

घन और घनाभ

[Cube and Cuboid]



15

हम अपने आस-पास कई वस्तुएँ देखते हैं जैसे— किताब, पेन, पेंसिल रबर आदि। इन ठोस आकारों में यानि त्रिविमीय (3D) आकारों में हम द्विविमीय (2D) आकृतियाँ जैसे त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त आदि देख सकते हैं। 3D वस्तुओं के फलक (पृष्ठ), किनारे और शीर्ष द्विविमीय आकृतियों के संयोजन से बनते हैं। अब हम त्रिविमीय वस्तुओं जैसे— घन, घनाभ के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन पता करेंगे। इसके लिए हम द्विविमीय आकृतियों व उनके क्षेत्रफल की अवधारणा का उपयोग करेंगे।

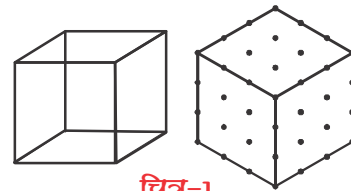
त्रिविमीय आकारों का चित्रण

हम द्विविमीय आकृतियों (त्रिभुज, चतुर्भुज एवं वृत्त आदि) का चित्रण सही-सही माप के साथ कागज पर कर सकते हैं।

क्या त्रिविमीय आकारों का भी चित्रण कागज पर सही-सही माप के साथ किया जा सकता है?

घन का चित्रण

3D आकार को बनाने में हम उसके सामने के फलक के साथ-साथ पीछे के फलकों को दिखाने का प्रयास करते हैं। घन अथवा घनाभ में 6 फलकें होती हैं। इनमें 8 शीर्ष होते हैं। इसमें किनारे कितने होते हैं?

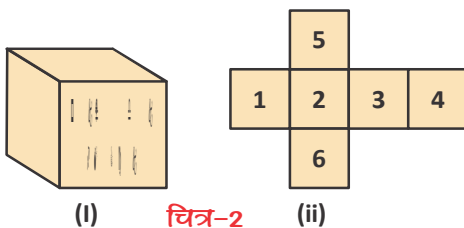


चित्र-1

त्रिविमीय आकारों को द्विविमीय आकृति में ञ्चोलना

1. घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

चॉक का एक बंद डिब्बा लीजिए और उसे चित्रानुसार खोलिए।



(i)

चित्र-2

(ii)

अब इसमें फलक, किनारों व शीर्षों की संख्या लिखिए। क्या इसके सभी पृष्ठ सर्वांगसम दिखते हैं?

हम पाते हैं कि चॉक के डिब्बे में प्रत्येक फलक का माप समान है अर्थात् प्रत्येक फलक सर्वांगसम होंगे। इस प्रकार का आकार घन होता है।

यदि वर्गाकार पृष्ठ की एक भुजा की लम्बाई a है, तो उसके वर्गाकार पृष्ठ का क्षेत्रफल a^2 होगा। क्या आप सभी पृष्ठों का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

हमीद— मैं सभी छः फलकों का क्षेत्रफल जोड़कर घन के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल निकाल सकता हूँ।

$$\begin{aligned} \text{घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 \\ &= 6a^2 \end{aligned}$$

करके देखें

1. गत्ते की एक शीट लें, उससे 8 सेमी. भुजा वाला एक घन के आकार का डिब्बा बनाएँ, जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई 8 सेमी. हो।
2. घन के कोर की लम्बाई 4 सेमी. है। उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना गुना बढ़ जाएगा, जब इसके कोर की लम्बाई 8 सेमी. कर दी जाए।

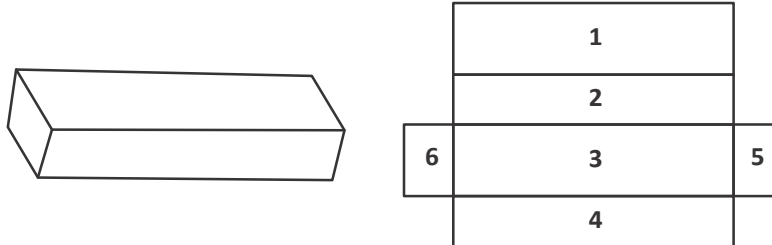


2. घनाभ

एक टूथपेस्ट का डिब्बा लीजिए और अब इसे चित्रानुसार खोलिए।



चित्र-3(i)



चित्र-3(ii)

अब इसमें फलकों, किनारों व शीर्षों की संख्या लिखिए?

क्या फलक 1 व 3, 2 व 4 और 5 व 6 की लंबाई और चौड़ाई समान दिखती है?

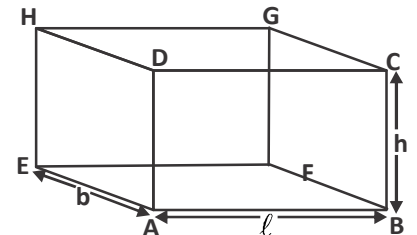
हमने देखा कि टूथपेस्ट के डिब्बे में प्रत्येक आमने-सामने के फलक का माप समान होता है अर्थात् यहाँ प्रत्येक आमने-सामने के फलक सर्वांगसम होंगे। इस प्रकार का आकार घनाभ होता है।



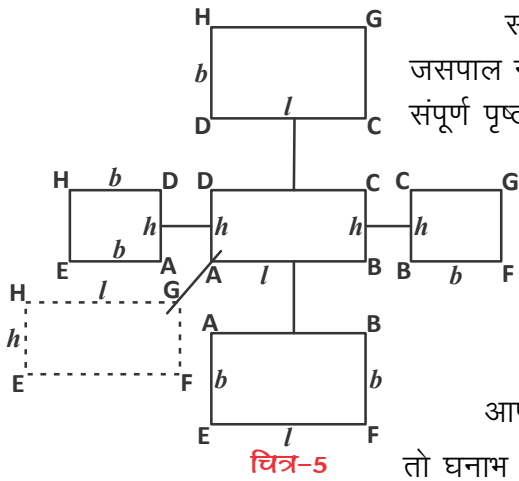
घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल (Surface Area of Cuboid)

अपने आसपास घनाभ के आकार की कुछ वस्तुएँ ढूँढिए और उनके चित्र अपनी कापी पर खींचिए। इनके शीर्षों को नामांकित कीजिए।

इसमें भुजाओं(किनारा या कोर) की संख्या कितनी है? कौन-कौन से फलक आपस में बराबर और आयताकार हैं?



चित्र-4



चित्र-5

सोचिए कि घनाभ का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल कैसे ज्ञात कर सकते हैं? जसपाल ने कहा कि सभी आयताकार पृष्ठों के क्षेत्रफल जोड़ने पर घनाभ का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं।

नेहा ने जूते का डिब्बा लेकर उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने का प्रयास किया।

लम्बाई के लिए l , चौड़ाई के लिए b और ऊँचाई के लिए h सभी पृष्ठों पर लिखा। फिर सभी पृष्ठों को अलग-अलग क्षेत्रफल निकाल कर उन्हें जोड़ दिया। (चित्र-5)

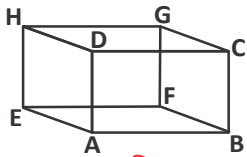
आप भी उक्त गतिविधि को अपनी कक्षा में कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{तो घनाभ का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= hl + lb + hl + lb + hb + hb \\ &= 2lb + 2lh + 2bh \\ &= 2(lb + lh + bh) \end{aligned}$$

करके देखें



1. घनाभ के संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल के सूत्र से घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल कैसे प्राप्त करेंगे?
2. यदि घनाभ की लम्बाई 6 से.मी., चौड़ाई 3 से.मी. और ऊँचाई 2 से.मी. हो तो उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना है?



चित्र-6

क्या आप बता सकते हैं कि घनाभ के पार्श्व पृष्ठ कौन-कौन से हैं?

घनाभ के चारों किनारों के पृष्ठ (ऊपर और नीचे के पृष्ठों को छोड़कर) पार्श्व पृष्ठ कहलाते हैं।

घनाभ के पार्श्व पृष्ठों का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे?

अजीत – मैं सभी पार्श्व पृष्ठों ABCD, EFGH, BFGC और AEHD का क्षेत्रफल जोड़कर घनाभ के पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल निकाल सकता हूँ।

मोनिका – हाँ, इस तरह से जोड़ने पर घनाभ के पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2hl + 2hb$
 $= 2h(l + b)$

क्या अब आप घन के पार्श्व पृष्ठों का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

घन के पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 4a^2$ (कारण बताइए)।

सोचें एवं चर्चा करें



दिखाए गए चित्रों की तरह अपनी गणित की पुस्तक रखिए और उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



ठोस वस्तुओं का आयतन

एक काँच का गिलास लें और उसे ऊपर तक पानी से भर दें। अब उसमें 2 नींबू के टुकड़े डालें। आपने क्या देखा? गिलास से कुछ पानी बाहर आ जाएगा। इससे यह पता चलता है कि नींबू ने गिलास के अंदर कुछ जगह घेरी। इसी तरह सभी ठोस वस्तुएँ जगह घेरती हैं। यही वस्तु का आयतन होता है।



चित्र-7

यदि वस्तुएँ खोखली हों और उनमें यदि किसी तरल पदार्थ जैसे— हवा, पानी को भरा जाए तो वह उस वस्तु का आकार ले लेते हैं। इस स्थिति में उस पदार्थ का आयतन वस्तु की धारिता या वस्तु की क्षमता कहलाती है।

घनाभ का आयतन (Volume of Cuboid)

क्या किसी कमरे के अंदर रखी हुई अलमारी की तुलना में कमरे का आयतन अधिक है? या फिर आपके पेंसिल बॉक्स का आयतन व इसके अंदर रखे पेंसिल और मिटाने वाली रबर के आयतन में से कौन अधिक है? क्या आप इसमें से किसी भी वस्तु का आयतन माप सकते हैं?

हम किसी क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए वर्ग इकाई का उपयोग करते हैं। यहाँ हम ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए घन इकाई का उपयोग करेंगे क्योंकि घन सबसे अधिक सुविधाजनक ठोस आकार है। क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम क्षेत्र को वर्ग इकाइयों में विभाजित करते हैं, इसी प्रकार किसी ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए हमें उस ठोस को घन इकाइयों में विभाजित करने की आवश्यकता होती है।

पेंसिल बॉक्स, पेंसिल और रबर से ज्यादा जगह घेरता है यानि पेंसिल बॉक्स का आयतन ज्यादा है।



$$1 \text{ घन सेमी.} = 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ घन मी.} = 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 1 \text{ m}^3$$

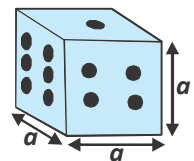
$$\begin{aligned} \text{घनाभ का आयतन} &= \text{आयताकार आधार फलक द्वारा घिरा क्षेत्र} \times \text{घनाभ की ऊँचाई} \\ &= A \times h = l \times b \times h \text{ घन इकाई} \end{aligned}$$

यहाँ A आधार फलक का क्षेत्रफल और h घनाभ की ऊँचाई है।

घन का आयतन (Volume of Cube)

हम जानते हैं कि घन एक विशेष प्रकार का घनाभ होता है जिसमें लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई के मान बराबर होते हैं। अर्थात् $l = b = h = a$ (माना)

$$\text{घन का आयतन} = \text{भुजा} \times \text{भुजा} \times \text{भुजा} = a \times a \times a$$



चित्र-8

$$= a^3 \text{ घन इकाई}$$

जहाँ a घन की भुजा है।

ठोस वस्तु का आयतन ज्ञात करने के लिए घन इकाई का उपयोग सबसे अधिक सुविधाजनक है। आयतन में घन इकाई का अर्थ उसमें सम्मिलित इकाई लम्बाई के घनों की संख्या से है।

उदाहरण-1. एक कमरा घनाभ के आकार का है, जिसकी लम्बाई 12 मीटर, चौड़ाई 8 मीटर और ऊँचाई 4 मीटर हैं यदि पुताई कराने की दर 7 रुपये प्रति वर्ग मीटर है, तो कमरे की चारों दीवारों और छत की पुताई करवाने में कितने रुपये खर्च होंगे?

हल : मान लीजिए कमरे की लम्बाई $= l = 12$ मी., चौड़ाई $= b = 8$ मी. एवं ऊँचाई $= h = 4$ मी. कमरा घनाभ के आकार का है, इसलिए,

$$\text{कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल} = \text{आधार का परिमाप} \times \text{कमरे की ऊँचाई}$$

$$= 2(l + b) \times h$$

$$= 2(12 + 8) \times 4 = 160 \text{ वर्ग मीटर}$$

$$\text{छत का क्षेत्रफल} = 12 \times 8 = 96 \text{ वर्ग मीटर}$$

\therefore कुल क्षेत्रफल जिसमें पुताई करवाना है $= 160 + 96 = 256$ वर्ग मीटर

पुताई की दर 7 रुपये प्रति वर्ग मीटर है, अतः छत सहित कमरे की पुताई कराने का खर्च

$$= \text{कुल क्षेत्रफल जिसमें पुताई करवाना है} \times 7$$

$$= 256 \times 7 = 1792 \text{ रुपये}$$

करके देखें



कुछ मित्रों के साथ अपनी कक्षा की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई को माप कर ज्ञात कीजिए कि—

- (i) कमरे की खिड़कियों, दरवाजों के क्षेत्रफल छोड़कर कमरे की दीवारों का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल।
- (ii) इस कमरे में पुताई करवाना हो तो कुल कितने क्षेत्रफल की पुताई करानी होगी?
- (iii) आपके शहर/गाँव में पुताई की दर कितनी है? उस दर से कमरे की दीवारों पर पुताई कराने में कितना खर्च करना पड़ेगा?

उदाहरण-2. अनवर ने अपने घर की छत पर एक घनाकार पानी की टंकी (ढक्कन सहित) बनवाई, जिसके बाहरी किनारे की लम्बाई 1.8 मीटर है। वह इसके आधार के पृष्ठ को छोड़कर शेष सभी पृष्ठों पर 30 सेमी. भुजा वाली वर्गाकार टाईल्स लगवाना चाहता है। यदि एक दर्जन टाईल्स लगवाने में 396 रुपये खर्च होते हैं, तो अनवर को कितने रुपये खर्च करने पड़ेंगे।

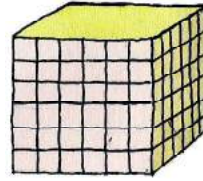
हल : चूँकि अनवर को पानी की टंकी के पाँच बाहरी पृष्ठों पर टाइल्स लगवानी हैं, इसलिए लगने वाली टाइल्स की संख्या का पता लगाने के लिए, इन पृष्ठों का कुल क्षेत्रफल ज्ञात करना पड़ेगा।

घनाकार टंकी के बाह्य किनारे की लम्बाई $a = 1.8$ मी. = 180 सेमी.

$$\begin{aligned} \therefore \text{घनाकार टंकी के पाँच पृष्ठों का क्षेत्रफल} &= 5a^2 \\ &= 5 \times 180 \times 180 \text{ वर्ग सेमी.} \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{प्रत्येक वर्गाकार टाइल का क्षेत्रफल} &= \text{भुजा} \times \text{भुजा} \\ &= 30 \times 30 \text{ वर्ग सेमी.} \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{टाइल्स की संख्या} &= \frac{\text{टंकी के 5 पृष्ठों का क्षेत्रफल}}{\text{प्रत्येक टाइल का क्षेत्रफल}} \\ &= \frac{5 \times 180 \times 180}{30 \times 30} = 180 \end{aligned}$$



एक दर्जन टाइल्स लगवाने पर खर्च = 396 रुपये

$$\therefore \text{एक टाइल लगवाने पर खर्च} = \frac{396}{12} = 33 \text{ रुपये}$$

इसलिए 180 टाइल्स लगवाने पर खर्च = $180 \times 33 = 5940$ रुपये

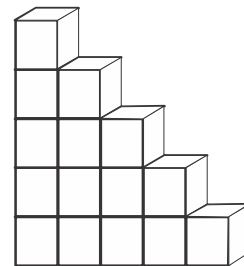
उदाहरण-3. कुछ घनाकार टुकड़ों (blocks) से खेलते हुए विलियम ने चित्रानुसार एक संरचना बनाई। यदि प्रत्येक घन के किनारे की लम्बाई 4 सेमी. हो, तो विलियम द्वारा बनाए गए संरचना का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि प्रत्येक घन के किनारे की लम्बाई $a = 4$ सेमी.

$$\begin{aligned} \therefore \text{प्रत्येक घन का आयतन} &= a \times a \times a \\ &= 4 \times 4 \times 4 \\ &= 64 \text{ घन सेमी.} \end{aligned}$$

संरचना में लगे घनों की संख्या = 15

$$\therefore \text{संरचना का आयतन} = 64 \times 15 = 960 \text{ घन सेमी.}$$



करके देखें

अपनी पुस्तक के किसी आयताकार पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। अब पुस्तक की ऊँचाई मापकर पुस्तक का आयतन ज्ञात कीजिए। अपने स्कूल के पुस्तकालय की अलमारी के किसी खाने (shelf) में आपकी पुस्तकों जैसी आकार वाली कितनी पुस्तकें रखी जा सकती हैं? क्या आप विद्यालय में प्रतिदिन समाचार पत्र पढ़ते हैं? पुस्तक के स्थान पर पिछले कुछ दिनों के इकट्ठे किए गए समाचार पत्रों के साथ उपर्युक्त गतिविधि कर बताइए कि पुस्तकालय की अलमारी कितने दिनों के समाचार पत्र से भर जायगी?



प्रश्नावली - 15.1



1. एक घन के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल 1350 वर्ग मीटर है, तो इसका आयतन ज्ञात कीजिए?
2. एक घनाभ का आयतन 1200 घन सेमी. है। इसकी लम्बाई 15 सेमी. और चौड़ाई 10 सेमी. है। इसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
3. एक घनाकार डिब्बे का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना होगा यदि—
 - (i) प्रत्येक भुजा को दोगुना किया जाए?
 - (ii) प्रत्येक भुजा को तीन गुना किया जाए?
 - (iii) प्रत्येक भुजा को n गुना किया जाए?
4. प्रियंका के घर के सबसे बड़े कमरे के फर्श का परिमाण 250 मीटर है। इस कमरे के चारों दीवारों की पुताई 10 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से कराने पर 15000 रुपये खर्च होते हैं, तो कमरे की ऊँचाई कितनी है? (संकेत— चारों दीवारों का क्षेत्रफल = पार्श्वपृष्ठीय क्षेत्रफल)
5. एक घनाकार पेटी के कोर की लम्बाई 10 सेमी. है। एक दूसरे घनाभ के आकार की पेटी की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई, क्रमशः 12.5 सेमी., 10 सेमी. और 8 सेमी. है।
 - (i) किस पेटी का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिक है और कितना अधिक?
 - (ii) किस पेटी का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल कम है और कितना कम?
6. एक गाँव की जनसंख्या 4000 है। इस गाँव में रहने वाले प्रत्येक व्यक्ति को प्रतिदिन 150 लीटर पानी की आवश्यकता पड़ती है। गाँव में पानी की एक टंकी है, जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 20 मीटर, 15 मीटर और 6 मीटर है यदि इस टंकी को पूरा भर दिया जाय तो गाँव की कितने दिनों की पानी की आवश्यकता पूरी हो जाएगी? (संकेत – 1 घन मीटर = 1000 लीटर)
7. एक 3 मीटर गहरी और 40 मीटर चौड़ी नदी 2 किमी. प्रति घंटे की दर से बह रही है। क्या आप ज्ञात कर सकते हैं कि एक मिनट में नदी का कितना पानी समुद्र में गिर रहा है?
8. एक घनाभ का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 3328 वर्ग मीटर है। यदि घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई में अनुपात 4 : 3 : 2 हो, तो घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए।
9. तीन घन जिनमें प्रत्येक का आयतन 125 घन सेमी. है, को किनारों से जोड़कर एक घनाभ बनाया गया। इस प्रकार बने घनाभ के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
10. एक जलाशय घनाभ के आकार का है, इसकी लंबाई 20 मीटर है। यदि जलाशय में से 18 किलोलीटर पानी निकाल लिया जाय तो पानी का स्तर 15 सेमी. नीचे चला जाता है। जलाशय की चौड़ाई ज्ञात कीजिए। (संकेत— 1 किलोलीटर = 1 घन मीटर)

11. एक खुले मैदान में 10 मीटर लंबी एक दीवार का निर्माण किया जाना है। दीवार की ऊँचाई 4 मी. और मोटाई 24 सेमी. है। यदि इस दीवार को 24 सेमी. \times 12 सेमी. \times 8 सेमी. विमाओं वाली ईंटों से बनाया जाना है, तो इसके लिए कितनी ईंटों की आवश्यकता होगी?
12. 8 मीटर लंबा 6 मीटर चौड़ा और 3 मीटर गहरा एक घनाभाकार गड़ढ़ा खुदवाने में 30 रुपये प्रति घन मीटर की दर से होने वाला व्यय ज्ञात कीजिए।
13. किसी गोदाम की माप 60 मीटर \times 25 मीटर \times 10 मीटर है। इस गोदाम में 1.5 मीटर \times 1.25 मीटर \times 0.5 मीटर की माप वाले लकड़ी के कितने अधिकतम क्रेट (crate) रखे जा सकते हैं?
14. 12 सेमी. भुजा वाले एक ठोस घन को बराबर आयतन वाले 8 घनों में काटा जाता है। नए घन की भुजा क्या होगी? साथ ही, इन दोनों घनों के पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात भी ज्ञात कीजिए।
15. मैरी अपने क्रिसमस वृक्ष को लकड़ी के एक घनाभाकार बॉक्स के अंदर रखकर रंगीन कागज से ढकना चाहती है। मैरी जानना चाहती है कि उसे कितना कागज खरीदना चाहिए। यदि उपर्युक्त बॉक्स की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 80 सेमी., 40 सेमी. एवं 20 सेमी. है, तो उसे 40 सेमी. भुजा वाली कागज की कितनी वर्गाकार शीटों की आवश्यकता होगी?



हमने सीखा

1. घन एक नियमित सम षट्फलक ठोस आकृति है जिसमें 4 पार्श्व फलक और 8 शीर्ष हैं।
2. यदि घन के किनारे की लंबाई 'a' है, तब

$$\text{घन के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल} = 6a^2$$

$$\text{घन के पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल} = 4a^2$$

$$\text{घन का आयतन} = a^3$$
3. यदि घनाभ की लंबाई 'l', चौड़ाई 'b' और ऊँचाई 'h' है तब

$$\text{घनाभ का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल} = 2(\ell b + bh + lh)$$

$$\text{घनाभ का पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल} = 2h(\ell + b)$$

$$\text{घनाभ का आयतन} = \ell bh$$
4. ठोस वस्तुएँ जिनका आयतन अधिक होता है वे अधिक जगह घेरती हैं।

