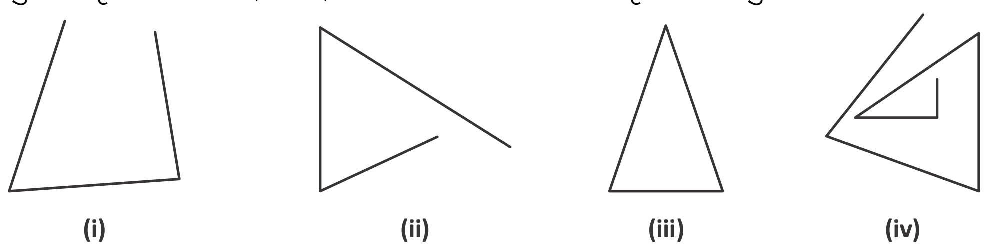
चतुर्भुज

[QUADRILATERALS]

BL7NV5

11

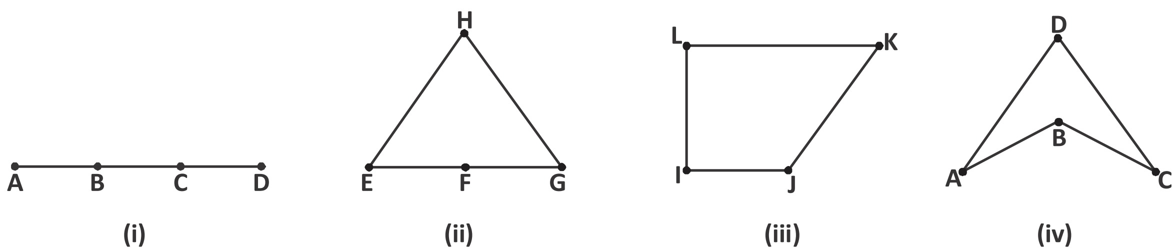
नीचे कुछ आकृतियाँ दी गई हैं, इनमें से कौन–कौन सी आकृतियाँ त्रिभुज हैं?



चित्र–1

तीन असंरेख बिंदुओं को मिलाने पर जो आकृति बनती है वह त्रिभुज कहलाती है। त्रिभुज, तीन रेखाखण्डों से घिरी आकृति है। इसमें तीन भुजाएँ, तीन कोण, तीन शीर्ष होते हैं। त्रिभुज के कौनसे अन्य गुण हैं, चर्चा करें।

यहाँ प्रत्येक चित्र में चार बिंदु दिए गए हैं जिन्हें मिलाने पर कुछ आकृतियाँ बन रही हैं।



चित्र–2

आकृति–2(i) में चारों बिंदु एक ही रेखा पर स्थित हैं अतः इससे एक रेखाखण्ड प्राप्त होता है। आकृति–2(ii) में तीन बिंदु एक रेखा में हैं और चौथा बिंदु अलग है। इससे एक त्रिभुज बन रहा है।

क्या आकृति–2(iii) व (iv) में चतुर्भुज बन रहा है? यहाँ हम देख पाते हैं कि चतुर्भुज बनने के लिए चार बिंदुओं में से तीन बिंदुओं का असंरेख होना आवश्यक है।

यदि किसी सतह पर चार बिंदुओं में से कोई भी तीन बिंदु एक रेखा पर स्थित न हों (अर्थात् असंरेख हों) तब इन बिंदुओं को एक क्रम से मिलाने पर चतुर्भुज बनेगा।

करके देखें

उपर्युक्त गुणों के आधार पर चतुर्भुज को परिभाषित कीजिए। आपस में चर्चा कर साथियों द्वारा लिखी गई परिभाषा भी देखिए।

विद्यालय या कक्षा में ऐसी कौन–कौन सी वस्तुएँ हैं जिनकी कुछ सतहें चतुर्भुजाकार दिखती हैं? सूची बनाइए। जैसे– श्याम पट्ट, खिड़की का पल्ला, पुस्तक का पन्ना इत्यादि।

सोचें एवं चर्चा करें

हमारे आसपास दिखने वाली बहुत सी वस्तुएँ आयताकार हैं। आयत भी एक चतुर्भुज है। क्यों?

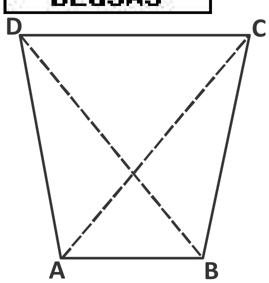
BLGJHS

चतुर्भुज के प्रकार (Types of Quadrilateral)

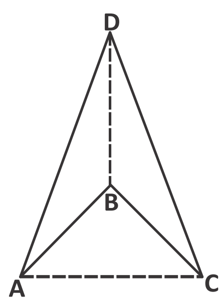
आपने चित्र–2 की आकृतियों (iii) व (iv) को चतुर्भुज कहा। अब चित्र–3 की तरह इन चतुर्भुजों के विकर्ण खींचिए।

आपने देखा कि चित्र 3 (i) में दोनों विकर्ण अंदर की ओर बनते हैं जबकि चित्र 3(ii) में एक विकर्ण अंदर एवं एक विकर्ण बाहर बनता है। ऐसा क्यों?

जिस चतुर्भुज में दोनों विकर्ण अंदर की ओर बनते हैं उसका कोई भी कोण 180° से अधिक नहीं होता इस चतुर्भुज को उत्तल चतुर्भुज कहते हैं। जैसे PQRS (चित्र–4)



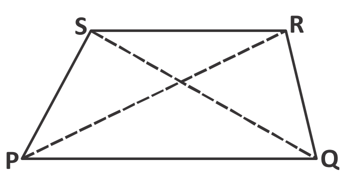
(i)



(ii)

चित्र–3

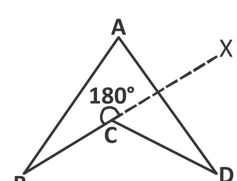
जिस चतुर्भुज में एक विकर्ण अन्दर एवं एक बाहर बनता है तथा चतुर्भुज का एक कोण 180° से अधिक होता है ऐसे चतुर्भुज को अवतल चतुर्भुज कहते हैं।



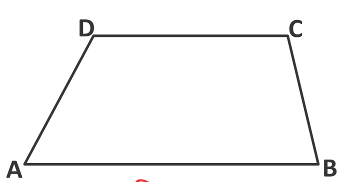
चित्र–4

चित्र–5 में $\angle BCX = 180^\circ$ है। अतः चतुर्भुज ABCD का अंतःकोण $\angle BCD$, 180° से अधिक है।

हम यहाँ चित्र–4 जैसे उत्तल चतुर्भुज का ही अध्ययन करेंगे।



चित्र–5

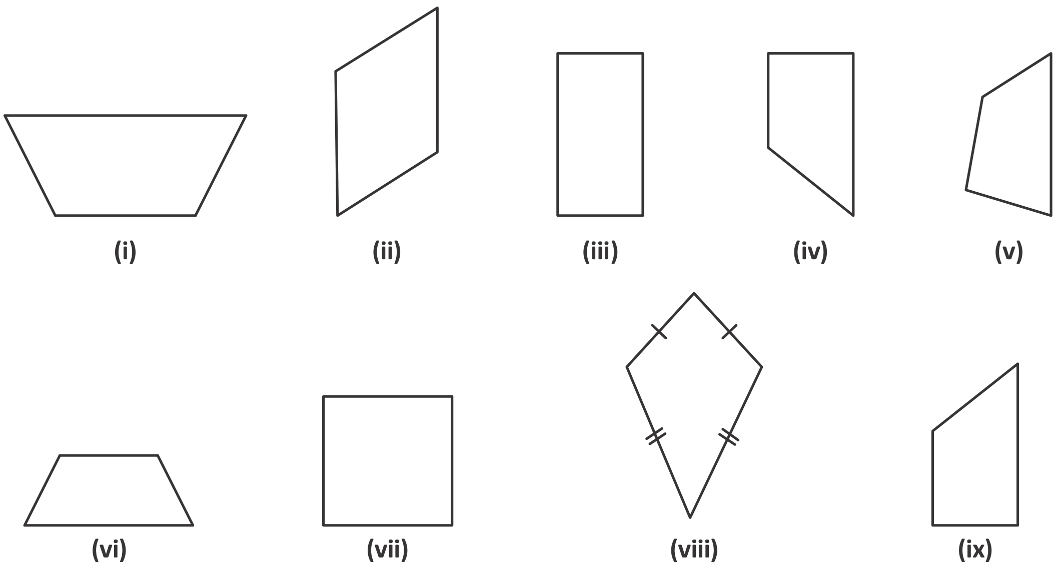


चित्र–6

चतुर्भुज ABCD में भुजा AB, भुजा DC के समांतर है।
यह समलंब चतुर्भुज है। यह कहा जा सकता है कि चतुर्भुज जिसका सम्मुख भुजाओं का केवल एक जोड़ा समांतर हो, समलंब चतुर्भुज (Trapezium) होता है।

करके देखें

नीचे बने चतुर्भुज में से कौन से समलंब चतुर्भुज नहीं है एवं क्यों?



समांतर चतुर्भुज (Parallelogram)

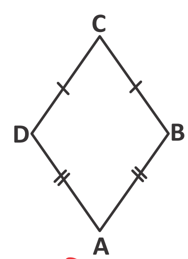
समलंब चतुर्भुज में भुजाओं का एक युग्म (जोड़ा) समांतर होता है, यदि चतुर्भुज में भुजाओं के दोनों युग्म (जोड़ा) समांतर अर्थात् आमने–सामने की भुजाएँ समांतर हों, तो वह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज कहलाता है।

चित्र–7

BLQFYF

समचतुर्भुज (Rhombus)

यदि समांतर चतुर्भुज की चारों भुजाएँ बराबर हों तो वह समचतुर्भुज कहलाता है।



चित्र–8

सोचें एवं चर्चा करें

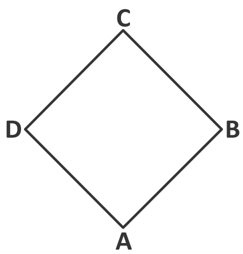
1. विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों में से कौन–कौन से चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज भी होते हैं?
2. क्या एक समांतर चतुर्भुज, एक समलंब चतुर्भुज भी है?

अब आप आयत व वर्ग बनाइए। क्या आयत व वर्ग भी समांतर चतुर्भुज हैं?

हाँ, आयत एक विशेष तरह का समांतर चतुर्भुज होता है जिसका प्रत्येक कोण 90° होता है।

करके देखें

1. क्या आयत, एक वर्ग भी है?
2. ऐसा समांतर चतुर्भुज बनाइए जिसके तीन कोण समकोण हों पर यह आयत न हो। क्या यह संभव है? चर्चा कीजिए।



चित्र–9

जब किसी आयत की चारों भुजाएँ समान हों तब वह कौन–सा चतुर्भुज होता है? यह चतुर्भुज वर्ग होता है। (चित्र–9)

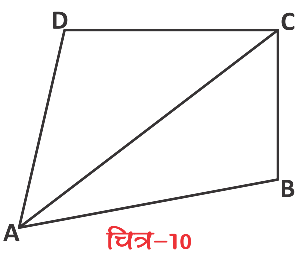
(i) क्या वर्ग एक आयत है?

(ii) क्या वर्ग एक समांतर चतुर्भुज है?

(iii) क्या वर्ग एक समचतुर्भुज है?

(iv) क्या समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज भी है?

अब हम चतुर्भुज के कुछ गुणों एवं उनसे संबंधित प्रमेयों को सिद्ध करना सीखेंगे–



चित्र–10

हम जानते हैं कि चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो त्रिभुजों में बाँटता है।

माना ABCD एक चतुर्भुज है तथा AC उसका विकर्ण है। तब विकर्ण AC, चतुर्भुज ABCD को दो त्रिभुजों ΔABC व ΔADC में विभक्त करता है (चित्र–10)।

हम त्रिभुज के कोण योग गुणधर्म से जानते हैं कि किसी त्रिभुज के तीनों अंतः कोणों का योग 180° होता है।

ΔADC में, $\angle ADC + \angle DCA + \angle CAD = 180^0$ ....(1)

इसी प्रकार ΔABC में, $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^0$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$\angle ADC + \angle DCA + \angle CAD + \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^0 + 180^0$

$\angle ADC + (\angle DCA + \angle BCA) + (\angle CAD + \angle CAB) + \angle ABC = 360^0$

$\angle ADC + \angle BCD + \angle BAD + \angle ABC = 360^0$

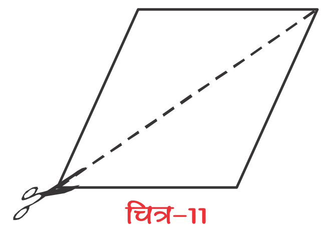
अतः चतुर्भुज ABCD के चारों अन्तःकोणों का योग 360^0 के बराबर है।

इसी तरह अन्य सभी चतुर्भुज के चारों अन्तः कोणों का योग भी 360^0 होता है।

करके देखें

1. एक चतुर्भुज के चारों अन्तःकोणों का अनुपात 3 : 5 : 7 : 9 है तो उसके प्रत्येक अन्तःकोण का मान ज्ञात कीजिए।
2. यदि चतुर्भुज के चारों कोण समान हों तो प्रत्येक कोण का माप कितना होगा?

अब कागज पर एक समांतर चतुर्भुज बनाइए। उसका कोई एक विकर्ण खींचिए। कैंची की सहायता से चित्रानुसार काटिए। काटे गए भागों को एक–दूसरे के ऊपर रखिए। क्या ये कटे भाग एक–दूसरे को ढँक पाते हैं?


चित्र–11

क्या इन भागों के एक–दूसरे को ढँक पाने में समांतर चतुर्भुज के किसी गुणधर्म का महत्व है?

हम यहाँ समांतर चतुर्भुज के कुछ गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे तथा उनका तार्किक सत्यापन करेंगे।

प्रमेय–11.1 : समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

उपपत्ति : माना ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। AC उसका एक विकर्ण है। (चित्र–12)

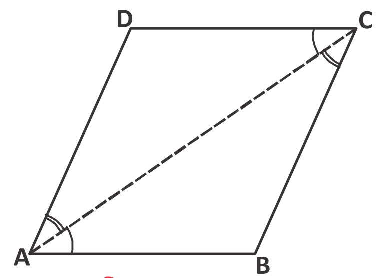
समांतर चतुर्भुज ABCD में–

$AB \| DC$ जहाँ AC एक तिर्यक रेखा है।

$\angle DCA = \angle CAB$ (एकांतर अंतः कोण)

इसी प्रकार $DA \| CB$ जहाँ AC तिर्यक रेखा है।

$\angle DAC = \angle BCA$



चित्र–12

अब ΔACD और ΔCAB में

$\angle DCA = \angle CAB$

$AC = CA$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle DAC = \angle BCA$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता से)

अर्थात विकर्ण AC समांतर चतुर्भुज ABCD को दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

स्पष्टतः समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

प्रमेय–11.2 : किसी समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

उपपत्ति : माना कि ABCD समांतर चतुर्भुज है। अब शीर्ष A को C से मिलाइए। यह विकर्ण AC है। विकर्ण AC चतुर्भुज ABCD को दो त्रिभुजों ABC और ACD में बांटता है। (चित्र–13)

अब ΔABC और ΔACD में –

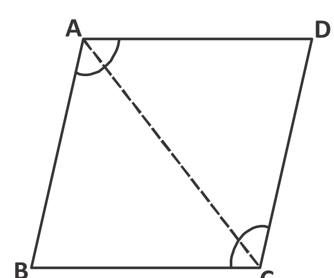
$\angle DAC = \angle BCA$ (एकांतर अंतः कोण)

$(AD \| BC)$

$AC = CA$ उभयनिष्ठ भुजा है।

इसी प्रकार, एकांतर अन्तः कोण से –

$\angle DCA = \angle BAC \quad (AB \| DC)$



चित्र–13

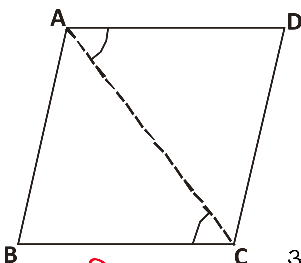
$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता से)

इसलिए $AD = BC$ तथा $AB = CD$

अर्थात समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं। (सिद्ध हुआ)

प्रमेय–11.3 (विलोम) : यदि एक चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर है, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है।

उपपत्ति : चतुर्भुज ABCD जिसमें $AB = CD$ तथा $BC = AD$ है। अब चतुर्भुज में विकर्ण AC खींचिए।



चित्र–14

ΔABC और ΔCDA में

$BC = AD$ (दिया हुआ है)

$AB = DC$ (दिया हुआ है)

$AC = CA$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता से)

अतः $\angle BCA = \angle DAC$

अतः $AD \parallel BC$ ....(1)

जहाँ AC तिर्यक रेखा है।

चूंकि $\angle ACD = \angle CAB$,

क्योंकि CA तिर्यक रेखा है।

अतः $AB \parallel CD$ ....(2)

अतः (1) व (2) से चतुर्भुज ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

हमने देखा कि समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म बराबर होते हैं और विलोमतः यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म बराबर हों तो वह समांतर चतुर्भुज होता है।

अब हम इसी तथ्य को उन चतुर्भुजों के लिए सिद्ध करते हैं जिनके सम्मुख कोणों के युग्म बराबर होते हैं।

प्रमेय–11.4 : समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

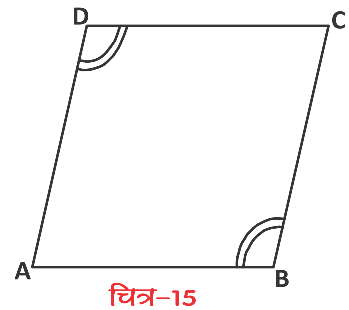
उपपत्ति : चतुर्भुज ABCD एक समांतर चतुर्भुज है (चित्र–15)

जिसमें $AB \parallel DC$

$\because$ रेखा AD समांतर रेखाओं AB व DC को प्रतिच्छेद करती है।

$\angle A + \angle D = 180^0$ (एक ही ओर के अन्तः कोण)

तथा DC रेखा AD व BC को प्रतिच्छेद करती है।



चित्र–15

$\angle D + \angle C = 180^0$

(एक ही ओर के अन्तः कोण)

अतः $\angle A + \angle D = \angle D + \angle C$

अर्थात $\angle A = \angle C$

इसी प्रकार $\angle B = \angle D$ भी सिद्ध किया जा सकता है।

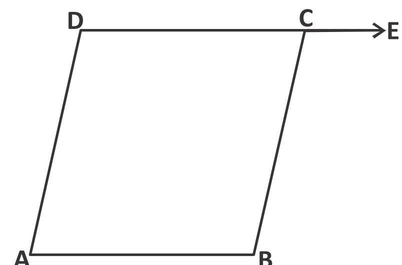
स्पष्ट है कि समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

अब किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के बराबर होने पर उसके समांतर चतुर्भुज होने की संभावना का तार्किक रूप ज्ञात करेंगे।

प्रमेय–11.5 : **(प्रमेय 11.4 का विलोम) किसी चतुर्भुज में यदि सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है।**

उपपत्ति : चतुर्भुज ABCD में $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ (चित्र–16).....(1)

हम जानते हैं कि चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360^0 होता है।



चित्र–16

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^o$

$\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360^o$ (समीकरण (1) से)

$2\angle A + 2\angle B = 360^o$

$$\angle A + \angle B = \frac{360^o}{2}$$

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \frac{360^o}{2}$$

$\therefore \angle C + \angle D = 180^o$ .....(2)

अब DC को E तक बढ़ाइए–

हम देखते हैं कि $\angle C + \angle BCE = 180^o$ .....(3)

अतः $\angle BCE = \angle ADC$ समीकरण (2) और (3) से

अब चूंकि $\angle BCE = \angle D$ तथा DC तिर्यक छेदी रेखा है।

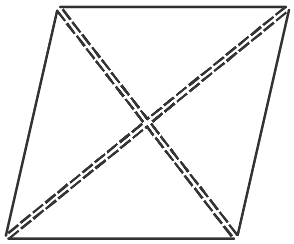
इसलिए $AD \parallel BC$

इसी प्रकार $AB \parallel DC$ अर्थात ABCD समांतर चतुर्भुज हैं।

समांतर चतुर्भुज के विकर्णों के गुण
(Properties of Diagonals of Parallelogram)

समांतर चतुर्भुज का एक गुण और भी है।

कागज पर एक समांतर चतुर्भुज खींचिए, उसके दो विकर्ण खींचकर कैंची की सहायता


चित्र–17

से चित्रानुसार काटिए। क्या आपको ऐसा प्रतीत हो रहा है कि विकर्णों ने समांतर चतुर्भुज को समान भागों में बाँट दिया है। (चित्र–17)

आकृति में आपको चार त्रिभुज प्राप्त होते हैं और ये त्रिभुज दो सर्वांगसम त्रिभुजों के युग्म के रूप में होते हैं। क्या विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं?

आइए, हम उक्त कथन की सत्यता की जाँच करते हैं।

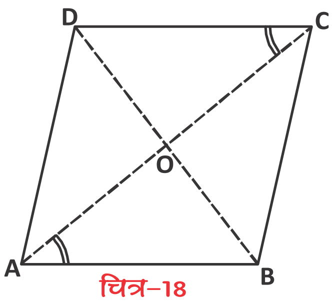
प्रमेय–11.6 : समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

उपपत्ति : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें $AB = DC$ व $AB \parallel DC$

तथा $AD = BC$ और $AD \parallel BC$ (चित्र–18)

A को C से व B को D से मिलाया तब AC व BD एक–दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

ΔAOB व ΔCOD में



चित्र–18

$\angle OAB = \angle OCD$ .... (1)

($AB \parallel DC$ एवं AC तिर्यक रेखा काटती है।)

$\angle ABO = \angle ODC$ .... (2)

($AB \parallel DC$ एवं BD तिर्यक रेखा काटती है।)

$AB = CD$

$\therefore\ \Delta AOB \cong \Delta COD$ (कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता)

$\therefore$ भुजा $AO = OC$ एवं $BO = OD$

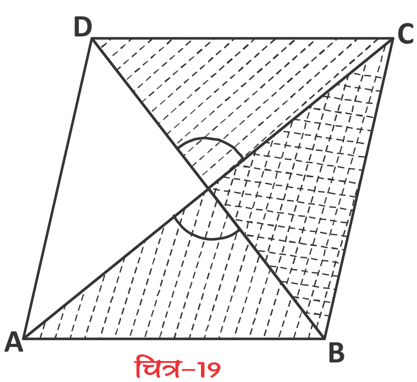
अतः हम कह सकते हैं कि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक–दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

उदाहरण–1. यदि किसी समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों तो वह आयत होता है।

उपपत्ति : माना कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें AC व BD विकर्ण हैं

तथा $AC = BD$ (चित्र–19)

अब ΔABC और ΔDCB में



चित्र–19

$AB = DC$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

$BC = CB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$AC = BD$

$\Delta ABC \cong \Delta DCB$ (भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता)

फलतः $\angle ABC = \angle DCB$ ....(1)

चूंकि $\angle ABC$ और $\angle DCB$ समांतर रेखाओं AB और CD की तिर्यक प्रतिच्छेदी BC के एक ही ओर स्थित हैं। अतः

$\angle ABC + \angle DCB = 180^\circ$ ....(2)

समीकरण (1) और (2) से

$\angle ABC + \angle ABC = 180^\circ$

$2\angle ABC = 180^\circ$

$\angle ABC = 90^\circ$

अर्थात $\angle DCB = 90^\circ$

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि $\angle A = \angle D = 90^\circ$

इसलिए, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

अतः समांतर चतुर्भुज ABCD आयत है।

स्पष्ट है कि यदि किसी समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों तो वह आयत होता है।

यही सिद्ध करना था।

करके देखें

इसी तरह आप सिद्ध कर सकते हैं कि यदि किसी समचतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो वह वर्ग होगा।

उदाहरण–2. यदि किसी समांतर चतुर्भुज में दोनों विकर्ण परस्पर लंबवत् हों तो वह समचतुर्भुज होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC और BD परस्पर लंबवत है, आपको सिद्ध करना है कि ABCD समचतुर्भुज है। (चित्र–20)

अब ΔAOD और ΔCOD में

$AO = CO$ (समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।)

$\angle AOD = \angle COD$ (प्रत्येक कोण समकोण)

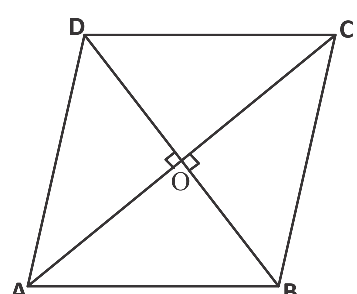
$OD = OD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\Delta AOD \cong \Delta COD$ (भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता)

फलतः $AD = CD$

$AB = CD$ तथा $AD = BC$

$\therefore AB = BC = CD = AD$



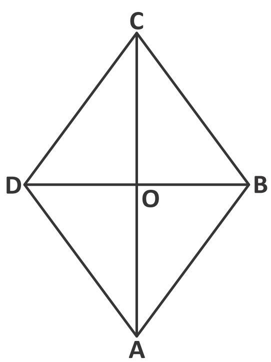
चित्र–20

स्पष्टतः समांतर चतुर्भुज ABCD एक समचतुर्भुज है। अतः कह सकते हैं कि यदि किसी समांतर चतुर्भुज में दोनों विकर्ण परस्पर लंबवत हों तो वह समचतुर्भुज होता है।

करके देखें

किसी समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंबवत होते हैं।

उदाहरण–3. सिद्ध कीजिए कि एक समचुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे पर लंब होते हैं।



चित्र–21

उपपत्ति : समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है, जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं। आइए, अब समचतुर्भुज ABCD पर विचार कीजिए। (चित्र–21) समचतुर्भुज ABCD में हम देख सकते हैं कि विकर्ण AC और BD एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं। हमें सिद्ध करना है कि AC रेखा BD पर लंब है।

Δ AOB और Δ BOC में,

$AO = OC$ (समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।)

$OB = OB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$AB = BC$ (समचतुर्भुज की भुजाएँ)

$\therefore \quad \Delta AOB \cong \Delta BOC$ (भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता से)

अतः $\quad \angle AOB = \angle BOC$

अब चूंकि $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ (रैखिक युग्म कोण से)

$\therefore \angle AOB + \angle AOB = 180^\circ$

या $2\angle AOB = 180^\circ$

$$\angle AOB = \frac{180^\circ}{2}$$

$$\angle AOB = 90^\circ$$

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि $\angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^\circ$

इसलिए समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे पर लंब रहते हैं। यही सिद्ध करना था।

उदाहरण–4. सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजक एक आयत बनाते हैं।

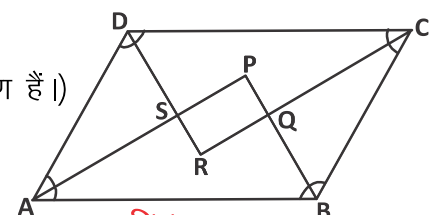
उपपत्ति : चित्रानुसार ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। $\angle A, \angle B, \angle C$ और $\angle D$ के कोण समद्विभाजक P, Q, R, S पर प्रतिच्छेद करते हैं, जिससे एक चतुर्भुज PQRS बनता है। (चित्र–22)

Δ ASD में,

चूंकि DS कोण D को और AS कोण A को समद्विभाजित करते हैं, इसलिए –

$$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ADC$$

$$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$$



चित्र–22

(क्योंकि $\angle A$ और $\angle D$ तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोण हैं।)

$$= \frac{1}{2} \times 180^o = 90^o \quad ....(1)$$

Δ ASD में,

$\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^o$ (क्यों?) ....(2)

समीकरण (1) व (2) से

$90^o + \angle DSA = 180^o$

$\angle DSA = 90^o$

अत: $\angle PSR = 90^o$ ($\angle DSA$ का शीर्षाभिमुख कोण)

इसी प्रकार $\angle BQC = \angle PQR$ होगा

अब ΔAPB में $\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180^o$ (त्रिभुज का कोण योग गुण)

लेकिन $\angle PAB + \angle PBA = 90^o$ ($\angle A$ व $\angle B$ तिर्यक रेखा AB के एक ही ओर का अन्त:कोण का अर्द्धक है।)

$\therefore \angle APB = 90^o$ होगा।

इसी प्रकार $\angle SRQ = 90^o$ होगा। इसलिए PQRS एक ऐसा चतुर्भुज है जिसके सभी कोण समकोण हैं। अत: चतुर्भुज PQRS एक आयत है।

सोचें एवं चर्चा करें

1. आयत के विकर्ण समान लंबाई के होते हैं।(संकेत – आयत एक समांतर चतुर्भुज है।)
2. वर्ग के विकर्ण समान और एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

उदाहरण–5. किसी समांतर चतुर्भुज ABCD में यदि विकर्णों का कटान बिंदु O हो और OA = 3 सेमी. और OB = 4 सेमी. हो तो रेखाखण्ड OC, OD, AC और BD की लंबाई ज्ञात कीजिए।

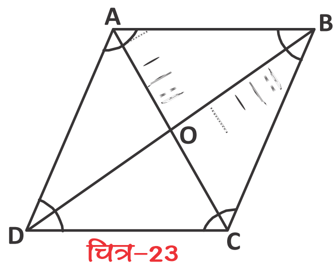
हल : ABCD एक समांतर चतुर्भुज जिसमें AC व BD का कटान बिंदु O है। (चित्र–23)

OA = 3 सेमी., OB = 4 सेमी.

चूंकि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण AC व BD एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

$OC = OA$

$\therefore$ OC = 3 सेमी.



चित्र–23

तथा $OD = OB$

$\therefore$ $OD = 4$ सेमी.

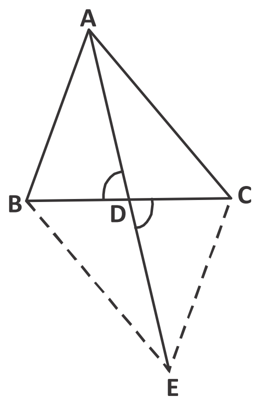
अब $AC = AO + OC = 3 + 3 = 6$ सेमी.

$BD = OB + OD = 4 + 4 = 8$ सेमी.

अतः स्पष्ट है कि $AC = 6$ सेमी., $BD = 8$ सेमी.

उदाहरण–6. त्रिभुज ABC में भुजा BC पर खींची गई माध्यिका AD है जो E तक इस प्रकार बढ़ाई गई है कि $AD = ED$। सिद्ध कीजिए कि ABEC एक समांतर चतुर्भुज है।

हल : माना त्रिभुज ABC है, जिसकी माध्यिका AD है। (चित्र–24)



चित्र–24

AD को E तक इस प्रकार बढ़ाइए कि $AD = ED$

अब BE और CE को मिलाए।

ΔABD और ΔECD में

$BD = DC$ (जहाँ D, BC का मध्य बिंदु है)

$\angle ADB = \angle EDC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$AD = ED$ (दिया है।)

$\therefore$ $\Delta ABD \cong \Delta ECD$ (भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता प्रमेय से)

तब $AB = CE$ (सर्वांगसम त्रिभुज की भुजाएँ)

तथा $\angle ABD = \angle ECD$

(रेखाएँ AB और CE के साथ तिर्यक रेखा BC द्वारा बने हुए एकांतर अन्तः कोण हैं।)

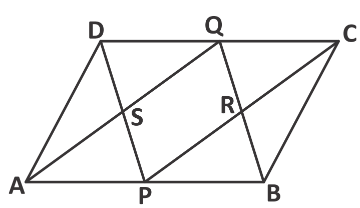
$\therefore AB \parallel CE$

इस प्रकार चतुर्भुज ABEC में

$AB \parallel CE$ और $AB = CE$

अतः ABEC एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रमेय–11.7 : **किसी चतुर्भुज में यदि उसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर हो और समांतर हो तो ऐसा चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है। सिद्ध कीजिए। (शिक्षक की मदद से करें।)**



चित्र–25

उदाहरण–7. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें P और Q क्रमशः सम्मुख भुजाओं AB और CD के मध्य बिंदु हैं, (चित्र–25) यदि AQ, DP को S पर प्रतिच्छेद करें और BQ, CP को R पर प्रतिच्छेद करें तो दर्शाइए कि–

(i) APCQ एक समांतर चतुर्भुज है।

(ii) DPBQ एक समांतर चतुर्भुज है।

(iii) PSQR एक समांतर चतुर्भुज है।

हल : (i) चतुर्भुज APCQ में

$AP \parallel QC$ (चूंकि $AB \parallel CD$) ...(1)

$$AP = \frac{1}{2} AB$$

$$CQ = \frac{1}{2} CD \quad \text{(दिया है)}$$

चूंकि $AB = CD$

इसलिए $AP = QC$ ....(2)

(1) व (2) से APCQ एक समांतर चतुर्भुज है।

(ii) इसी प्रकार चतुर्भुज DPBQ एक समांतर चतुर्भुज है, क्योंकि $DQ \parallel PB$ और $DQ = PB$ है।

(iii) चतुर्भुज PSQR में

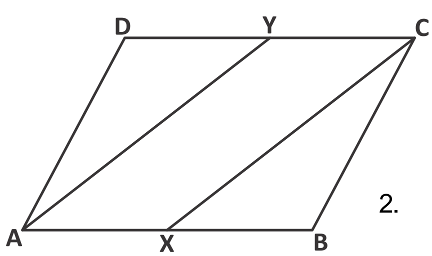
$SP \parallel QR$

(जहाँ SP, DP का एक भाग है, और QR, QB का एक भाग)

इसी प्रकार $SQ \parallel PR$ है।

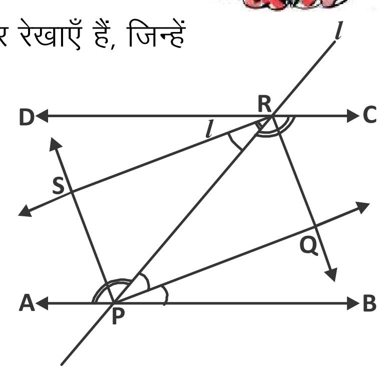
अतः PSQR एक समांतर चतुर्भुज है।

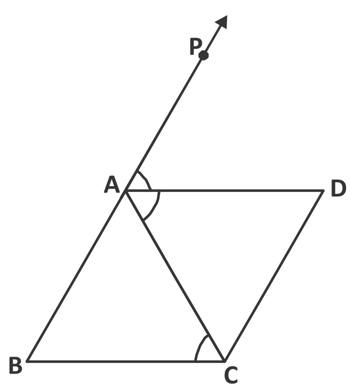
प्रश्नावली – 11.1



1. संलग्न समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं AB और CD के मध्य बिंदु क्रमशः x और y हैं, सिद्ध कीजिए कि AXCY समांतर चतुर्भुज है।

2. संलग्न चित्र में AB और DC दो समांतर रेखाएँ हैं, जिन्हें तिर्यक रेखा l रेखाखण्ड AB को P पर तथा रेखाखण्ड DC को R पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि अंतः कोणों के समद्विभाजक एक आयत बनाते हैं।

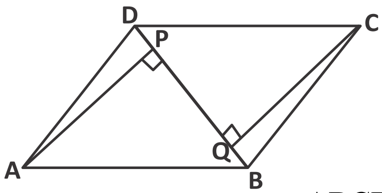




3. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है। AD बहिष्कोण PAC को समद्विभाजित करता है, और $CD \parallel BA$ है।

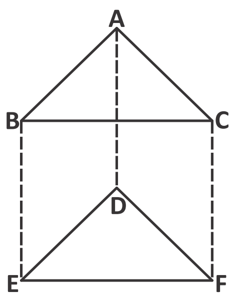
सिद्ध कीजिए कि–

(i) $\angle DAC = \angle BCA$ (ii) क्या ABCD एक समांतर चतुर्भुज है?



4. ABCD समांतर चतुर्भुज है। तथा AP और CQ शीर्षों A और C से विकर्ण BD पर क्रमशः लंब हैं तो सिद्ध कीजिए कि–

(i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$ (ii) $AP = CQ$



5. ABCD एक आयत है जिसमें विकर्ण AC दोनों कोणों A और C को समद्विभाजित करता है। तो सिद्ध कीजिए कि

(i) ABCD एक वर्ग है।

(ii) विकर्ण BD दोनों कोणों B और D को समद्विभाजित करता है।

6. ABC और DEF इस प्रकार हैं कि AB और BC क्रमशः DE और EF के बराबर और समांतर हैं, सिद्ध कीजिए कि AC और DF बराबर और समांतर हैं।

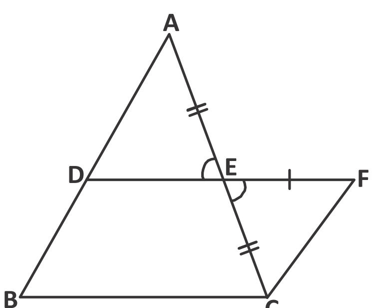
BLZC13

मध्य बिंदु प्रमेय (Mid Point Theorem)

आप त्रिभुज और चतुर्भुज के अनेक गुणों का अध्ययन कर चुके हैं। आइए त्रिभुज के एक अन्य गुण का अध्ययन करें जो त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिंदुओं से संबंधित है। आइए एक प्रमेय देखते हैं–

प्रमेय–11.8 : **किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर और उसकी आधी होती है।**

उपपत्ति : आइए इस कथन को सिद्ध करने के लिए ΔABC लें जिसमें D और E क्रमशः AB तथा AC के मध्य बिंदु हैं। D और E को मिलाते हुए रेखाखण्ड DF इस प्रकार खींचें कि बिंदु E रेखाखण्ड DF का मध्य बिंदु हो तथा C को F से मिलाएँ। (चित्र–26)



चित्र–26

अब आप देख सकते हैं कि ΔADE और ΔCFE में

$AE = CE$ (भुजा AC का मध्य बिंदु E है।)

$\angle AED = \angle CEF$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$DE = EF$ (भुजा DF का मध्य बिंदु E है।)

$\therefore \Delta ADE \cong \Delta CFE$ (भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता से)

$AD = CF$ तथा $\angle ADE = \angle CFE$ (सर्वांगसम त्रिभुज में)

अब $BD = AD$ तथा $AD = CF$

$\therefore BD = CF$ ....(1)

दो रेखाओं AD और CF को रेखा DF काटती है, तथा एकांतर अन्तः कोण $\angle ADE = \angle CFE$ बराबर है।

$\therefore AD \| CF$ ....(2)

(1) और (2) से चतुर्भुज DBCF में DB और FC बराबर व समांतर है। आप जानते हैं कि किसी भी चतुर्भुज में यदि उसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समांतर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होता है। इसलिए चतुर्भुज DBCF एक समांतर चतुर्भुज है।

इसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं $(DF = BC)$ और बिंदु D, E, F एक रेखा पर हैं। तथा $DE+EF = DF$, $DE = EF$

$$\therefore BC = 2DE \quad \text{तथा} \quad DE = \frac{1}{2}BC$$

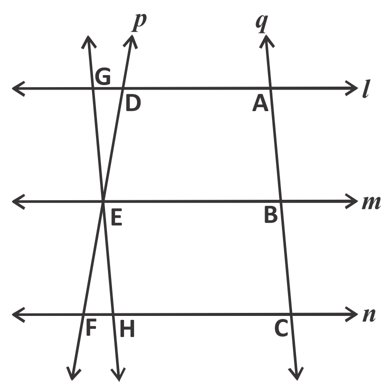
करके देखें

अब आप ऊपर दिए गए प्रमेय का विलोम लिखिए और उसका सत्यापन कीजिए।

प्रमेय–11.9 : **l, m और n तीन समांतर रेखाएँ हैं, जिन्हें तिर्यक रेखाएँ p और q इस प्रकार काटती हैं कि l, m और n रेखाएँ p पर समान अन्तः खण्ड DE और EF काटती हैं। दिखाइए कि l, m और n रेखाएँ q पर भी समान अन्तः खण्ड AB और BC काटती हैं।**

उपपत्ति : समांतर रेखाएँ l, m, n को तिर्यक रेखा p क्रमशः बिंदु D, E व F पर इस प्रकार काटती हैं कि $DE = EF$

तिर्यक रेखा q, समांतर रेखाओं l, m, n को क्रमशः बिंदु A, B व C पर काटती है तब हमें सिद्ध करना है कि $AB = BC$



चित्र–27

अब इसे सिद्ध करने के लिए एक रेखा खींचेंगे जो q के समांतर हो व बिंदु E से गुजरते हुए l व n को क्रमशः G व H पर काटें।

स्पष्ट है कि $AG \parallel BE$ (क्योंकि $l \parallel m$, A, G व B,E उन पर स्थित बिंदु हैं)

$GE \parallel AB$ (रचना से)

तब AGEB एक समांतर चतुर्भुज है। ....(1)

$\therefore AG = BE$ व $GE = AB$

इसी प्रकार $BE \parallel CH$ (क्योंकि $m \parallel n$, B,E व C, H उन पर स्थित बिंदु हैं)

$EH \parallel BC$ (रचना से)

तब BEHC एक समांतर चतुर्भुज है। ....(2)

$\therefore BE = CH$ व $EH = BC$

अब ΔGED व ΔHEF में

$\angle DGE = \angle EHF$ (एकांतर कोण)

$DE = EF$ (ज्ञात है)

$\angle DEG = \angle HEF$ (शीर्षाभिमुखकोण)

$\therefore \Delta GED \cong \Delta HEF$ (कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता से)

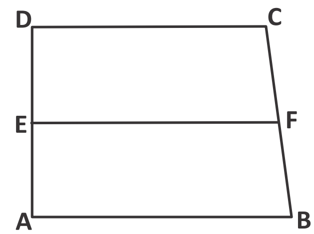
अतः $GE = EH$

$\because GE = AB, EH = BC$ समीकरण (1) और (2) से

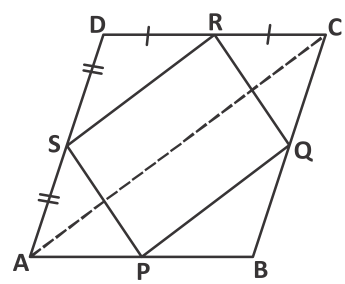
$\therefore AB = BC$

यही सिद्ध करना था।

प्रश्नावली – 11.2



1. समलंब चतुर्भुज ABCD की भुजा AD का मध्य बिंदु E तथा $AB \| DC$ है। बिन्दु E से होकर AB के समांतर खींची गई रेखा BC को F पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि F रेखाखण्ड BC का मध्य बिंदु है।
2. ABCD एक समचतुर्भुज है और P, Q, R, S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य बिन्दु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक आयत है।
3. ABCD एक आयत है, जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्यबिंदु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS समचतुर्भुज है।
4. ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य बिंदु हैं AC उसका एक विकर्ण है। दर्शाइए कि–



(1) $SR \| AC$ और $SR = \frac{1}{2} AC$ है।

(2) $PQ = SR$ है।

(3) PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

हमने सीखा

1. चतुर्भुज के चारों अंतःकोणों का योग 360° होता है।
2. किसी समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुज में बाँटता है।
3. चतुर्भुज निम्नलिखित प्रकार के होते हैं–

   (i) समांतर चतुर्भुज (ii) समचतुर्भुज (iii) समलंब चतुर्भुज

   (iv) आयत (v) वर्ग
4. एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होगा यदि

   (i) सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो या

(ii) सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर हो या

(iii) विकर्ण एक–दूसरे को समद्विभाजित करते हैं या

(iv) सम्मुख भुजा का प्रत्येक युग्म बराबर और समांतर हो।

5. आयत के विकर्ण एक–दूसरे को समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं व इसका विलोम भी।

6. वर्ग के विकर्ण एक–दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं व इसका विलोम भी।

7. समचतुर्भुज के विकर्ण एक–दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं व इसका विलोम भी।

8. किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर और उसकी आधी होती है।

BM982Q