घातांक

[EXPONENT]

AREUU5

03

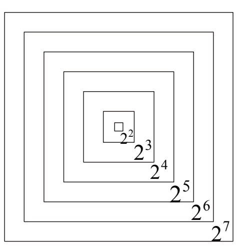
निधि, मयंक और रेशमी संख्याओं से जुड़ी पहेलियाँ पूछ रहे थे–

निधि– दस हजार को एक लाख से गुणा करें तो कौन सी संख्या मिलेगी?

रेशमी– सौ करोड़ याने 1 अरब। इस संख्या में कितने शून्य होंगे?

मयंक– 9 शून्य होंगे। क्योंकि दस हजार याने 10^4 और 1 लाख याने 10^5 या $(10^4 \times 10^5 = 10^9)$

मयंक– अब मेरी बारी, 7 बॉक्स का एक डिब्बा है। हर छोटा बॉक्स दूसरे के अंदर है। पहले छोटे वाले में 2 मोती हैं और हर अगले बॉक्स में उससे दुगुने मोती हैं, तो 7वें बॉक्स में कितने होंगे? ये बहुत कठिन है इसमें तुम्हें बहुत समय लगेगा।



निधि– क्यों? 7 बॉक्स है और संख्या दुगुनी हो रही है इसका मतलब की $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$ याने $2^7 = 128$ होगी।

रेशमी– पर यह भी पता करो कि कुल कितने मोती हैं? आपस में चर्चा कीजिए व कुल मोती कितने हैं, लिखिए।

करके देखें

1. शतरंज के एक खाने में चावल के चार दाने हैं, दूसरे में उसके चार गुने, तीसरे में दूसरे के चार गुने चावल हो जाते हैं तो बताओ चौथे में कितने दाने हैं? इसे घातांक रूप में लिखिए।
2. हल कीजिए–

   (i) $3^5 \times 3^7$ (ii) $17\times17\times17\times17$ (iii) $5\times3\times3\times3\times3$

   (iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5$ (v) $\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$
3. सूर्य से पृथ्वी की दूरी लगभग 150000000 किलोमीटर है इसे 10 के घातांक के रूप में लिखिए?

   आप भी ऐसे तीन सवाल बनाइए व दूसरों को हल करने के लिए दीजिए।

घातांक के नियम (Laws of Exponent)

यदि a एक वास्तविक संख्या व m, n पूर्णांक संख्या है तो

1. गुणा का नियम $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2. भाग का नियम $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$

3. घातों की घात का नियम $(a^m)^n = a^{mn}$

4. $(ab)^m = a^m \times b^m$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

6. a^0 का अर्थ

   $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ जहाँ $a \neq 0$

   यदि $m = n$ हो, तो

   $$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m}$$

   $$1 = a^0$$

   अतः $a^0 = 1$

7. $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$ या $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

उदाहरण–1. सरल कीजिए–

(i) $3^5 \times 9^4$ (ii) $(4\times3)^4 \times \left(\frac{2}{4}\right)^6$ (iii) $\frac{(6^2)^4 \times 6^5}{6^4}$

हल : (i) $3^5 \times 9^4$

$= 3^5 \times (3^2)^4 = 3^5 \times 3^{2\times4}$ $[(a^m)^n = a^{m\times n}]$

$= 3^5 \times 3^8 = 3^{(5+8)}$ $[a^m \times a^n = a^{m+n}]$

$= 3^{13}$

(ii) $(4 \times 3)^4 \times \left(\frac{2}{4}\right)^6$

$= \left(4^4 \times 3^4\right) \times \frac{2^6}{4^6}$ $\qquad \because \left[\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\right]$ और $\left[(ab)^m = a^m \times b^m\right]$

$= \left((2^2)^4 \times 3^4\right) \times \frac{2^6}{(2^2)^6}$

$= (2^{2\times4} \times 3^4) \times \frac{2^6}{2^{2\times6}}$ $\qquad \left[(a^m)^n = a^{m\times n}\right]$

$= 2^8 \times 3^4 \times \frac{2^6}{2^{12}} = 2^8 \times 3^4 \times 2^{6-12}$ $\qquad \left[\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right]$

$= 2^8 \times 3^4 \times 2^{-6}$

$= 2^{8-6} \times 3^4 = 2^2 \times 3^4$ $\qquad \left[a^m \times a^n = a^{m+n}\right]$

(iii) $\frac{\left(6^2\right)^4 \times 6^5}{6^4} = \frac{6^{2\times4} \times 6^5}{6^4}$ $\qquad \left[(a^m)^n = a^{m\times n}\right]$

$= \frac{6^8 \times 6^5}{6^4} = \frac{6^{8+5}}{6^4} = \frac{6^{13}}{6^4}$ $\qquad \left[a^m \times a^n = a^{m+n}\right]$

$= 6^{13-4} = 6^9$ $\qquad \left[\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right]$

करके देखें

निम्नलिखित को सरल कीजिए–

(i) $\frac{5^4 \times 5^6}{5^3}$ $\qquad$ (ii) $\frac{(2^2)^3 \times 8^7}{4^4}$

(iii) $\frac{(9\times3)^8}{(3)^5}$ $\qquad$ (iv) $(3\times2)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6$

ऋणात्मक घातांकों की घात

हम जानते हैं कि घातांक में संख्याओं को घात के रूप में लिखते हैं–

जैसे–

1 किलोमीटर	= 1000 मी.	= 10^3 मी.
1 हेक्टोमीटर	= 100 मी.	= 10^2 मी.
1 डेकामीटर	= 10 मी.	= 10^1 मी.
1 मीटर	= 1 मी.	= ?

यहाँ हम संख्या को 10 की घात के मानक रूप में व्यक्त कर रहे हैं।

यदि हमारे पास इकाई से छोटी संख्याएँ है तो उन्हें हम किस रूप में लिखेंगे–

इससे पहले निम्नलिखित पैटर्न को देखें–

1 डेसीमीटर $= \dfrac{1}{10}$ मीटर $= 10^{-1}$ मीटर

1 सेंटीमीटर $= \dfrac{1}{100}$ मीटर $= 10^{-2}$ मीटर

1 मिलीमीटर $= \dfrac{1}{1000}$ मीटर $= 10^{-3}$ मीटर

ऊपर दिखाए अनुसार हम लिख सकते हैं कि $\dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{10^1} = 10^{-1}$

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{10\times10} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$\frac{1}{1000} = \frac{1}{10\times10\times10} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

याने $\dfrac{1}{10^n} = 10^{-n}$

तब क्या $\dfrac{1}{10^{-n}} = 10^n$ होगा? चर्चा करो।

4^{-3} को हम $\frac{1}{4^3}$ लिखते हैं। इसी तरह से हम लिख सकते हैं–

$$5^{-6} = \frac{1}{5^6}$$

कुछ और उदाहरणों पर विचार करते हैं–

$$\frac{1}{6^{-3}} = 6^3$$

$$\frac{1}{9^2} = 9^{-2}$$

$$3^3 = \frac{1}{3^{-3}}$$

ऊपर के उदाहरणों से हम यह परिणाम प्राप्त कर सकते हैं–

$$1 = 6^3 \times 6^{-3}$$

$$1 = 9^2 \times 9^{-2}$$

$$3^3 \times 3^{-3} = 1$$

इन उदाहरणों से हम कह सकते हैं कि शून्येतर परिमेय संख्या 'a' के लिए $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ है जो कि a^m का गुणात्मक प्रतिलोम है।

क्योंकि $a^m \times a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1$, जहाँ '$m$' पूर्णांक संख्याएँ है।

करके देखें

1. निम्नलिखित संख्याओं को घातांक रूप में लिखें–

   (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{243}$ (iii) $\frac{1}{196}$

2. निम्नलिखित के गुणात्मक प्रतिलोम लिखिए–

   (i) 10^{-5} (ii) $\frac{1}{2^3}$ (iii) P^{-n} (iv) 5^{-7}

3. सरल कीजिए और कारण बताइए–

   (i) $\left((5^2)^3 \times 5^4\right) \div 5^6$ (ii) $2^2 \times \frac{3^2}{2^{-2}} \times 3^{-1}$ (iii) $(14^{-2} \times 13^{-2}) \div 6^{-1}$

उदाहरण–2. निम्नलिखित को सरल कीजिए–

(i) $3^4 \times 3^{-8}$ (ii) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$

हल : (i) हम जानते हैं– $3^{-8} = \dfrac{1}{3^8}$ $\left[a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}\right]$

अत: $3^4 \times 3^{-8} = 3^4 \times \dfrac{1}{3^8} = \dfrac{3^4}{3^8}$

$= 3^{4-8} = 3^{-4}$

(ii) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4} = \dfrac{1}{(-2)^3} \times \dfrac{1}{(-2)^4} = \dfrac{1}{(-2)^{3+4}}$

$= \dfrac{1}{(-2)^7} = (-2)^{-7}$

उदाहरण–3. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

(i) 5^{-2} (ii) $\dfrac{1}{2^{-5}}$ (iii) $\dfrac{4^7}{4^4}$

हल : (i) $5^{-2} = \dfrac{1}{(5)^2} = \dfrac{1}{5 \times 5} = \dfrac{1}{25}$

(ii) $\dfrac{1}{2^{-5}} = 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

(iii) $\dfrac{4^7}{4^4} = 4^{7-4} = 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

उदाहरण–4. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{-3}$ (ii) $4^4 \times 16^{-2} \times 4^0$

हल : (i) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{-3} = \dfrac{(4)^{-3}}{(7)^{-3}} = 4^{-3} \times \dfrac{1}{7^{-3}}$ $\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}\right]$

$$= \frac{7^3}{4^3} \quad \left[a^{-m} = \frac{1}{a^m} \ or \ a^m = \frac{1}{a^{-m}} \right]$$

$$= \frac{7 \times 7 \times 7}{4 \times 4 \times 4} = \frac{343}{64}$$

(ii) $4^4 \times 16^{-2} \times 4^0$

$$= \frac{4^4 \times 4^0}{16^2} \quad \left[a^{-m} = \frac{1}{a^m} \right]$$

$$= \frac{4^4 \times 4^0}{\left(4^2\right)^2}$$

$$= \frac{4^4 \times 4^0}{4^4} \quad \left[\left(a^m\right)^n = a^{m \times n} \right]$$

$$= 4^{4+0-4} = 4^0$$

$$= 1$$

उदाहरण–5. सरल कीजिए– $\left[\left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \right\} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \right]$

हल : $\left[\left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \right\} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \right]$ $\left[\text{हम जानते है } \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \right]$

$$= \left[\left(\frac{1^{-3}}{3^{-3}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}} \right) \div \frac{1^{-2}}{5^{-2}} \right] \quad \left[\text{हम जानते है } a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ और } a^m = \frac{1}{a^{-m}} \right]$$

$$= \left[\left(\frac{3^3}{1^3} - \frac{2^3}{1^3} \right) \div \frac{5^2}{1^2} \right] = \left(\frac{27}{1} - \frac{8}{1} \right) \div 25$$

$$= (27 - 8) \div 25 = \frac{19}{25}$$

उदाहरण–6. सरल कीजिए– $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-2}$

हल : $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-2}$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{5^2}{2^2}\right)^{-2} \quad \left\{\because \frac{25}{4} = \frac{5\times5}{2\times2} = \frac{5^2}{2^2}\right\} \quad \left[\because (a^m)^n = a^{mn}\right]$$

$$= \frac{5^3}{2^3} \times \frac{2^4}{5^4} = 5^{3-4} \times 2^{4-3} \qquad \left[\text{जैसे } \frac{1}{a^m} = a^{-m} \text{ और } \frac{1}{a^{-m}} = a^m\right]$$

$$= 5^{-1} \times 2^1 = \frac{2}{5}$$

उदाहरण–7. यदि $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ तो x^{-2} का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

$$x = \frac{3^2}{2^2} \times \frac{2^{-4}}{3^{-4}} \quad \left[\text{हम जानते है } \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\right]$$

$$x = \frac{3^2}{2^2} \times \frac{3^4}{2^4} = \frac{3^{2+4}}{2^{2+4}} = \frac{3^6}{2^6} = \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

$$x^{-2} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^6\right]^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-12}$$

$$x^{-2} = \frac{3^{-12}}{2^{-12}} = \frac{2^{12}}{3^{12}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

उदाहरण–8. सरल कीजिए–

(i) $\dfrac{3^{2m+1} \times 9^{3m}}{3^{4m+1}}$ (ii) $\dfrac{x^{a+b}y^{a-b}}{x^{a+2b}y^{a-2b}}$

हल : (i) $\dfrac{3^{2m+1}\times 9^{3m}}{3^{4m+1}}$

$=\dfrac{3^{2m+1}\times (3^2)^{3m}}{3^{4m+1}}$

$=\dfrac{3^{2m+1}\times 3^{6m}}{3^{4m+1}} \quad = \dfrac{3^{2m+1+6m}}{3^{4m+1}}$

$=\dfrac{3^{8m+1}}{3^{4m+1}} \quad = 3^{8m+1-4m-1}$

$= 3^{4m}$

(ii) $\dfrac{x^{a+b}y^{a-b}}{x^{a+2b}y^{a-2b}}$

$= x^{a+b}\times y^{a-b}\times x^{-(a+2b)}\times y^{-(a-2b)}$

$= x^{a+b-a-2b}\times y^{a-b-a+2b}$

$= x^{-b}\times y^{b}$

$=\dfrac{1}{x^b}\times y^b \quad = \left(\dfrac{y}{x}\right)^b$

दशमलव संख्या का विस्तारित रूप

संख्या 328 का विस्तारित रूप निम्नलिखित होगा–

$328 = 300+20+8$

$= 3\times 100+2\times 10+8\times 1$

$= 3\times 10^2+2\times 10^1+8\times 10^0$

इसी तरह $4158 = 4\times 1000+1\times 100+5\times 10+8\times 1$

$= 4\times 10^3+1\times 10^2+5\times 10^1+8\times 10^0$

इस तरह हम संख्या 132.28 को घातांक के विस्तारित रूप में लिखें तो–

$$132.28 = 1 \times 100 + 3 \times 10 + 2 \times 10^0 + 2 \times \frac{1}{10} + 8 \times \frac{1}{100}$$

$$= 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2}$$ होगा।

करके देखें

निम्नलिखित संख्याओं को घातांक के विस्तारित रूप में लिखिए।

(i) 15.1 (ii) 512.23

(iii) 537.204 (iv) 205.003

बहुत बड़ी संख्याओं और बहुत छोटी संख्याओं का मानक निरूपण

बड़ी संख्या जैसे– सूर्य का व्यास लगभग 14000000000 मी. है जिसे मानक रूप में 1.4×10^{10} मी. लिखते हैं। यहाँ संख्या 10 की घात में आएगी। इसी प्रकार 6.2×10^5 मी. को सामान्य रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करेंगे– 6.2×100000 मी. = 620000 मी.

इसी प्रकार बहुत छोटी संख्याओं जैसे– एक इलेक्ट्रॉन का आवेश 0.00000000000000000016 कूलॉम होता है तो हम इलेक्ट्रोन के आवेश को घातांक के रूप में 1.6×10^{-19} कूलॉम लिखते हैं।

यहाँ हम संख्याओं को 10 के घात के रूप में लिखते हैं और इस तरह बड़ी और छोटी संख्याओं, दोनों का मानक निरूपण करते हैं।

बहुत बड़ी व बहुत छोटी संख्याओं के बीच तुलना

सूर्य व पृथ्वी के बीच की दूरी $1.496\times10^{11}\text{m}$ है और पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी $3.84\times10^8\text{m}$ है। जब सूर्यग्रहण के दौरान चंद्रमा, पृथ्वी और सूर्य के बीच आ जाता है तो इस समय चंद्रमा और सूर्य के बीच की दूरी कितनी होगी?

$$=1.496\times10^{11}-3.84\times10^8$$

$$=1.496\times1000\times10^8-3.84\times10^8$$

$$=(1496-3.84)\times10^8\text{m}$$

$$=1492.16\times10^8\text{m}$$

उदाहरण–9. निम्नलिखित को मानक रूप में व्यक्त कीजिए–

(i) 40600000000 (ii) 2150000000000

हल : (i) 4.06×10^{10}

(ii) 2.15×10^{12}

उदाहरण–10. निम्नलिखित संख्याओं को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए–

(i) 3×10^{-8} (ii) 4.37×10^{-5}

हल : (i) 3×10^{-8}

$$=\frac{3}{10^8}=\frac{3}{100000000}=0.00000003$$

(ii) 4.37×10^{-5}

$$=\frac{4.37}{10^5}=\frac{4.37}{100000}=0.0000437$$

प्रश्नावली – 3.1

1. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ (ii) $\frac{1}{3^{-4}}$ (iii) $\frac{6^7}{2^3\times3^7}$

2. निम्नलिखित को सरल कीजिए–

(i) $(-4)^3\times(-2)^{-3}$ (ii) $(-3)^4\times\left(\frac{5}{3}\right)^4$ (iii) $(-5)^3\div(5)^{-7}$

ARNQVS

3. सरल कीजिए–

(i) $\frac{16\times t^{-3}}{4^{-3}\times8\times t^{-6}}$ $(t\neq0)$ (ii) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{-1}$

4. सिद्ध कीजिए–

(i) $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}\times\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c}\times\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}=1$

(ii) $\frac{1}{1+x^{m-n}}+\frac{1}{1+x^{n-m}}=1$

5. निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में लिखिए।
   (i) 0.00000000000852 (ii) 8020000000000000
   (iii) 41960000000
6. निम्नलिखित संख्याओं को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए।
   (i) 5.02×10^{-6} (ii) 7×10^{-8}
   (iii) 1.00001×10^{9}
7. निम्नलिखित कथनों में संख्या को मानक रूप में लिखिए–
   (i) लाल रक्त कोशिकाओं का आकार 0.000007m होता है।
   (ii) पृथ्वी का व्यास 12756000m है।
   (iii) कागज़ की मोटाई 0.08m है।

धनात्मक परिमेय घातांक

हम जानते हैं कि $2^3 = 8$ है।

इसे हम ऐसे भी लिखते हैं– $8^{\frac{1}{3}} = 2$

इसी प्रकार $5^3 = 125$ को हम $(125)^{\frac{1}{3}} = 5$ भी लिख सकते हैं।

व्यापक रूप में यदि x व y दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं और किसी धनात्मक पूर्णांक m के लिए $x^m = y$ है तो $x = y^{\frac{1}{m}}$ भी लिख सकते हैं। $y^{\frac{1}{m}}$ को $\sqrt[m]{y}$ भी लिख सकते हैं।

$\sqrt[m]{y}$ को हम y का m वाँ मूल कहते हैं।

जैसे 9 का दूसरा मूल = $\sqrt{9} = \sqrt[2]{9} = 3$

अन्य उदाहरण देखें तो यदि किसी घन का आयतन 64 घन इकाई है तो उसकी भुजा $64^{\frac{1}{3}}$ इकाई होगी याने

64 का तीसरा मूल = $\sqrt[3]{64} = 4$ इकाई,

अर्थात् घन की भुजा 4 इकाई होगी।

'दूसरे मूल' को 'वर्गमूल' और 'तीसरे मूल' को 'घनमूल' भी कहते हैं।

625 का चौथा मूल = $\sqrt[4]{625} = 5$

इस प्रकार हम x^m को किसी धनात्मक परिमेय घातांक m के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

यदि x एक धनात्मक परिमेय संख्या है तथा $m=\frac{P}{q}$ एक धनात्मक परिमेय घातांक हैं, तो $x^{\frac{p}{q}}$ को हम x^p के q वें मूल के रूप में परिभाषित कर सकते हैं।

जैसे– यदि किसी गोले का आयतन $\frac{4}{3}\pi\times(125)$ है याने $r^3=125$ है तो उसकी त्रिज्या होगी–

$$r=\sqrt[3]{125}=125^{\frac{1}{3}}=(5^3)^{\frac{1}{3}}$$

त्रिज्या $r=5^{3/3}=5^1=5$

अर्थात् $x^{\frac{p}{q}}=\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$

उदाहरण के लिए हम $(8)^{\frac{5}{3}}$ को विभिन्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं।

$(8)^{\frac{5}{3}}$ या $(8^5)^{\frac{1}{3}}$ या $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^5$ या $\left(2^{3\times\frac{1}{3}}\right)^5$

या 2^5 या 32

अर्थात् यदि x एक धनात्मक परिमेय संख्या है तो किसी भी धनात्मक परिमेय घातांक $\frac{p}{q}$ के लिए $\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}=\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$

उदाहरण–11. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $(27)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{4}{5}}$

हल : (i) $(27)^{\frac{2}{3}}$ $=\left(27^2\right)^{\frac{1}{3}}$ $=(729)^{\frac{1}{3}}$

$=(3\times3\times3\times3\times3\times3)^{\frac{1}{3}}$

$=3^{6\times\frac{1}{3}}=3^2$ $=9$

या $\quad (27)^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2$

$$= \left(3^{3\times\frac{1}{3}}\right)^2 = (3)^2 = 9$$

(ii) $\quad \left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{4}{5}} = \left\{\left(\frac{2\times2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3\times3}\right)^{\frac{1}{5}}\right\}^4$

$$= \left\{\left(\frac{2^5}{3^5}\right)^{\frac{1}{5}}\right\}^4 = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{5\times\frac{1}{5}}\right\}^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$= \frac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3} = \frac{16}{81}$$

या $\quad \left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{4}{5}} = \left[\left(\frac{32}{243}\right)^4\right]^{\frac{1}{5}}$

$$= \left[\left(\frac{2^5}{3^5}\right)^4\right]^{\frac{1}{5}} = \left[\frac{2^{5\times4}}{3^{5\times4}}\right]^{\frac{1}{5}}$$

$$= \left(\frac{2^{20}}{3^{20}}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{2^4}{3^4}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

दोनों उदाहरणों को हमने दोनों रूपों में हल किया। आपके अनुसार जो रूप अधिक सुविधाजनक है उसे तय कीजिए।

घातांक के नियम परिमेय घातांकों के लिए भी लागू होते हैं। आइए, इसे देखते हैं–

प्रथम विधि $\quad \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{\left(\frac{2}{5}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$$

या $$\left\{\frac{2}{5}\right\}^{2\times\frac{1}{2}} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{\cancel{2}\times\frac{3}{\cancel{2}}}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5} = \frac{16}{625}$$

द्वितीय विधि $$\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1+3}{2}} = \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}}} = \left(\frac{4}{25}\right)^2$$

$$= \frac{4\times 4}{25\times 25} = \frac{16}{625}$$

दोनों विधियों से हमें मान समान प्राप्त होता है, अतः $\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}$ है।

परिमेय घातांक, घातांकों के नियम $x^m \times x^n = x^{m+n}$ का पालन करता है।

क्या $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} \div \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}$ होता है, आइए जाँच करें–

$$\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} \div \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{\frac{5}{4}} \div \left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{\frac{3}{4}} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\cancel{4}\times\frac{5}{\cancel{4}}} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{\cancel{4}\times\frac{3}{\cancel{4}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\cancel{4}\times\frac{2}{\cancel{4}}}$$

$$\left(\frac{2^5}{3^5}\right) \div \left(\frac{2^3}{3^3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{2^5}{3^5}\times\frac{3^3}{2^3}\right)=\left(\frac{2^2}{3^2}\right)$$

$$\left(\frac{2^{5-3}}{3^{5-3}}\right)=\left(\frac{2^2}{3^2}\right)$$

$$\left(\frac{2^2}{3^2}\right)=\left(\frac{2^2}{3^2}\right) \qquad \text{R.H.S.} = \text{L.H.S.}$$

$$\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}}\div\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}=\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}$$

अतः यह घातांकों के नियम $x^m \div x^n = x^{m-n}$ का पालन करता है।

उदाहरण–12. निम्न के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{4}{3}}\times\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{7}{3}}\div\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{5}{3}}$

हल : (i) परिमेय संख्याओं के नियम $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$$=\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}$$

$$=\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{\cancel{6}\,2}{\cancel{3}}}=\left(\frac{8}{125}\right)^2$$

$$=\frac{8}{125}\times\frac{8}{125}=\frac{64}{15625}$$

(ii) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{7}{3}}\div\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{5}{3}}$

$$=\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{7-5}{3}}=\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{3^3}{4^3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^{3\times\frac{2}{3}}=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3\times3}{4\times4}=\frac{9}{16}$$

करके देखें

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}}$ (ii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}$ (iii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}$ (iv) $8^{\frac{2}{3}}$

कौनसी संख्या बड़ी है?

27 और 16 में 27 बड़ी है, परन्तु $\sqrt{16}$ और $\sqrt[3]{27}$ में कौनसी संख्या बड़ी है?

$$\sqrt{16} = \sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}}$$

याने $\sqrt{16} = 2 \times 2$

$= 4$

और $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{\underline{3\times3\times3}}$

याने $\sqrt[3]{27} = 3$

अतः $\sqrt{16} > \sqrt[3]{27}$

इसी तरह,

$\sqrt[6]{64}$ बड़ी है अथवा $\sqrt[3]{125}$

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{\underline{2\times2\times2\times2\times2\times2}}$$

$= 2$

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5\times5\times5}$$

$= 5$

करके देखें

इनमें से कौनसी संख्या बड़ी है?

(i) $\sqrt[3]{125}, \sqrt{36}$

(ii) $\sqrt{121}, \sqrt[3]{729}$

(iii) $\sqrt[4]{625}, \sqrt[5]{1024}$

(iv) $\sqrt[3]{125}, \sqrt[3]{729}, \sqrt[5]{1024}, \sqrt{36}$ को अवरोही क्रम लिखिए।

करणी (Surds)

ARXLXF

एक अपरिमेय संख्या $\sqrt[p]{a}$ करणी कहलाती है, जहाँ a एक धनात्मक परिमेय संख्या है। $\sqrt{\ }$ चिह्न को करणी चिह्न कहते हैं। p को करणी का घातांक और a को करणीगत राशि कहते हैं।

$\sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{2}$ अपरिमेय संख्याएँ हैं, जबकि $\sqrt[3]{8}$ एक परिमेय संख्या है क्योंकि $\sqrt[3]{8} = 2$ । $\sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{2}$ में करणीगत राशि क्रमशः 5, 3, 2 धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं। इसलिए $\sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{2}$ करणी हैं। $\sqrt[3]{8}$ में करणीगत राशि धनात्मक परिमेय संख्या है परंतु $\sqrt[3]{8}$ अपरिमेय नहीं है इसलिए $\sqrt[3]{8}$ करणी नहीं है।

क्या $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ करणी है?

चूंकि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है और 2 परिमेय संख्या है। चूंकि अपरिमेय संख्या और परिमेय संख्या का जोड़ अपरिमेय संख्या होती है। इसलिए $2+\sqrt{3}$ भी एक अपरिमेय संख्या है। $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ में करणीगत राशि अपरिमेय है अतः यह करणी नहीं है।

उदाहरण–13. इनमें से कौनसी करणी है?

(i) $\sqrt[3]{5+\sqrt{9}}$ (ii) $\sqrt{\sqrt{3}}$

हल : (i) $\sqrt[3]{5+\sqrt{9}}$

$= \sqrt[3]{5+3}$

$= \sqrt[3]{8}$

$= \sqrt[3]{2^3}$

$= 2^{3\times\frac{1}{3}}$ $\left[\sqrt[m]{y} = y^{\frac{1}{m}}\right]$

$= 2$

चूंकि $\sqrt[3]{5+\sqrt{9}} = 2$ परिमेय संख्या है अतः यह करणी नहीं है।

(ii) $\sqrt{\sqrt{3}}$

$= \sqrt{3^{\frac{1}{2}}}$

$$= \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3^{\frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt[4]{3}$$

चूंकि $\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$

अतः यह करणी है।

करके देखें

1. $\sqrt{3+\sqrt{16}}$, $\sqrt{\sqrt{16}}$, $\sqrt{3+\sqrt{2}}$ में करणी पहचानें व अपने चुनाव का कारण लिखें।
2. 3 ऐसी संख्याएँ लिखें जो अपरिमेय है किन्तु करणी नहीं है।

प्रश्नावली – 3.2

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए–

   (i) $(16)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $(243)^{\frac{1}{5}}$ (iii) $(15625)^{\frac{1}{6}}$

2. निम्नलिखित को सरल कीजिए–

   (i) $23^{\frac{1}{2}} \times 23^{\frac{3}{2}}$ (ii) $11^{\frac{4}{3}} \times 11^{\frac{5}{3}}$

   (iii) $21^{\frac{7}{3}} \div 21^{\frac{1}{3}}$ (iv) $15^{\frac{3}{2}} \div 15^{\frac{5}{2}}$

3. मान ज्ञात कीजिए–

   (i) $\left(\frac{625}{81}\right)^{\frac{4}{3}} \div \left(\frac{625}{81}\right)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{2}{13}\right)^{\frac{4}{3}} \div \left(\frac{2}{13}\right)^{\frac{5}{3}}$

   (iii) $3 \times 9^{\frac{1}{2}} \div 9^{\frac{3}{2}}$ (iv) $27^{\frac{2}{3}} \div 27^{\frac{1}{3}} \times 27^{\frac{4}{3}}$

4. निम्नलिखित करणियों को आरोही क्रम में लिखिए–

(i) $\sqrt{81}, \sqrt[3]{64}, \sqrt[9]{512}$ (ii) $\sqrt[4]{625}, \sqrt{100}, \sqrt[3]{343}$

(iii) $\sqrt[3]{216}, \sqrt[5]{243}, \sqrt{64}$ (iv) $\sqrt[4]{256}, \sqrt[7]{128}, \sqrt[3]{1000}$

5. निम्नलिखित में से कौनसी करणी है और कौनसी नहीं।

(i) $\sqrt{8}$ (ii) $\sqrt[3]{64}$ (iii) $\sqrt{90}$

(iv) $\sqrt{5+\sqrt{2}}$ (v) $\sqrt[5]{2+\sqrt{4}}$

हमने सीखा

1. एक ही संख्या को जितनी बार गुणा करते हैं, उसे घात के रूप में लिखते हैं एवं वह संख्या आधार कहलाती है, जैसे– 3^6 में 6 घात एवं 3 आधार है।
2. घातांक, बड़ी संख्याएं या छोटी संख्याओं को संक्षिप्त या मानक रूप में लिखने की विधि है।
3. गुणात्मक प्रतिलोम– 2^3 का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{2^3}$ या 2^{-3} होता है।
4. घातांक के नियम–

$x^m \times x^n = x^{m+n}$ $x^m \div x^n = x^{m-n}$

$(x^m)^n = x^{mn}$ $x^m \times y^m = (xy)^m$

यहाँ x व y शून्येतर परिमेय संख्याएं है तथा m व n परिमेय घातांक है।

5. परिमेय घातांक के नियम पूर्णांक घातांक के नियम की तरह ही लागू होते हैं।