त्रिभुजों की सर्वांगसमता

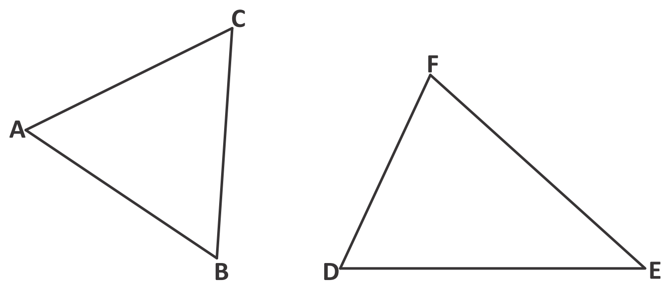
[CONGRUENCY OF TRIANGLES]

BKF1Q7

10

सर्वांगसमता क्या है?

चित्र–1 में त्रिभुजों को देखें। क्या ये एक जैसे हैं? एक त्रिभुज पर दूसरा त्रिभुज रखें तो क्या वे एक दूसरे को ढँक लेंगे? यहाँ तो हम देख सकते हैं कि ये एक जैसे नहीं है क्योंकि इनकी भुजाएँ एक बराबर नहीं हैं।



चित्र–1

कैसे पता लगेगा कि कोई दो आकृतियाँ एक–दूसरे को ढँक लेंगी अथवा नहीं? दिए गए दोनों त्रिभुजों के लिए ऐसा तभी होगा जब बिंदु A, बिंदु D पर, बिंदु B , बिंदु E पर तथा बिंदु C , बिंदु F पर पड़े और ऐसा तभी होगा जब त्रिभुजों की सभी भुजाएँ व सभी कोण बराबर हों। याने जब दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हों।

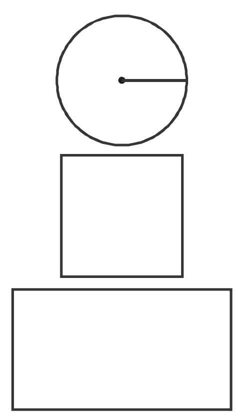
सर्वांगसम होने का अर्थ है सभी अंगों का समान होना। ऐसी आकृतियाँ जिनके सभी अंग समान होते हैं, एक–दूसरे को पूरी तरह से ढँक लेती हैं।

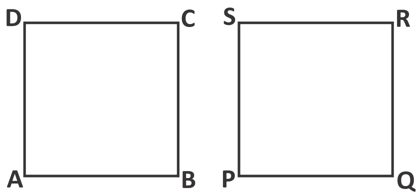
त्रिभुजों के संदर्भ में सभी अंग समान होने का अर्थ है सभी भुजाओं एवं कोणों का दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं एवं कोणों के समान होना। इसी तरह हम चतुर्भुज, पंचभुज आदि में सर्वांगसमता की बात कर सकते हैं। परन्तु क्या दो आकृतियों की सर्वांगसमता के लिए उनके सभी अंगों की समानता की जाँच करना आवश्यक है? अथवा किन्हीं विशेष परिस्थितियों में कुछ अंगों को देखकर भी उन्हें सर्वांगसम कह सकते हैं?

वृत्त, वर्ग और आयत

जैसे वर्ग में चार भुजाएँ व चार कोण होते हैं, प्रत्येक भुजा बराबर एवं प्रत्येक कोण 90° का होता है। दो वर्गों की एक भुजा ही समान हो तब हम कह देंगे कि दोनों वर्ग सर्वांगसम हैं और दोनों एक–दूसरे को पूरी तरह से ढँक लेंगे।

लेकिन एक आयत की एक भुजा दूसरे आयत की संगत भुजा के समान हो तो क्या वे भी सर्वांगसम होंगे? जाहिर है ऐसा नहीं होगा। जब दोनों आसन्न भुजाएँ दूसरे आयत की संगतभुजाओं के समान हों तभी दोनों आयत सर्वांगसम होंगे। वृत्तों में तो सिर्फ त्रिज्या समान होने पर ही वे एक–दूसरे को ढँक लेंगे।


चित्र–2

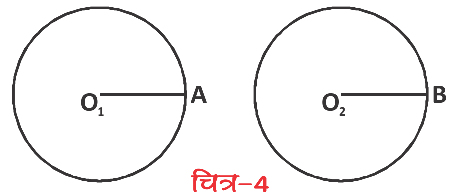


चित्र-3

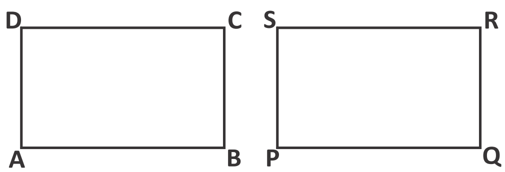
संक्षेप में–

1. दो वर्ग ABCD और PQRS सर्वांगसम होते हैं यदि AB = PQ.

2. दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी त्रिज्या समान हों। याने $O_1A = O_2B$



चित्र-4



चित्र-5

3. इसी प्रकार दो आयत सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी संगत आसन्न भुजाओं के माप बराबर हों। याने AB = PQ, AD = PS.

क्या हम त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कुछ शर्तें ढूँढ सकते हैं? इस अध्याय में हम इसी बात की पड़ताल करेंगे।

त्रिभुजों की सर्वांगसमता (Congruency of Triangle)

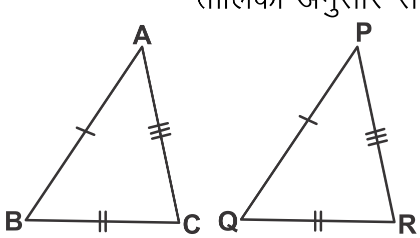
ज्यामिति में त्रिभुज सबसे कम रेखाखण्डों से बनी बंद आकृति है।

सभी बहुभुज त्रिभुजों से ही बने होते हैं, इसलिए त्रिभुजों की सर्वांगसमता पहचानना बहुभुजों की सर्वांगसमता जाँचने के लिए उपयोगी है।

हम जानते हैं कि दो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे यदि उनकी संगत भुजाओं व संगत कोणों के माप बराबर हों।

त्रिभुजों के अवयवों में संगतता (Corresponding Part of Congruent Triangle)

दो त्रिभुज ABC और PQR देखें, इसमें यदि AB को PQ के संगत माने तो बाकि अंग नीचे तालिका अनुसार संगत हैं।



चित्र-6

संगत भुजाएं	संगत कोण	शीर्ष
$AB \leftrightarrow PQ$	$\angle A \leftrightarrow \angle P$	$A \leftrightarrow P$
$BC \leftrightarrow QR$	$\angle B \leftrightarrow \angle Q$	$B \leftrightarrow Q$
$AC \leftrightarrow PR$	$\angle C \leftrightarrow \angle R$	$C \leftrightarrow R$

$\leftrightarrow$ चिह्न संगतता को प्रदर्शित करता है व $\cong$ चिह्न सर्वांगसमता का संबंध बताता है।

यदि दो त्रिभुज ΔABC तथा ΔPQR सर्वांगसम हैं याने $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, तो $AB = PQ$, $BC = QR$, $AC = PR$, $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$

$\Delta BCA \cong \Delta QRP$ या इसे $\Delta CAB \cong \Delta RPQ$ भी लिख सकते हैं।

हम जानते हैं कि ΔABC और ΔBCA अथवा ΔCAB एक ही हैं। ΔBCA को ΔQRP के सर्वांगसम लिख सकते हैं। परन्तु हम इसे इस प्रकार नहीं लिख सकते–

$\Delta ABC \cong \Delta RQP$ या $\Delta BCA \cong \Delta RPQ$ (क्यों?)

त्रिभुजों की सर्वांगसमता में शीर्षों व कोणों के क्रम को सही प्रकार से लिखना आवश्यक है।

सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भागों के लिए संक्षेप में स.त्रि.स.भ. लिखा जाता है जिसे CPCT $\rightarrow$ (Corresponding Part of Congruent Triangle) कहते हैं।

कैसे जाँचें त्रिभुजों की सर्वांगसमता

क्या सर्वांगसमता पहचानने के लिए त्रिभुजों के सभी अंगों की बराबरी दिखाना जरूरी है? हम आगे त्रिभुज की सर्वांगसमता की कसौटियों को गणितीय तरीके से पता करने का प्रयत्न करते हैं–

(i) **भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता (SAS Congruence)**– ''दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनका अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हों।''

(ii) **कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता (ASA Congruence)** : दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज के दो कोण व उनके बीच की भुजा दूसरे त्रिभुज के संगत कोणों व उनके बीच की भुजा के बराबर हो।

(iii) **भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता (SSS Congruence)** : दो त्रिभुज में यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हों तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

इन तीन स्वयं सिद्ध अभिधारणाओं की कसौटियों का उपयोग करते हुए हम त्रिभुजों में सर्वांगसमता पहचान सकते हैं और इनके आधार पर कुछ और नई कसौटियाँ पता कर सकते हैं। लेकिन पहचान तभी होगी जब इन्हें प्रमेय की तरह सिद्ध कर सकेंगे।

अभिगृहीत, अभिधारणा व प्रमेय (Axiom, Postulate and Theorem)

गणित सीखते समय हम अक्सर कुछ शब्द पढ़ते हैं। जैसे अभिगृहीत, अभिधारणा, प्रमेय, उपपत्ति। इन शब्दों को संक्षेप में समझते हैं–

अभिगृहीत और अभिधारणा : दोनों स्वयं सिद्ध होते हैं, इन्हें सत्य मानकर आगे बढ़ा जाता है और नये कथनों को रचा व सिद्ध किया जाता है। आमतौर पर तार्किक स्वयं सिद्ध कथन सभी विषयों में इस्तेमाल किए जाते हैं, इन्हें हम अभिगृहीत कहते हैं। जैसे– ज्यामिति में यूक्लिड के अभिगृहीत इस प्रकार के हैं– (1) यदि a, b के बराबर है, और a, c के भी बराबर है तो b भी c के बराबर होगा। (2) पूर्ण उसके किसी हिस्से से बड़ा होता है। ऐसे ही कुछ और अभिगृहीत लिए जाते हैं।

अभिधारणा : कुछ ऐसे स्वयं सिद्ध कथन जो किसी विशेष विषय से संबंधित हैं सामान्यतः अभिधारणा कहलाते हैं, हालांकि अभिधारणा व अभिगृहीत को अक्सर पर्यायवाची भी मान लिया जाता है। ज्यामिति से संबंधित कुछ

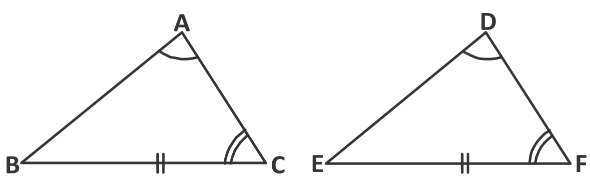
अभिधारणाएँ यह हैः दिए गए किन्हीं दो बिन्दुओं से एक रेखा खींची जा सकती है जिस पर वे दोनों बिन्दु होंगे या किसी भी रेखाखण्ड को अनन्त तक बढ़ाया जा सकता है।

प्रमेय और उपप्रमेय : वे ऐसे सभी गणितीय कथन जो इन सभी अभिगृहीतों, अभिधारणाओं और परिभाषाओं का उपयोग करते हुए तार्किक रूप से सिद्ध किए जाते हैं, प्रमेय कहलाते हैं। जैसे किसी त्रिभुज के अंतः कोणों का योग 180° होता है।

इस प्रकार अभिगृहीत, अभिधारणा और प्रमेयों का उपयोग करके कुछ और प्रमेय सिद्ध किए जाते हैं, इन्हें उपप्रमेय कहा जाता है। ज्यामिति में उपप्रमेय और प्रमेय में इतना स्पष्ट विभाजन नहीं है। यह भी कई बार एक–दूसरे के बदले उपयोग कर लिए जाते हैं।

(iv) कोण–कोण–भुजा सर्वांगसमता प्रमेय (AAS Congruence Theorem):

प्रमेय–10.1 : दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज के दो कोण तथा एक भुजा, दूसरे त्रिभुज के संगत कोणों तथा भुजा के बराबर हों।



चित्र–7

दिया है $\angle A \cong \angle D, \angle C \cong \angle F$

और $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

ΔABC और ΔDEF के दो कोण आपस में बराबर हैं तो तीसरा कोण भी बराबर होगा।

$\because \angle A = \angle D$ और $\angle C = \angle F$ (दिया है)

$\therefore \angle B = \angle E$ (त्रिभुज के अंतःकोणों का योग 180° होता है।)

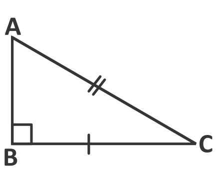
क्योंकि $\overline{BC}$ भुजा, कोण $\angle B$ और $\angle C$ के बीच है। हम यहाँ ASA सर्वांगसमता कसौटी का उपयोग करके ΔABC और ΔDEF के सर्वांगसम सिद्ध कर सकते हैं।

अतः $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ASA सर्वांगसमता)

(v) समकोण–कर्ण–भुजा सर्वांगसमता प्रमेय (Right Angle Hypotenuse Side Theorem):

प्रमेय–10.2 : दो समकोण त्रिभुजों में एक त्रिभुज का कर्ण व एक भुजा दूसरे त्रिभुज के कर्ण व संगत भुजा के बराबर हो तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

उपपत्ति : दिया है ΔABC और ΔDEF में $\angle B = \angle E = 90^\circ$ $AC = DF$ तथा $BC = EF$ सिद्ध करना है कि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ इसके लिए हमने DE को P तक इस प्रकार बढ़ाया कि $EP = AB$, PF को मिलाया।



चित्र–8

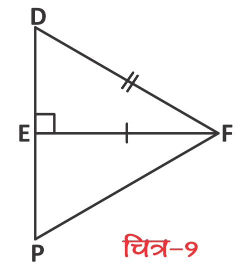
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PEF$

$\therefore \angle A = \angle P$ ... (1) C.P.C.T.

$AC = PF$ ...(2) C.P.C.T.

परंतु $AC = DF$ दिया है

$\therefore$ DF = PF तथा $\angle D = \angle P$ ... (3) (ΔDPF समान भुजाओं के सम्मुखकोण)



चित्र–9

समी. (1) और (3) से

$\angle A = \angle D$

पुनः ΔABC तथा ΔDEF में

BC = EF, AC = DF (ज्ञात है)

$\angle ACB = \angle DFE$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$

प्रमेय और स्वयं सिद्ध

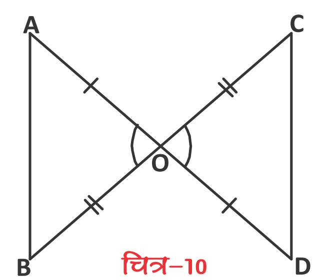
ज्यामिति में कुछ कथन ऐसे हैं जिन्हें प्रमेय या स्वयं सिद्ध माना जाए, निश्चित नहीं है। प्रमेय को सरल रूप से सिद्ध करने और ज्यामिति में तार्किक संबंधों को सरलता से समझने के लिए अभिगृहीतों का चयन अलग–अलग तरीके से किया जा सकता है। जैसे कुछ किताबों में AAS और ASA अभिगृहीत मानकर SSS प्रमेय सिद्ध किया गया है जबकि कुछ जगह AAS को अभिगृहीत मानकर ASA प्रमेय सिद्ध किया है।

इस पाठ्यपुस्तक में हम ASA, SAS और SSS को अभिधारणा (स्वयं सिद्ध) मानकर, AAS और RHS को प्रमेय के रूप में लेंगे।

सवालों को हल करने के तरीके को अलग–अलग ढंग से प्रदर्शित किया जा सकता है। कुछ इसी तरह के तरीकों का उपयोग आगे के उदाहरणों को हल करने में किया गया है।

उदाहरण–1. इस उदाहरण में हम SAS कसौटी का उपयोग करेंगे व उससे आकृति के बारे में पता करेंगे। आकृति में OA = OD और OB = OC है। सिद्ध कीजिए कि–

1. $\Delta AOB \cong \Delta DOC$
2. $AB \parallel CD$



चित्र–10

हल : 1. त्रिभुज ΔAOB और ΔDOC से–

OA = OD दिया हुआ है ..... (1)

$\angle AOB = \angle DOC$ (शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं) ..... (2)

OB = OC दिया हुआ है ..... (3)

समीकरण (1), (2) और (3) से सर्वांगसमता की तीनों शर्तें पूरी होती है।

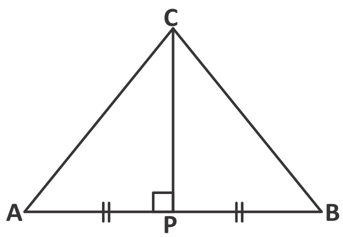
अतः सर्वांगसमता नियम से

$\Delta AOB \cong \Delta DOC$ सिद्ध हुआ

2. सर्वांगसम त्रिभुजों ΔAOB और ΔDOC में अन्य संगत भाग भी बराबर होंगे।

अतः $\angle OBA = \angle OCD$ है। चूंकि ये रेखा खण्डों AB और CD के लिए एकांतर कोणों का एक युग्म बनाते हैं। अतः इस उदाहरण में हम देख सकते हैं कि $AB \parallel CD$

उदाहरण–2. यदि ΔABC में $AP = PB$ और $CP \perp AB$ है तो सिद्ध कीजिए कि–



चित्र–11

1. $\Delta CPA \cong \Delta CPB$ और
2. $AC = BC$

हल : 1. ΔCPA और ΔCPB से

$AP = PB$ (दिया गया है) .....(1)

$\angle APC = \angle BPC = 90°$ (दिया गया है) .....(2)

$CP = CP$ (उभयनिष्ठ भुजा).....(3)

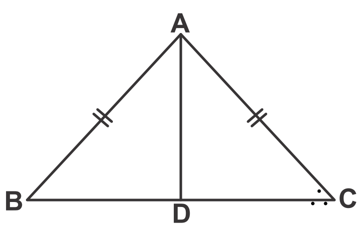
अतः SAS सर्वांगसमता से $\Delta CPA \cong \Delta CPB$

2. $\Delta CPA \cong \Delta CPB$ है तो $AC = BC$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भागों CPCT- Corresponding Part of Congruent Triangle)

उदाहरण–3. दिए गए त्रिभुज ABC में $AB = AC$ तथा AD, $\angle A$ का कोणार्द्धक है तो सिद्ध कीजिए कि–

$\angle B = \angle C$

हल :



चित्र–12

ΔABD तथा ΔACD में

$AB = AC$ (दिया है)

$\angle BAD = \angle CAD$ (दिया है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (SAS सर्वांगसमता से)

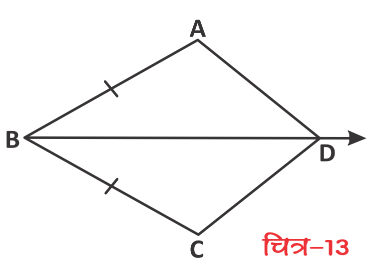
$\angle B = \angle C$ C.P.C.T. (स.त्रि.स.भ.)

उदाहरण–4. यदि $\overrightarrow{BD}$, $\angle ABC$ का समद्विभाजक है तथा $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ है तो भुजा कोण भुजा (SAS) सर्वांगसमता की सहायता से सिद्ध करें $\Delta ABD \cong \Delta CBD$

नीचे दिये गए चित्र से–

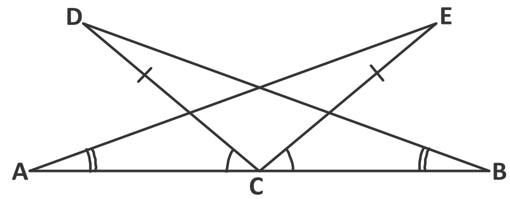
हल :

कथन	कारण
$AB = BC$	$\because \overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{BD}$, $\angle ABC$ का समद्विभाजक है	दिया है
$\angle ABD = \angle CBD$	कोण समद्विभाजक की परिभाषा से
$BD = BD$	उभयनिष्ठ भुजा
$\Delta ABD \cong \Delta CBD$	सर्वांगसमता से



चित्र–13

उदाहरण–5. चित्र में $AC = BC$, $\angle DCA = \angle ECB$ तथा $\angle DBC = \angle EAC$ सिद्ध कीजिए–
$\Delta DBC \cong \Delta EAC$ जिसमें $DC = EC$



चित्र–14

हल : $\because$ $AC = BC$ (दिया है)

$\therefore$ C, AB का मध्य बिंदु है

$\angle DCA = \angle ECB$ (दिया है)

दोनों पक्षों में $\angle DCE$ जोड़ने पर

$\angle DCA + \angle DCE = \angle ECB + \angle DCE$

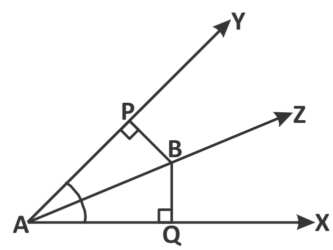
$\Rightarrow$ $\angle ACE = \angle BCD$

$\angle DBC = \angle EAC$ (दिया है)

$\therefore$ $\Delta DBC \cong \Delta EAC$ (ASA सर्वांगसमता से)

उदाहरण–6. किरण $\overrightarrow{AZ}$ कोण A को समद्विभाजित करती है और B किरण $\overrightarrow{AZ}$ पर स्थित कोई बिंदु है। BP और BQ कोण A की भुजाओं पर B से डाले गए लंब है दर्शाइये कि–

1. $\Delta APB \cong \Delta AQB$
2. $BP = BQ$ अर्थात् बिंदु B कोण की भुजाओं से समदूरस्थ है



चित्र–15

हल : दिया है $\overrightarrow{AZ}$, $\angle QAP$ का अर्द्धक है

$\therefore$ $\angle QAB = \angle PAB$

$\angle Q = \angle P = 90°$

$\Rightarrow$ $\angle ABQ = \angle ABP$

1. अब ΔAPB और ΔAQB में

$AB = AB$ उभयनिष्ठ

$\angle APB = \angle AQB = 90°$ प्रत्येक दिया है

$\angle PAB = \angle QAB$

$\therefore$ $\Delta APB \cong \Delta AQB$ (AAS सर्वांगसमता से)

2. $\because$ $\Delta APB \cong \Delta AQB$

$\therefore$ $BP = BQ$ ($\because$ संगत भाग बराबर होते हैं)

अर्थात् B की AP से लंबवत् दूरी = B की AQ से लंबवत् दूरी।

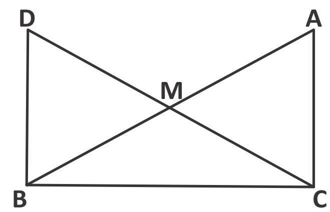
अतः बिंदु B, $\angle A$ की भुजाओं से समदूरस्थ है।

करके देखें

एक समकोण ΔABC में, कोण C समकोण है M कर्ण AB का मध्य बिंदु है। C को M से मिलाकर D तक इस प्रकार बढ़ाया कि $DM = CM$ है बिंदु D को B से मिला दिया दर्शाइये कि–

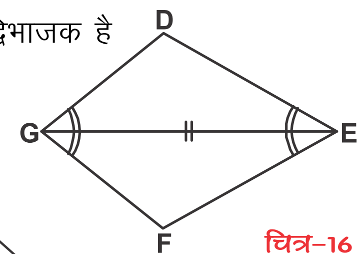
1. $\Delta AMC \cong \Delta BMD$ 2. $CM = \frac{1}{2} AB$

3. $\Delta DBC \cong \Delta ACB$ 4. $\angle DBC = 90°$ एक समकोण है



उदाहरण–7. दिया है GE, $\angle DGF$ तथा $\angle DEF$ का समद्विभाजक है

सिद्ध करना है– $\Delta GDE \cong \Delta GFE$



चित्र–16

हल :

कथन		कारण
GE समद्विभाजक है $\angle DGF$ का (दिया है)	→	$\angle DGE = \angle FGE$ (कोण समद्विभाजक की परिभाषा से)
GE समद्विभाजक है $\angle DEF$ का (दिया है)	→	$\angle DEG = \angle FEG$ (कोण समद्विभाजक की परिभाषा से)
		$GE = GE$ (उभयनिष्ठ भुजा)

→ $\Delta GDE \cong \Delta GFE$ (ASA सर्वांगसमता से)

उदाहरण–8. त्रिभुज XYZ में यदि $\angle Y = \angle Z$ तथा $\angle X$ की अर्धक XP हो तो सिद्ध कीजिये कि भुजा YZ का मध्य बिंदु P है तथा $XP \perp YZ$

हल : ΔXYP और ΔXZP में

$\angle Y = \angle Z$ दिया है

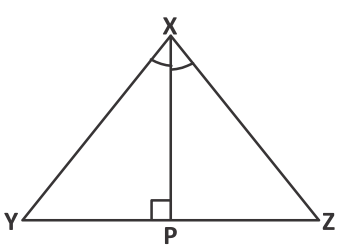
$\angle YXP = \angle ZXP$ (XP कोणार्धक दिया है)

$XP = XP$ उभयनिष्ठ भुजा

$\Delta XPY \cong \Delta XZP$ (AAS सर्वांगसमता)

$\therefore YP = PZ$ (CPCT से)

अतः P मध्य बिंदु है YZ का



चित्र–17

$\angle YPX = \angle ZPX$ (CPCT से)

$\therefore$ $\angle YPX + \angle ZPX = 180°$ (रेखीय युग्म)

$\angle YPX + \angle YPX = 180°$ ($\because \angle YPX = \angle ZPX$)

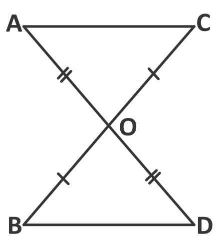
$\angle YPX = 90 = \angle ZPX$

$\therefore$ $XP \perp YZ$

करके देखें

सिद्ध कीजिये कि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण से बने दो त्रिभुज सदैव सर्वांगसम होते हैं।

प्रश्नावली – 10.1



1. चित्र में यदि $OA = OD$ तथा $OB = OC$ हो तो इनमें से कौनसा कथन सत्य है–

   a) $\Delta AOC \cong \Delta BDO$

   b) $\Delta AOC \cong \Delta DOB$

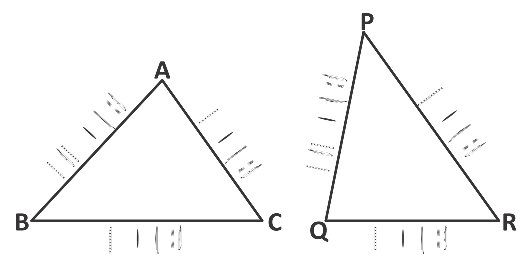
   c) $\Delta CAO \cong \Delta BOD$

2. दिये गये चित्र में ΔABC तथा ΔPQR को देखकर बताइये कि कौनसा कथन सत्य है–

   a) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

   b) $\Delta ABC \cong \Delta QPR$

   c) $\Delta ABC \cong \Delta PRQ$



3. निम्नलिखित में कौनसी सर्वांगसमता की कसौटी नहीं है–

   a) SSS b) SAS c) AAA

4. दो त्रिभुजों के सर्वांगसम होने के लिये दो संगत कोणों के समान होने के अतिरिक्त कम से कम संगत अवयवों का समान होना आवश्यक है?

   a) कोई संगत भुजा बराबर न हो

   b) कम से कम एक संगत भुजा बराबर हो

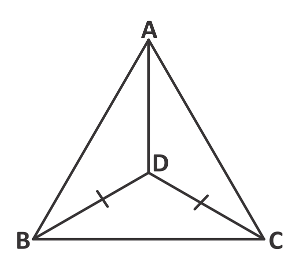
   c) तीसरे संगत कोण बराबर हो।

5. चित्र में $\angle B = \angle C$ तथा BD और CD क्रमशः इनके समद्विभाजक है तो $AB : AC$ होगा।

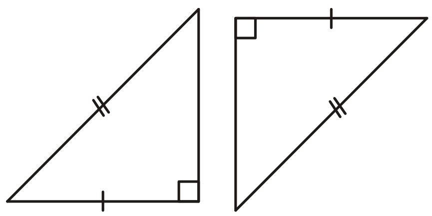
   a) 2 : 1

   b) 3 : 2

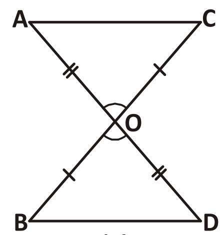
   c) 1 : 1



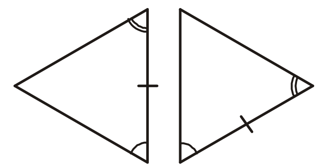
6. निम्न त्रिभुज के युग्मों को देखकर बताइये कि प्रत्येक चित्र में कौनसी सर्वांगसमता की कसौटी लागू होती है–



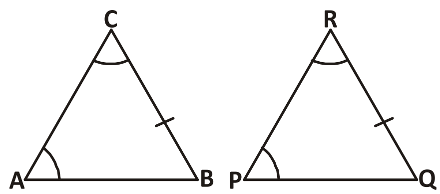
(i)



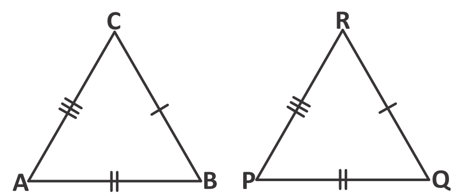
(ii)



(iii)



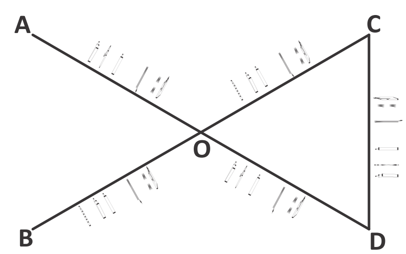
(iv)



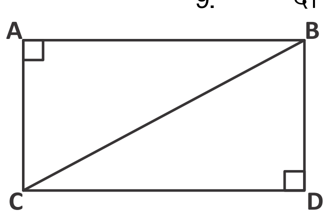
(v)

7. यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, $AC = 3x + 2$, $PR = 6x - 13$ तथा $BC = 5x$ तो QR का मान ज्ञात कीजिए।

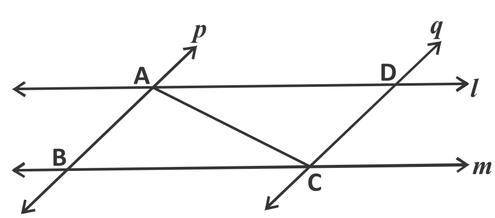
8. चित्र में दिये गये बिंदुओं की सहायता से कथनों को कारण सहित समझाते हुए AB के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।



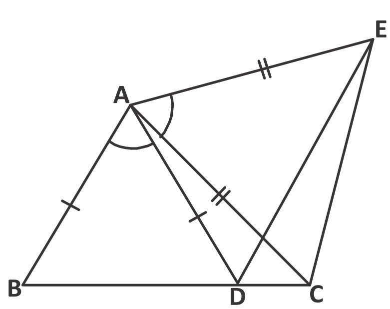
9. दो टीमों के दौड़ने के लिए विशेष व्यवस्था की गई है जिसमें एक टीम A से B तथा B से C तक दौड़ती है और C से पुनः A पर वापस आती है। इसी प्रकार दूसरी टीम C से दौड़ शुरू करती है तथा D से होते हुए B पर तथा B से पुनः C पर वापस आती है यदि $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ तथा $\angle A = \angle D = 90°$ है तो बताइये क्या दोनों टीमों द्वारा तय की गई मैदान की लंबाईयां समान होंगी? उत्तर की व्याख्या कीजिये।



10. l और m दो समांतर रेखाएं हैं जिन्हें समांतर रेखाओं p और q का एक अन्य युग्म प्रतिच्छेद करता है। दर्शाइये कि $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (इसे फ्लो चार्ट के द्वारा लिखिये)



11. चित्र में $AC = AE$, $AB = AD$ और $\angle BAD = \angle EAC$ है तो दर्शाइये कि $BC = DE$



समद्विबाहु त्रिभुज के गुण (Property of Isosceles Triangle)

अब तक हमने त्रिभुजों की सर्वांगसमता से संबंधित नियमों का अध्ययन किया। आइये इन नियमों का प्रयोग त्रिभुज के कुछ गुणों के अध्ययन में करें।

एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएं बराबर हो समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles) कहलाता है। आइए, समद्विबाहु त्रिभुज के गुणों को समझते हैं।

करके देखें

एक त्रिभुज की रचना कीजिये जिसकी दो भुजाओं का माप 4.5 सेमी. और अन्य भुजा 6 सेमी. की हो।

अब इन भुजाओं के सम्मुख बने कोणों को मापते हैं। क्या ये कोण बराबर हैं– हाँ

इसी प्रकार विभिन्न भुजाओं वाले अन्य समद्विबाहु त्रिभुज लेकर इस क्रियाकलाप को दोहराइये जिससे समद्विबाहु त्रिभुज का एक महत्वपूर्ण गुण प्रदर्शित होता है कि–

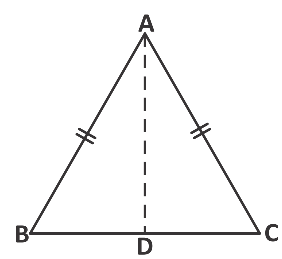
प्रमेय–10.3 : किसी भी बराबर भुजाओं वाले त्रिभुज में उनके सामने के कोण बराबर होते हैं।

आइए, इस गणितीय कथन को सिद्ध करते हैं।

हमने एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC लिया है जिसमें भुजा $AB = AC$ है

हमें सिद्ध करना है कि $\angle B = \angle C$

इसके लिए हम $\angle A$ का कोणार्द्धक खींचते हैं जो कि BC भुजा को बिंदु D पर मिलती है। (चित्र)



कोणार्द्धक खींचने से हमें दो त्रिभुज दिखाई पड़ते हैं।

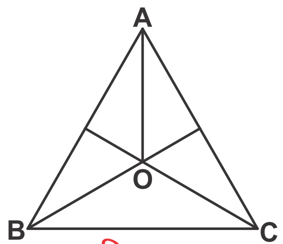
ΔBAD और ΔCAD को देखिये

इसमें	$AB = AC$	(दिया है)
	$\angle BAD = \angle CAD$	(रचना से)
	$AD = AD$	(उभयनिष्ठ भुजा)
इसलिए,	$\Delta BAD \cong \Delta CAD$	(भुजा कोण भुजा सर्वांगसमता नियम से)
इसलिए,	$\angle ABD = \angle ACD$	क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण हैं।

$\therefore \angle B = \angle C$

अतः यह कथन प्रत्येक समद्विबाहु त्रिभुज के लिए सत्य है, अब हम इसके विलोम पर विचार करते हैं।

प्रमेय–10.4 : (प्रमेय–10.3 का विलोम) यदि किसी त्रिभुज के दो कोण बराबर हों तो उनकी सम्मुख भुजाएँ भी बराबर होंगी।



चित्र–18

उदाहरण–9. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में AB = AC है, $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइये कि–

1. OB = OC
2. AO कोण A को समद्विभाजित करता है।

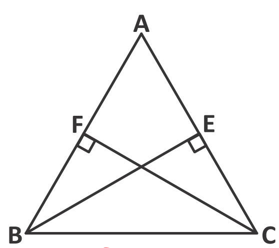
हल : 1. ΔABC में

कथन	कारण
AB = AC	दिया है
$\therefore \angle C = \angle B$	बराबर सम्मुख भुजाओं के सामने के कोण बराबर होते हैं।
$\therefore \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} \angle C$	
$\angle OCB = \angle OBC$	
OB = OC	बराबर सम्मुख कोणों के सामने की भुजाएं बराबर होती हैं।

2. ΔABO और ΔACO में

कथन	कारण
AB = AC	दिया है
OB = OC	सिद्ध कर चुके हैं
$\angle OBA = \angle OCA$	$\because \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle B$
$\therefore \Delta ABO \cong \Delta ACO$	SAS सर्वांगसमता से
$\Rightarrow \angle OAB = \angle OAC$	C.P.C.T

अतः AO कोण A को समद्विभाजित करता है



चित्र–19

उदाहरण–10. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें बराबर भुजाओं AC और AB पर क्रमशः शीर्ष लंब BE और CF खींचे गये हैं। दर्शाइये कि ये शीर्ष लंब बराबर हैं।

हल : दिया है– एक ΔABC में AB तथा AC बराबर है।

सिद्ध करना है शीर्ष लंब BE = CF

1. प्रत्येक कथन के लिये दिये गये कारणों में से सही कारण को चुनकर लिखिए–

बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं

प्रत्येक कोण **90°** का है।

उभयनिष्ठ भुजा

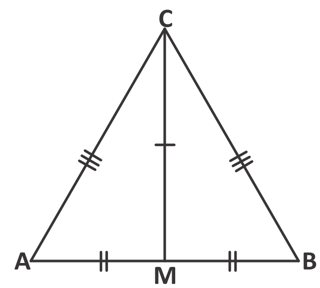
दिया है

ASA सर्वांगसमता से

सर्वांगसम त्रिभुजों में संगत भाग बराबर होते हैं।

कथन	कारण
$AB = AC$	
$\angle ACB = \angle ABC$	
$\angle BFC = \angle BEC$	
$BC = BC$	
$\angle BEC = \angle CFB$	
$\therefore \Delta BEC \cong \Delta CFB$	
$BE = CF$	

उदाहरण–11. दिये गये चित्र में M, AB का मध्य बिंदु है तथा $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ तब सिद्ध कीजिए कि $\Delta ACM \cong \Delta BCM$



चित्र–20

हल : दिया है– M, AB का मध्य बिंदु है तथा $\overline{CA} \cong \overline{CB}$

सिद्ध करना है– $\Delta ACM \cong \Delta BCM$

M, AB का मध्य बिंदु है (दिया है) → $AM = BM$ (मध्य बिंदु की परिभाषा से)

$CM = CM$ (उभयनिष्ठ भुजा)

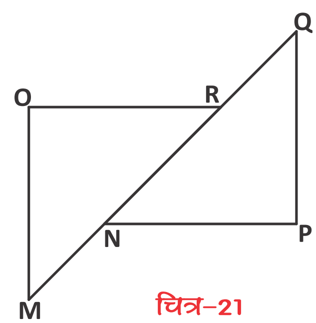
$\overline{CA} \cong \overline{CB}$ (दिया है)

→ $\Delta ACM \cong \Delta BCM$ (भुजा–भुजा–भुजा SSS - सर्वांगसमता से)

उदाहरण–12. दिया है $\angle O = \angle P = 90°$, $\overline{MN} \cong \overline{QR}$, $\overline{OM} \cong \overline{PQ}$ सिद्ध करना है $\Delta MOR \cong \Delta QPN$

हल :

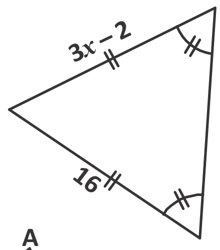
कथन	कारण
$\angle O = \angle P = 90°$	दिया है
$OM = PQ$	$OM \cong PQ$ (दिया है)
$MN = QR$	$MN \cong QR$ (दिया है)
$MN+NR = QR+NR$	दोनों पक्षों में NR जोड़ने पर
$MR = NQ$	चित्र में
$\Delta MOR \cong \Delta QPN$	RHS सर्वांगसमता प्रमेय से

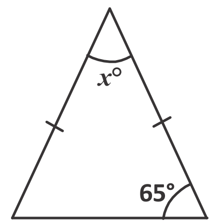


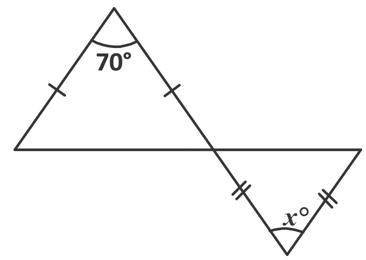
चित्र–21

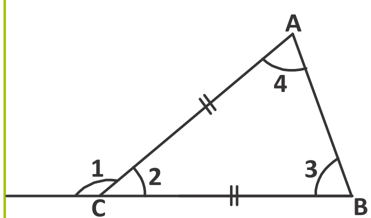
करके देखें

1. नीचे दिए गए समद्विबाहु त्रिभुजों में x का मान ज्ञात कीजिये।



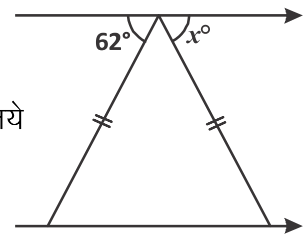




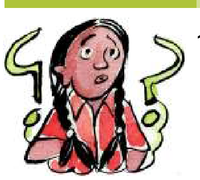


2. दिया है $BC \cong AC$ तथा $\angle 1 = 140°$ तो $\angle 2, \angle 3$ तथा $\angle 4$ का माप ज्ञात कीजिये

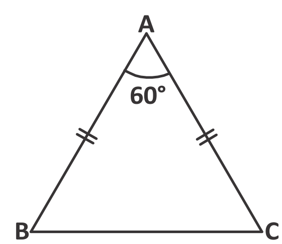
3. दिये गये चित्र में x का मान ज्ञात कीजिये



प्रश्नावली – 10.2

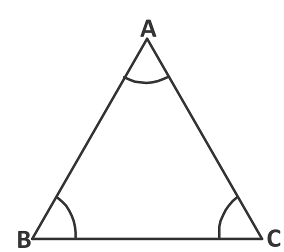


1. दिये गये चित्र में $AB = AC$ तथा $\angle A = 60°$ तो $\angle C$ का माप होगा।



   (i) 35°
   (ii) 45°
   (iii) 60°
   (iv) 180°

2. चित्र में यदि $\angle A = \angle B$ तो $AC : BC$ है



   (i) 1:1 (ii) 1:2
   (iii) 2:1
   (iv) इनमें से कोई नहीं

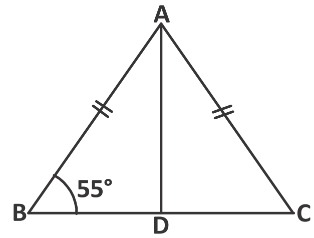
3. ΔABC में $AB = AC$ है यदि $\angle B = 50°$ हो तो $\angle A$ का माप होगा

   (i) 50° (ii) 180° (iii) 100° (iv) 80°

4. ΔABC में यदि $\angle C = \angle A$ तथा $AB = 4$ सेमी., $AC = 5$ सेमी. है तो BC होगा

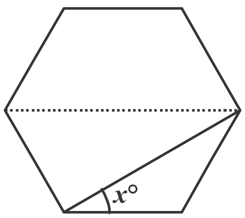
   (i) 2 सेमी. (ii) 3 सेमी. (iii) 4 सेमी. (iv) 9 सेमी.

5. दिये गये चित्र में $\angle B = 55°$ है यदि D, BC का मध्यबिंदु हो तथा AB = AC है तो $\angle BAD$ का माप होगा–

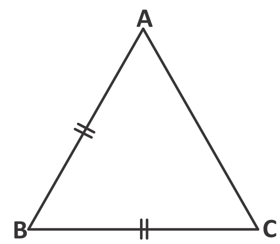


(i) 70° (ii) 55°

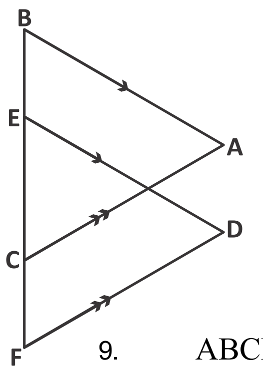
(iii) 35° (iv) 180°



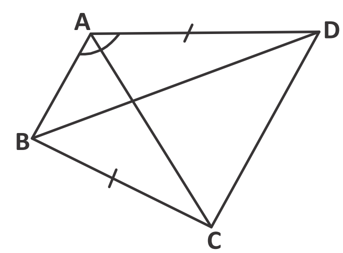
6. दिये गये समषटभुज के लिए x का मान ज्ञात कीजिए।



7. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में AB = BC तथा आधार AC है तथा $\angle A = 2x + 8$. $\angle B = 4x - 20$ तो x का मान ज्ञात कीजिये तथा दर्शाइये कि यह त्रिभुज न्यूनकोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज या अधिक कोण त्रिभुज है।

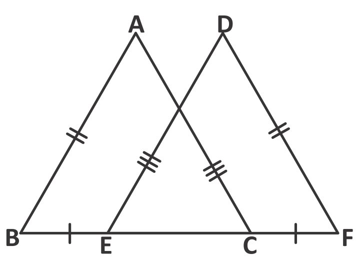


8. चित्र में दिया है $AB \parallel ED$, $CA \parallel FD$ तथा $BC \cong EF$ सिद्ध करना है $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



9. ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AD = BC और $\angle DAB = \angle CBA$ है। सिद्ध कीजिये–

1. $\Delta ABD \cong \Delta BAC$
2. $BD = AC$
3. $\angle ABD = \angle BAC$



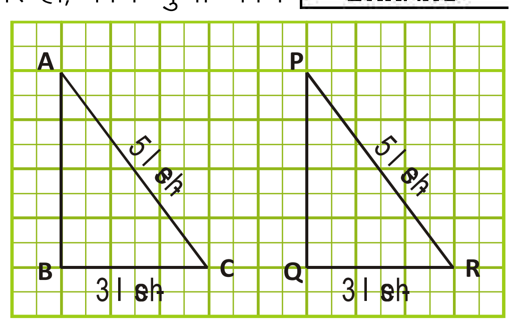
10. यदि $AB = DF, AC = DE, BE = FC$ तो सिद्ध कीजिये कि $\Delta ABC \cong \Delta DFE$

सर्वांगसमता के अनुप्रयोग (Application of Congruency)

समान साइज और समान आकृति वाली दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं। दो त्रिभुजों को सर्वांगसम कह पाने की कुछ शर्तें हैं– जैसे भुजा–भुजा–भुजा बराबर हों, कोण–भुजा–कोण बराबर हों इत्यादि। हम यहाँ सर्वांगसम आकृतियों की सर्वांगसमता व उनके क्षेत्रफल में संबंध को देखेंगे।

सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल समान हैं?

ग्राफ पेपर पर बने त्रिभुज ABC और त्रिभुज PQR को देखें। क्या ये सर्वांगसम है? ये त्रिभुज सर्वांगसमता की कौनसी शर्त पूरी कर रहे हैं।



चित्र–22

ΔABC और ΔPQR में–

$$\angle B = \angle Q = 90°, AC = PR \text{ और } BC = QR$$

यानि RHS सर्वांगसमता प्रमेय के अनुसार ΔABC और ΔPQR सर्वांगसम है।

अब इस त्रिभुज का क्षेत्रफल पता करते हैं–

ΔABC में $BC = 3$ सेमी. और $AC = 5$ सेमी. है।

तब $\quad AB = \sqrt{(AC)^2 - (BC)^2} = \sqrt{(5)^2 - (3)^2} = \sqrt{16} = 4$ सेमी. (क्यों है?)

$\therefore AB = 4$ सेमी.

यानि $\quad \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ सेमी.^{2}

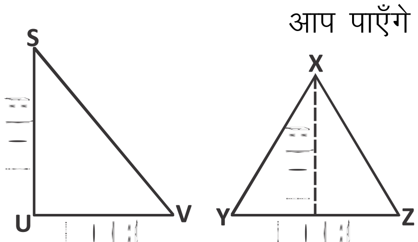
इसी तरह ΔPQR में $PQ = 4$ सेमी.

तब $\quad \Delta PQR$ का क्षेत्रफल भी 6 सेमी.^{2} होगा।

$\therefore \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \Delta PQR$ का क्षेत्रफल

आप ΔABC और ΔPQR के सर्वांगसम कुछ और त्रिभुज बनाएँ। क्या इन सभी के क्षेत्रफल समान हैं?

आप पाएँगे कि सभी सर्वांगसम त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान है।



चित्र–23

अब चित्र–23 को देखें।

ΔSUV और ΔXYZ के क्षेत्रफल 15 सेमी. है। (कैसे?)

क्या ΔSUV और ΔXYZ सर्वांगसम हैं? ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं क्योंकि ये त्रिभुज समान आकृति और समान आकार के नहीं हैं।

आप 15 सेमी.^{2} क्षेत्रफल वाले और त्रिभुज बनाएँ और उनकी सर्वांगसमता जाँचें।

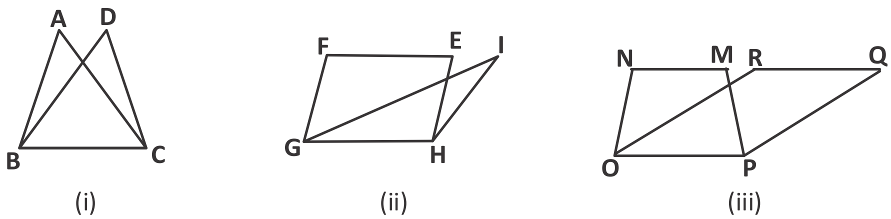
हम कह सकते हैं कि यदि दो आकृतियाँ सर्वांगसम हों तो उनके क्षेत्रफल समान होंगे परन्तु यदि आकृतियों के क्षेत्रफल समान हों तो वे सर्वांगसम हो भी सकते हैं और नहीं भी।

यह गुण केवल त्रिभुज तक ही सीमित नहीं है बल्कि विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों जैसे वृत्त, चतुर्भुज, पंचभुज इत्यादि में भी देखा जा सकता है।

सर्वांगसम आकृतियों के इस गुण का उपयोग हम विभिन्न संदर्भों में आकृतियों के क्षेत्रफल में संबंध ज्ञात करने के लिए करते हैं। अब हम कुछ ऐसी परिस्थितियों पर विचार करते हैं जहाँ इस गुण का उपयोग करने पर कुछ नई जानकारियाँ या कुछ नये संबंध प्राप्त होते हैं।

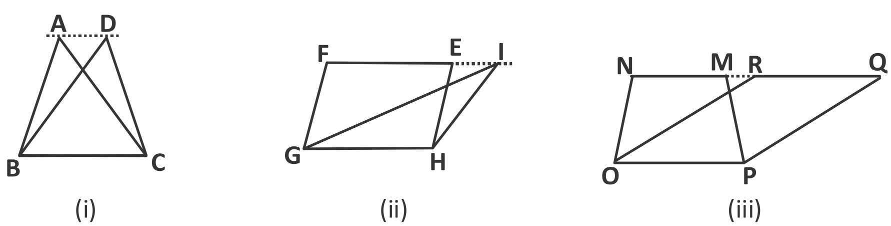
एक ही आधार व समान्तर रेखाओं के एक ही जोड़े के बीच बनी आकृतियाँ

नीचे बनी आकृतियों को देखिए–



चित्र–24

आप देखते हैं कि आकृति (i) में ΔABC व ΔDBC में उभयनिष्ठ आधार BC है। आकृति (ii) में चतुर्भुज EFGH व ΔIGH का भी उभयनिष्ठ आधार GH है। इसी प्रकार आकृति (iii) में समलंब चतुर्भुज MNOP व समांतर चतुर्भुज QROP में उभयनिष्ठ अर्थात् एक ही आधार OP है। अब यदि हम आकृति (i), (ii) व (iii) में कुछ रचनाएं करें तब हम कुछ नई स्थितियाँ प्राप्त करते हैं–

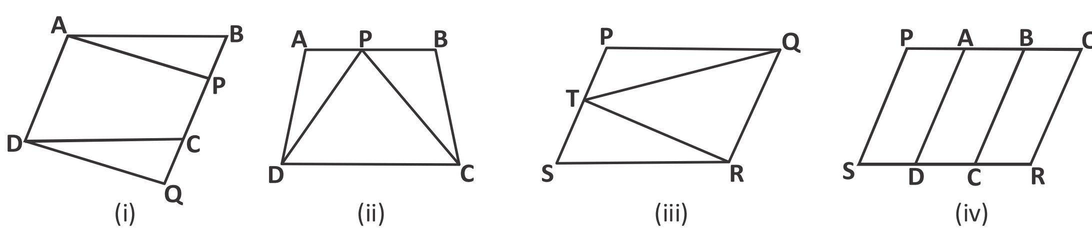


चित्र–25

रचना के पश्चात् हम देख रहे हैं कि आकृति (i) में AD□BC तथा ΔABC व ΔDBC एक ही आधार और समांतर रेखा AD व BC के बीच स्थित हैं इसी प्रकार EFGH व GHI भी समांतर रेखाओं FI व GH तथा समान आधार GH के मध्य स्थित हैं आकृति (iii) में समलंब चतुर्भुज MNOP व समांतर चतुर्भुज OPQR में समांतर रेखा NQ व OP व समान आधार OP के बीच स्थित हैं।

करके देखें

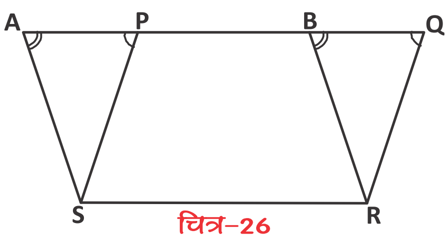
निम्न में से कौन सी आकृतियाँ एक ही आधार व एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य स्थित हैं?



एक ही आधार व समान्तर रेखाओं के एक ही जोड़े के बीच बनी आकृतियों का क्षेत्रफल

अब हम एक ही आधार व एक ही समान्तर रेखाओं के बीच बनी आकृतियों के क्षेत्रफल में परस्पर संबंध को देखते हैं।

माना कि एक ही आधार SR पर और समान्तर रेखाएँ AQ व SR के बीच दो समान्तर चतुर्भुज ABRS व PQRS हैं।



चित्र-26

ΔAPS और ΔBQR में $AS||BR$ और AQ तिर्यक रेखा है।

$\angle SAP = \angle RBQ$ (संगतकोण)

और $PS||QR$ और AQ तिर्यक रेखा है तो

$\angle SPA = \angle RQB$ (संगतकोण)

तथा $AS = BR$ ($\because$ ABRS समान्तर चतुर्भुज है)

$\therefore \Delta APS \cong \Delta BQR$

फलतः ΔAPS का क्षेत्रफल $=$ ΔBQR का क्षेत्रफल

अब ABRS का क्षेत्रफल $= \Delta APS$ का क्षेत्रफल $+$ समलंब चतुर्भुज PBRS का क्षेत्रफल (क्यों?)

चतुर्भुज ABRS का क्षेत्रफल $= \Delta BQR$ का क्षेत्रफल $+$ समलंब चतुर्भुज PBRS का क्षेत्रफल

चतुर्भुज ABRS का क्षेत्रफल $=$ चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल

स्पष्टतः यहाँ दो समांतर चतुर्भुज जो एक उभयनिष्ठ आधार पर व एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने हैं, क्षेत्रफल में बराबर हैं।

अतः एक ही आधार व एक ही समान्तर रेखाओं के बीच बने समान्तर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं। स्पष्टतः यह एक प्रमेय है, जिसे निम्न प्रकार से लिखते हैं–

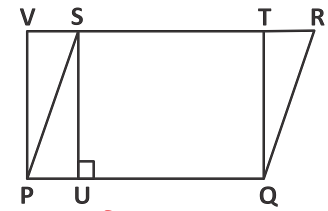
प्रमेय–10.5 : **एक ही आधार व एक ही समान्तर रेखाओं के बीच बने समान्तर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।**

उदाहरण–13. PQRS एक समान्तर चतुर्भुज और PQTV आयत है SU, PQ पर लम्ब है सिद्ध कीजिए कि (i) PQRS का क्षेत्रफल $=$ PQTV का क्षेत्रफल

(ii) PQRS का क्षेत्रफल $= PQ \times SU$

हल : (i) आयत भी एक समान्तर चतुर्भुज होता है, तब सिद्ध करना है कि

समांतर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल $=$ आयत PQTV का क्षेत्रफल



चित्र–27

क्या चित्र–27 की सहायता से हम यह सिद्ध कर पाएंगे?

हाँ, आप चित्र में देख पा रहे हैं कि समांतर चतुर्भुज PQRS व आयत PQTV का एक ही उभयनिष्ठ आधार PQ है व दोनों आकृतियाँ PQ व VR समांतर रेखाओं के मध्य बनी हैं।

हम यह जान चुके हैं कि एक ही आधार पर व एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल बराबर होता है, अतः

समांतर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल = आयत PQTV का क्षेत्रफल

(ii) PQRS का क्षेत्रफल = PQTV का क्षेत्रफल

= PQ $\times$ TQ

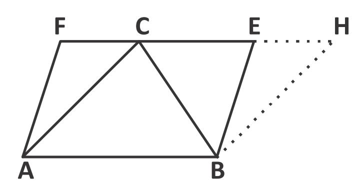
= PQ $\times$ SU (SU, PQ पर लम्ब है व SU= TR क्यों?)

इसलिए PQRS का क्षेत्रफल = PQ $\times$ SU

अतः समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, उसकी कोई समांतर भुजा और उसके सापेक्ष ऊँचाई का गुणनफल होता है।

उदाहरण–14. यदि त्रिभुज ABC और समान्तर चतुर्भुज ABEF एक ही आधार AB पर तथा समान्तर भुजाओं AB और EF के मध्य स्थित है तो सिद्ध कीजिए कि–

ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ समांतर चतुर्भुज ABEF का क्षेत्रफल



चित्र–28

हल : प्रश्नानुसार एक ही आधार AB पर तथा समान्तर भुजाओं AB और EF के मध्य ΔABC व समांतर चतुर्भुज ABEF संलग्न चित्रानुसार बनेंगे।

ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ समांतर चतुर्भुज ABEF का क्षेत्रफल

सिद्ध करने के लिए AC के समांतर BH खींचते हैं जो बढ़ाई गई FE को H पर स्पर्श करती है, रचना से हमें समांतर चतुर्भुज ABHC प्राप्त होता है। BC दूसरा एक कर्ण है जो इसे दो त्रिभुजों ΔABC व ΔBCH में विभाजित करता है।

$\therefore$ ΔABC का क्षेत्रफल = ΔBCH का क्षेत्रफल (क्यों)

आप जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभक्त करता है।

अतः समांतर चतुर्भुज ABHC का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल + ΔBCH का क्षेत्रफल

समांतर चतुर्भुज ABHC का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल + ΔABC का क्षेत्रफल

समांतर चतुर्भुज ABHC का क्षेत्रफल = 2 ΔABC का क्षेत्रफल

या $\frac{1}{2} \times$ समान्तर चतुर्भज ABHC का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल

यहाँ ABHC का क्षेत्रफल = ABEF का क्षेत्रफल (क्यों?)

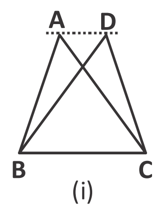
(क्योंकि ABHC व ABEF एक ही आधार व समांतर रेखाओं के मध्य बने हैं)

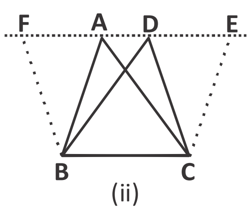
अतः ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ ABEF का क्षेत्रफल

एक ही आधार पर और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज

माना कि दो त्रिभुज ABC और DBC एक ही आधार BC पर और समान्तर रेखाओं AD व BC के बीच बने हैं।

अब हम CE||BA तथा BF||CD की रचना करें तब इस प्रकार हमें एक ही आधार BC पर और समान्तर रेखाओं BC व EF के बीच में समान्तर चतुर्भुज AECB और FDCB प्राप्त होंगे।





चित्र–29

जहाँ AECB का क्षेत्रफल = FDCB का क्षेत्रफल (क्यों?)

तब ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ AECB का क्षेत्रफल .... (1)

(समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभक्त करता है)

और ΔDBC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ FDCB का क्षेत्रफल

($\because$ AECB का क्षेत्रफल = FDCB का क्षेत्रफल)

ΔDBC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ AECB का क्षेत्रफल .... (2)

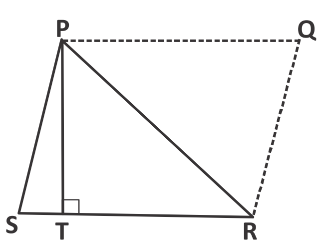
अतः समी. (1) व (2) से हमें पता चलता है कि

ΔABC का क्षेत्रफल = ΔDBC का क्षेत्रफल

स्पष्ट है कि एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज, क्षेत्रफल में बराबर होते हैं। यह भी एक प्रमेय है, इसे इस प्रकार लिखा जाता है–

प्रमेय–10.6 : एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज, क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

अब हम किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने में उसके आधार व संगत ऊँचाई में संबंध पता करेंगे।



चित्र–30

माना कि PSR एक त्रिभुज है जिसमें SR आधार व PT ऊँचाई है। PT $\perp$ SR अब PQ व RQ की रचना इस प्रकार करते हैं कि PQ||RS व RQ||SP तब PQRS एक समांतर चतुर्भुज प्राप्त होता है जिसमें ΔPSR का क्षेत्रफल = ΔPQR का क्षेत्रफल

(क्यों?)

(चूंकि समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभक्त करता है)

चतुर्भुज PQRS क्षेत्रफल = ΔPSR का क्षेत्रफल + ΔPQR का क्षेत्रफल

चतुर्भुज PQRS क्षेत्रफल = ΔPSR का क्षेत्रफल + ΔPSR का क्षेत्रफल

ΔPSR का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ PQRS का क्षेत्रफल

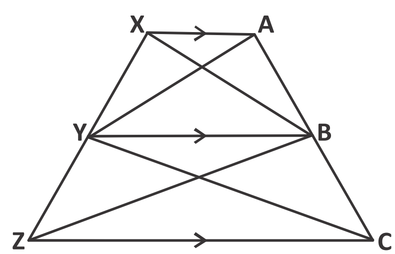
$= \frac{1}{2} \times SR \times PT$

स्पष्टतः **किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार और उसकी संगत ऊँचाई के गुणनफल का आधा होता है।**

प्रमेय–10.7 : किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार और उसकी संगत ऊँचाई के गुणनफल का आधा होता है।

हमने यह जाना कि एक ही आधार व एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं। तब क्या एक ही आधार पर बने दो समान क्षेत्रफल के त्रिभुज एक ही समांतर रेखाओं के बीच होंगे?

उदाहरण–15. चित्रानुसार $XA \parallel YB \parallel ZC$ सिद्ध कीजिए कि क्षेत्रफल $(\Delta XBZ) =$ क्षेत्रफल (ΔAYC)



चित्र–31

हल : ΔXYB और ΔABY, XA व YB एक ही समांतर रेखाओं के बीच एक ही आधार YB पर स्थित है।

$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔXYB) = क्षेत्रफल (ΔABY) .....(1)

इसी प्रकार,

ΔYBZ और ΔBYC एक ही समांतर रेखाओं YB व ZC के बीच एक ही आधार YB पर स्थित है।

$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔYBZ) = क्षेत्रफल (ΔBYC) .....(2)

यहाँ क्षेत्रफल (ΔXBZ) = क्षेत्रफल (ΔXYB) + क्षेत्रफल (ΔYBZ)

तथा क्षेत्रफल (ΔAYC) = क्षेत्रफल (ΔAYB) + क्षेत्रफल (ΔBYC)

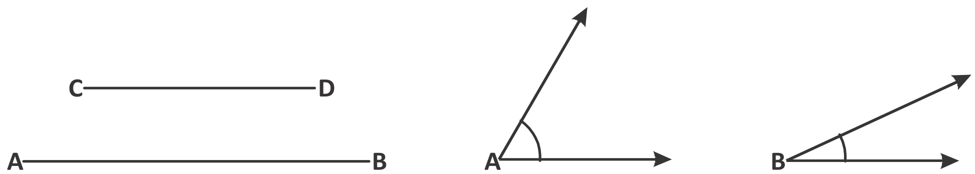
अब समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

क्षेत्रफल (ΔXYB) + क्षेत्रफल (ΔYBZ) = क्षेत्रफल (ΔABY) + क्षेत्रफल (ΔBYC)

अतः क्षेत्रफल (ΔXBZ) = क्षेत्रफल (ΔAYC)

त्रिभुजों में असमानता (Inequalities in Triangles)

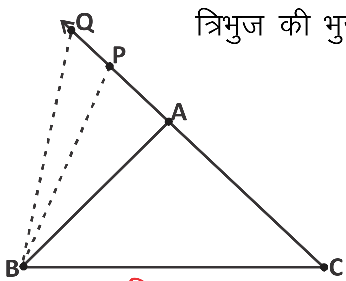
हम किसी त्रिभुज की समानताओं को भुजाओं और कोणों के संबंध में सीख चुके हैं परंतु बहुत सी ऐसी ज्यामिति रचनाएं भी होती हैं जो समान नहीं होतीं और हम उनकी तुलना करते हैं, जैसे AB रेखाखंड की लंबाई, रेखाखण्ड CD से अधिक है $\angle A$, $\angle B$ से बड़ा है।



चित्र–32

किसी त्रिभुज की असमान भुजाओं और कोणों के मध्य संबंधों को हम गतिविधि के माध्यम से सीखेंगे

गतिविधि– एक ड्राइंग बोर्ड पर दो बिंदु B और C पर दो पिन लगाइये इनको धागे से बांधकर त्रिभुज की भुजा BC बनाइये।



चित्र–33

एक अन्य धागे के एक सिरे को C पर लगाइये और दूसरे सिरे को एक पेंसिल से बांधिये। किरण $\overrightarrow{CQ}$ खींचे। पेंसिल से एक बिंदु A अंकित कीजिये। बिंदु A को B से मिलाइये। अब पेंसिल से इसी किरण पर एक अन्य बिंदु P अंकित कीजिये। P को B से मिलाइये और Q को B से मिलाइये। अब PC और AC की लम्बाइयों की तुलना कीजिए।

क्या $PC > AC$? हाँ ...... (लम्बाइयों की तुलना करने पर)

ΔABC व ΔPBC की तुलना करने पर $\angle PBC > \angle ABC$

इस प्रकार जब हम CA पर और बिंदु अंकित करके उन्हें B से मिलाते जायेंगे तो देखेंगे कि जैसे–जैसे AC भुजा बड़ी होती जाती है $\angle B$ का माप भी बढ़ता जाता है।

यह कुछ अन्य त्रिभुजों के साथ करके देखें। इस तरह हम त्रिभुज की कुछ और रोचक एवं महत्वपूर्ण असमानताओं को देख पाते हैं, जिन्हें नीचे प्रमेय के रूप में दिया गया है।

प्रमेय–10.8 : यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएं असमान हैं तो बड़ी भुजा के सामने का कोण बड़ा होता है।

प्रमेय–10.9 : किसी त्रिभुज में, बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है।

प्रमेय–10.10 : एक त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है।

प्रमेय–10.10 को गतिविधि की सहायता से समझेंगे।

एक ड्राइंग बोर्ड पर तीन कीलें A, B तथा C इस प्रकार लगाइये की एक त्रिभुज की आकृति बने।

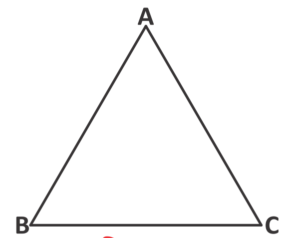
अब इन कीलों को धागे से बांधिये एक धागे के टुकड़े की तुलना अन्य दो धागों से कीजिये आप देखेंगे कि दो धागों की लंबाई तीसरे धागे से बड़ी है।

इसकी तीन भुजाएं AB, BC तथा CA मापकर विभिन्न युग्मों में दो भुजाओं के योग की तीसरी भुजा से तुलना कीजिए। आप देखेंगे कि–

(i) $AB + BC > CA$

(ii) $BC + CA > AB$

(iii) $CA + AB > BC$



चित्र–34

इसी तरह और भी परिणाम निकाले जा सकते हैं, जिन्हें प्रमेय के रूप में भी सिद्ध किया जा सकता है।

आइये, इन परिणामों पर आधारित कुछ उदाहरण देखें।

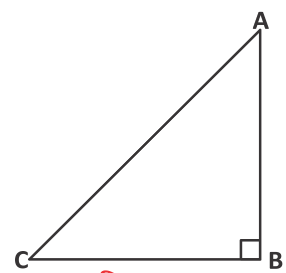
उदाहरण–16. सिद्ध कीजिये कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लंबी भुजा होती है।

हल : दिया है ΔABC में

$\angle B = 90°$

सिद्ध करना है $AC > AB$

और $AC > BC$



चित्र–35

ΔABC में

$\angle B = 90°$ (दिया है)

$\because$ $\angle A + \angle C = 90°$ (त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों का योग दो समकोण होता है)

$\therefore$ $\angle A + \angle C = \angle B$

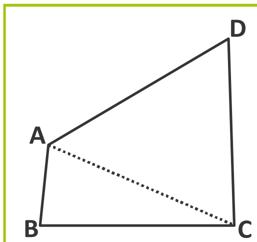
यानि $\angle A < \angle B$ और $\angle C < \angle B$

हम कह सकते हैं $\angle B$ त्रिभुज ABC का सबसे बड़ा कोण है।

हम जानते हैं कि त्रिभुज में बड़े कोण के सामने की भुजा बड़ी होती है।

अतः $AC > AB$ और $AC > BC$

सोचें एवं चर्चा करें



AB और CD क्रमशः एक चतुर्भुज ABCD की सबसे छोटी और सबसे बड़ी भुजाएँ है। दर्शाइए कि $\angle A > \angle C$ और $\angle B > \angle D$ है।

उदाहरण–17. त्रिभुज ABC में सिद्ध करें– $\angle ABC > \angle ACB$

रचना– AC में D बिंदु इस प्रकार लें कि $AB = AD$, बिंदु B को D से मिलाएँ।

उपपत्ति– ΔABD में

$AB = AD$ (रचना से)

$\angle ABD = \angle ADB$ .....(1) (समान भुजाओं के सामने के कोण)

परंतु $\angle ADB$, ΔBCD का बहिष्कोण है

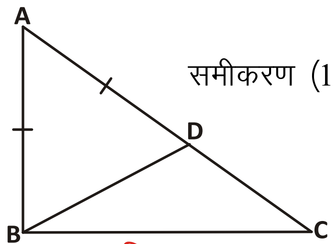
$\therefore \angle ADB > \angle BCD$ .....(2) (बहिष्कोण प्रमेय से)

समीकरण (1) और (2) से

$\angle ABD > \angle BCD$

$\angle ABC > \angle ABD$ (रचना से)

$\angle ABC > \angle ACB$



चित्र–36

करके देखें

सही विकल्प चुनिये

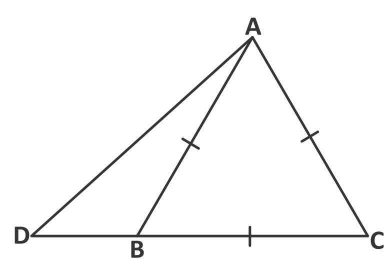
1. निम्नलिखित में से किन मापों से एक त्रिभुज की रचना की जा सकती है–
   (i) 10*cm.*, 5*cm.*, 4*cm.*, (ii) 8*cm.*, 6*cm.*, 3*cm.*
   (iii) 5*cm.*, 8*cm.*, 3*cm.* (iv) 14*cm.*, 6*cm.*, 7*cm.*

2. त्रिभुज ABC में यदि $\angle C > \angle B$ से तो निम्न में से कौनसा सत्य होगा–
   (i) $EF > DF$ (ii) $AB > AC$
   (iii) $AB < AC$ (iv) $BC > CA$

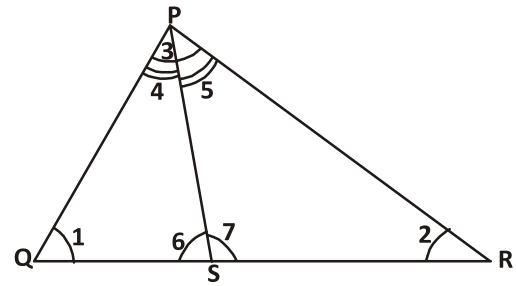
3. निम्नलिखित में से किन मापों से एक त्रिभुज की रचना संभव है–
   (i) $35°, 45°, 95°$ (ii) $40°, 50°, 100°$
   (iii) $21°, 39°, 120°$ (iv) $110°, 80°, 20°$

4. यदि एक ΔABC में AD माध्यिका है तो निम्न में से कौनसा कथन असत्य होगा।
   (i) $AB + BC > AD$ (ii) $AC + BC > AD$
   (iii) $AB + BC < AD$ (iv) $AB + BD > DC$

5. दिये गये चित्र में यदि $AB = AC = BC$ है तो निम्न में से कौनसा कथन सत्य है?
   (i) $AD = AC$
   (ii) $AD < AB$
   (iii) $BC = BD$
   (iv) $AD > AB$



उदाहरण–18. दिये गये चित्र में $PR > PQ$ और PS $\angle QPR$ का कोणार्द्धक है तो सिद्ध कीजिये कि $\angle PSR > \angle PSQ$



चित्र–37

हल : चूंकि $PR > PQ$

$\therefore \angle 1 > \angle 2$

ΔPQS में $\quad \angle 1 + \angle 4 + \angle 6 = 180°$ .....(1)

ΔPRS में $\quad \angle 2 + \angle 5 + \angle 7 = 180°$ .....(2)

अतः दोनों त्रिभुजों में

$\angle 4 = \angle 5$ .....(3) (कोण 3 के कोणार्द्धक)

$\angle 1 > \angle 2$ .....(4)

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर

$\Rightarrow \quad \angle 4 + \angle 1 > \angle 5 + \angle 2$ .....(5)

समीकरण (1) से $\quad \angle 1 + \angle 4 = 180° - \angle 6$

समीकरण (2) से $\quad \angle 5 + \angle 2 = 180° - \angle 7$

अब समीकरण (5) में मान रखने पर

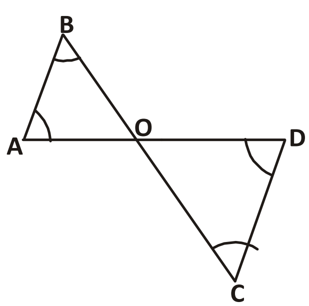
$180° - \angle 6 > 180° - \angle 7$

$-\angle 6 > -\angle 7$ (पक्षान्तर करने पर)

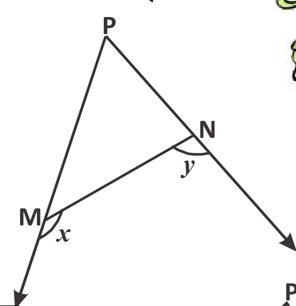
या $\quad \angle 7 > \angle 6$

$\therefore \angle PSR > \angle PSQ$

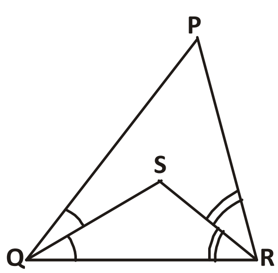
प्रश्नावली – 10.3



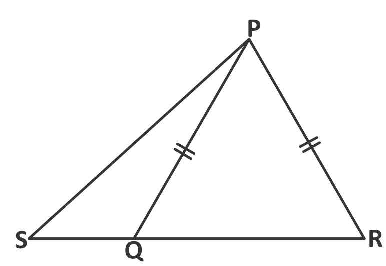
1. चित्र में $\angle B < \angle A$ और $\angle C < \angle D$ है। दर्शाइये कि $AD < BC$ है।



2. दिये गये चित्र में यदि $x > y$ हो तो सिद्ध कीजिये कि $MP > NP$



3. दिये गये चित्र में $PQ > PR$ तथा $\angle Q$ और $\angle R$ के अर्धक क्रमशः QS और RS हैं। सिद्ध कीजिये कि $SQ > SR$



4. दिये गये चित्र में $PQ = PR$ हो तो सिद्ध कीजिये कि $PS > PQ$

BKXSTH

सर्वांगसमता की उपयोगिता (Uses of Congruency)

सर्वांगसम आकृतियों व सर्वांगसमता का उपयोग हमारे वास्तविक जीवन में तो होता ही है साथ ही साथ इंजीनियरिंग के क्षेत्र में भी पुलों, भवनों और टावरों के निर्माण में भी सर्वांगसमता दिखाई पड़ती है।

हमने सीखा

1. ज्यामिति आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं यदि उनके आकार व माप समान हों।
2. समान त्रिज्याओं के दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं।
3. दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी भुजाओं के माप समान होते हैं।
4. दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं जब उनके शीर्षों की संगतता इस प्रकार हो कि उनकी संगत भुजाएं व संगत कोण समान हों।
5. यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएं और बीच का कोण दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजाओं और बीच के कोण बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (SAS)
6. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और बीच की भुजा दूसरे त्रिभुज के संगत दो कोणों और बीच की भुजा के बराबर हों तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (ASA)
7. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और संगत भुजा के बराबर हों तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (AAS)
8. त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
9. त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएं बराबर होती हैं।
10. दो त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज की तीन भुजाएं दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हों तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।
11. यदि दो समकोण त्रिभुजों में एक त्रिभुज का कर्ण व एक भुजा दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (RHS)
12. किसी त्रिभुज में बड़ी भुजा का सम्मुख कोण बड़ा होता है।
13. किसी त्रिभुज में बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है।
14. किसी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।
15. किसी समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण $60°$ का होता है।
16. यदि $\Delta ABC, \Delta PQR$ के सर्वांगसम हैं तो इसे इस प्रकार लिखते हैं– $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
17. सर्वांगसम त्रिभुज के संगत अवयव/भाग/अंग को स.त्रि.स.भ. या CPCT से प्रदर्शित करते हैं।