माध्यम से हल करें।

सारणी

idV e iuk dh l[;k	dy iuk dh l[;k				
	1 idV e	2 idV e	3 idV e	4 idV e	5 idV e
12	12	24	36	48	60
15	15	30	45	60	75

इस प्रकार आप देख रहे है कि 12 पेन वाले पैकेट यदि 5 खरीदें जावे तो 60 पेन होंगे और 15 पेन वाले पैकेट यदि 4 खरीदें जावे तब 60 पेन होंगे।

उपरोक्त प्रश्न को हल करते समय आपने 12 और 15 के गुणज निकाले हैं तथा जो उभयनिष्ठ गुणज **सबसे छोटा** है वही चाहा गया उत्तर है।

गुणज को **''अपवर्त्य''**भी कहते हैं इसलिए सबसे छोटे उभयनिष्ठ गुणज को **लघुतम सम अपवर्त्य** या **लघुतम समापवर्त्य** कहते हैं। इसे संक्षेप में **ल.स.(L.C.M.)** भी कहते हैं।

क्या आप 10,12 और 15 का सबसे छोटा उभयनिष्ठ गुणज या लघुतम समापवर्त्य प्राप्त कर सकते है?

10 के गुणज लिखिए = ...

12 के गुणज लिखिए = ... ,

15 के गुणज लिखिए = ...

सबसे छोटा उभयनिष्ठ गुणज या लघुतम समापवर्त्य = ...

नीचे दी गई सारणी में दी गई संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए :

सारणी

क्रम सं.	संख्याएँ	संख्याओं के गुणज या अपवर्त्य	ल0 स0
1	3, 5, 6,	3 के अपवर्त्य = 3,6,9,12,15,18,21,24,27,30 5 के अपवर्त्य = 5,10,15,20,25,30,35,40,45,50 6 के अपवर्त्य = 6,12,18,24,30,36,42,48,54,60	30
2	4, 6, 9,		
3	4, 9, 12,		
4	6, 15, 18		

इस प्रकार यह कह सकते हैं कि

(1) वह अपवर्त्य जो दी गई संख्याओं का सबसे छोटा समान अपवर्त्य हो दी गई संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य कहलाता है।

(2) दो या दो से अधिक संख्याओं का ल.स. वह छोटी से छोटी संख्या है जिसमें दी गई प्रत्येक संख्या का पूरा–पूरा भाग चला जाता है।

ल. स. ज्ञात करने की विधियाँ (Methods of Determining L.C.M.)

(1) अभाज्य गुणनखंड विधि (Prime Factorisation Method)

उदाहरण 19. 16 और 24 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

2	16
2	8
2	4
2	2
	1

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

16 = 2 x 2 x 2 x 2 24 = 2 x 2 x 2 x 3

(II) सभी संख्याओं में सबसे छोटा अभाज्य गुणनखंड लें। यह गुणनखण्ड किसी भी संख्या में अधिक से अधिक जितनी बार आया हो उसे उतनी बार लिखिए।

(III) उससे बड़े अभाज्य गुणनखंड को चुनिए और उसे भी अधिक से अधिक जितनी बार किसी संख्या में वह आया हो उतनी बार लिखिए।

(IV) इसी प्रकार सभी अभाज्य गुणनखंडो को लिख कर गुणा करके ल.स. ज्ञात किया जाता है।

16 = 2 x 2 x 2 x 2

24 = 2 x 2 x 2 x 3

सबसे छोटा अभाज्य गुणनखंड 2, अधिकतम 4 बार 16 में आया है।

उससे बड़ा अभाज्य गुणनखंड 3 अधिकतम एक बार 24 में आया है।

16 और 24 का ल. स. = 2 x 2 x 2 x 2 x 3 = 48

(2) भाग विधि द्वारा (The Division Method)

उदाहरण 20. 12,16,24, का ल. स. ज्ञात कीजिए।

2	12, 16, 24	2 का भाग तीन संख्याओं में जाता है।
2	6, 8, 12	2 का भाग तीन संख्याओं में जाता है।
2	3, 4, 6	2 का भाग दो सख्याओं में जाता है।
2	3, 2, 3	2 का भाग एक संख्याओं में जाता है।
3	3, 1, 3	3 का भाग दो संख्याओं में जाता है।
	1, 1, 1	समस्त भाजक संख्याओं का गुणनफल ही ल.स. है।

12,16 और 24 का ल.स. = 2 x 2 x 2 x 2x 3 = 48

दो संख्याओं के गुणनफल तथा ल.स. एवं म.स. के मध्य संबंध

उदाहरण 21. मान लीजिए दो संख्याएँ 12 और 16 है।

आइये, दोनों संख्याओं का गुणा करके देखें जहाँ प्रथम संख्या 12 व द्वितीय संख्या 16 है।

दोनों संख्याओं का गुणा = प्रथम संख्या x द्वितीय संख्या

= 12 x 16

= 192

अब दोनों संख्याओं का म.स. व ल.स. भी ज्ञात करते हैं।

म. स.

2	12, 16
2	6, 8
	3, 4

म .स. = 2 x 2 = 4

ल.स.

2	12, 16
2	6, 8
2	3, 4
2	3, 2
3	3, 1
	1, 1

ल.स. = 2 x 2 x 2 x 2x 3 = 48

अर्थात् म.स. x ल.स. = 4 x 48 = 192

दोनों स्थितियों में गुणनफल समान प्राप्त होता है, अतः यह कह सकते है कि –

प्रथम संख्या × द्वितीय संख्या = म. स. × ल. स.

अर्थात् **दो संख्याओं का गुणनफल = उनका म.स. × उनका ल.स.**

क्रियाकलाप 6:

सारणी में दी गई संख्याओं का ल.स. व म.स. निकाल कर ऊपर दिये गये सम्बन्ध की जाँच कीजिए।

सारणी

प्रथम सख्या	द्वितीय संख्या	म. स.	ल.स.	म.स. x ल.स.	प्रथमसंख्या x द्वितीय संख्या
6	8	2	24	2 x 24 = 48	6 x 8 = 48
4	9				
30	36				
42	48				
108	18				

आप यह भी पाते हैं कि दो संख्याओं का म.स. उनके ल.स. का एक गुणनखण्ड है।

2LHUZP

प्रश्नावली (EXERCISE) 6.2

मौखिक प्रश्न

1. दो संख्याओं का म. स. 2 और ल. स. 12 है। यदि एक संख्या 6 है तो दूसरी संख्या क्या होगी?
2. दो संख्याओं का गुणनफल 338 है इनके म.स. एवं ल. स. का गुणनफल बताइये?
3. 2, 6, 8 का लघुतम समापवर्त्य बताइए?
4. 7 और 14 का ल. स. 7 से बड़ा है। या छोटा?
5. 15 और 30 का ल. स. क्या 30 से कम हो सकता है ?

लिखित प्रश्न

1. लघुतम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए (गुणनखंड विधि से)

   (i) 14, 28 (ii) 108, 162 (iii) 12, 15, 45 (iv) 40, 36, 126
2. लघुतम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए (भाग विधि से)

   (i) 28, 56 (ii) 112, 168 (iii) 36, 45, 72 (iv) 180, 184, 144
3. 55 मीटर लम्बे एवं 22 मीटर चौड़े मैदान में वर्गाकार दरियां बिछानी है एक ही नाप की कम से कम बिछाई जाने वाली दरियों की संख्या ज्ञात कीजिए? (संकेत – म.स. ज्ञात करें)
4. 6 घंटियाँ एक साथ बजना प्रारंभ हुई यदि वे क्रमशः 2, 4, 6, 8, 10, 12 सेकेंड के अंतराल में बजती है तो 30 मिनट में कितनी बार इकट्ठी बजेगी? (संकेत – ल.स. ज्ञात करें)
5. एक व्यापारी हर चौथे दिन रायपुर जाता है जबकि दूसरा व्यापारी हर 10 वें दिन। वे दोनों यदि 3 जनवरी को एक साथ रायपुर गये हों तो अगली तिथि बताइए जब वे पुनः रायपुर में एक साथ पहुंचेंगे?
6. दो संख्याएँ 24 एवं 36 है यदि उनका म.स. 12 हो तो उनका ल. स. ज्ञात कीजिए?
7. यदि दो संख्याओं का म. स. 13 ल.स. 1989 है। यदि उनमें से एक संख्या 117 हो तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए?
8. शशांक नित्य 4.65 रुपये बचाता है। कम से कम कितने दिनों में वह रुपयों की पूरी – पूरी संख्या बचा सकेगा?

   संकेत – 4.65 में 4 रु. पूर्णांक में है अतः 65 पैसे और 100 पैसे का लघुतम समापवर्त्य ज्ञात करें एवं प्राप्त ल. स. में 65 पैसे का भाग देने पर पूर्ण दिनों की संख्या प्राप्त होगी जो बचत की पूरी राशि रुपये में व्यक्त करेगा।
9. क्या दो संख्याओं का म. स. 14 और ल. स. 204 हो सकता है। अपने उत्तर के पक्ष में तर्क दीजिए?
10. किसी दिन रतनपुर से रायपुर की बसें 40 मिनट के अंतराल से और रायपुर से रतनपुर की 45 मिनट

के अंतराल में चलती है। यदि विपरीत दिशा से आने वाली दो बसें किसी विशेष पुल से 10.15 बजे प्रातः गुजरती है तो उसके बाद उस पुल से दो विपरीत दिशा की बसें किस समय गुजरेंगी?

संकेत : 40 और 45 का ल. स. 360 मिनट

360/60 = 6 घंटे

10.15 + 6.00 = 16.15

16.15 – 12.00 = 4.15 शाम

हमने सीखा (We Learnt)

1. किसी संख्या का गुणनखंड उस संख्या को पूर्णतया विभाजित करती है।
2. किसी संख्या का गुणज उस संख्या से पूर्णतया विभाजित होती है।
3. प्रत्येक संख्या स्वयं का गुणज एवं गुणनखंड होती है।
4. 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखंड होता है जो कि न अभाज्य है न ही भाज्य।
5. केवल 2 ही सम अभाज्य संख्या है।
6. दो या दो से अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक बड़ा से बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखंड होता है।
7. लघुतम समापवर्त्य वह छोटा से छोटा उभयनिष्ठ गुणज होता है जो दी गई सभी संख्याओं का गुणज है।
8. दो संख्याओं का गुणनफल उनके महत्तम समापवर्तक तथा लघुतम समापवर्त्य के गुणनफल के बराबर होता है।
9. 2 के सभी गुणज सम संख्याएँ कहलाती है।
10. संख्याएँ, जो 2 के गुणज नहीं है वे विषम संख्याएँ कहलाती है।
11. दो संख्याओं का म. स. उनके ल. स. का एक गुणनखंड होता है।
12. संख्याओं का महत्तम समापवर्तक संख्याओं से बड़ा नहीं हो सकता है।
13. संख्याओं का लघुतम समावर्त्य संख्याओं से छोटा नहीं हो सकता है।
14. ऐसी संख्याएँ जिनका केवल एक ही उभयनिष्ठ गुणनखण्ड (1) हो,सह अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।