बहुपद

[POLYNOMIALS]

ASGE1Q

04

अंक व संख्याएँ (Digit and Numbers)

आप अध्याय–4 पढ़ रहे हैं। गोमती की उम्र 14 वर्ष है। पिछले दिनों रात का तापमान 10° सेल्सियस था। आमगांव की आबादी 6000 है। एक बोरी में 30 किलोग्राम चावल है। पृथ्वी से मंगल ग्रह की दूरी 54.6 मिलियन किलोमीटर है। प्रकाश की गति 186000 मील प्रति सेकण्ड है, ऐसी अनेक बातें बातचीत का हिस्सा होती हैं।

इन सभी कथनों में 4, 14, 10, 6000, ... आदि संख्याएँ हैं जो 0, 1,2, ..., 5, ...9 अंकों की मदद से लिखी गई हैं। इन्हें अन्य प्रकार के संख्या संकेतों (I, II, ... IX, X, ...) की मदद से या किसी और संख्या पद्धति में भी लिखा जा सकता है। क्या आप किसी और तरह से भी संख्याओं को व्यक्त करने के उदाहरण दे सकते हैं?

कुछ और गणितीय कथन (Some More Mathematical Statements)

ऊपर के सभी कथनों में हमने दूरी, धारिता, आयु, ताप, आबादी, गति आदि को अंकों व अंक पद्धति का उपयोग कर संख्या को व्यक्त किया।

हम कुछ और तरह के कथनों का भी उपयोग करते हैं, जैसे–

- किसी वर्ग की भुजा a है तो उसका परिमाप $4a$ होगा।
- एक आयत की लंबाई l और चौड़ाई b है, इसका क्षेत्रफल व परिमाप पता करो।
- "पिता की आयु पुत्र की आयु के दुगने से 6 वर्ष अधिक है" इस कथन को $x = 2y + 6$ लिखते हैं।
- मूलधन, ब्याज आदि के बीच संबंध साधारण ब्याज $= \dfrac{\text{मू.} \times \text{द.} \times \text{स.}}{100}$
- दो रेखाएँ एक–दूसरे से θ कोण बनाती हैं।

इन सभी उदाहरणों में a, l, b, x, y, मू., द., स., θ आदि भी किसी न किसी संख्या को प्रदर्शित करते हैं। इन्हें 'अक्षर संख्याएँ' कहते हैं।

क्या ऊपर बताई गई दोनों प्रकार की संख्याओं, अंकों में लिखी व अक्षर संख्याओं में व्यक्त संख्याओं में कोई फर्क दिखाई पड़ता है?

क्या कुछ ऐसी अक्षर संख्याएं भी हैं जिनके संख्यात्मक मान निश्चित हैं?

एक ऐसी संख्या π है;

यदि किसी वृत्त का व्यास D है तो उसकी परिधि P को हम $P = \pi D$ लिखते हैं। यहाँ अलग–अलग वृत्तों के लिए D के मान अलग–अलग होंगे और इसलिए P के मान भी। लेकिन π का मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 ही होता है।

क्या कोई ऐसी और भी अक्षर संख्या आप जानते हैं?

एक फर्क तो यह है कि 5, 14, 10 आदि को अंकों में लिखा गया है जबकि a, l, b, x, y, द, स, θ आदि को वर्णमाला के अक्षरों से व्यक्त किया गया है।

दूसरा अंतर यह है कि पहले प्रकार की प्रत्येक संख्या का एक निश्चित मान है जबकि अक्षर संख्या के मान अलग–अलग संदर्भों में अलग–अलग हो सकते हैं।

क्या कोई बात इनमें समान भी है?

सोचिए, आप कहाँ–कहाँ अक्षर संख्याओं का उपयोग करते हैं?

क्या अक्षर संख्याओं में भी जोड़ने, घटाने, गुणा–भाग की संक्रियाएं हो सकती हैं?

इन सवालों पर अपने साथियों से चर्चा कर सकते हैं।

बीजीय व्यंजक और उनके पद (Algebraic Expression and their terms)

पिछली कक्षाओं में संख्याओं के कई उदाहरण आपने देखे होंगे जिनमें अक्षर संख्याएँ उपयोग में आईं–

जैसे, $4a,\ \frac{\sqrt{3}a^2}{4},\ a+b+c,\ \frac{4}{3}\pi r^3,\ x^2+2x+3, (x+3),\ \sqrt{\frac{x}{y}},\ m-9,\ 2p + q$

इनमें से प्रत्येक को हम **बीजीय व्यंजक** के रूप में पहचानते हैं।

इनमें कुछ एक पद वाले, कुछ दो पद वाले, कुछ तीन पद वाले बीजीय व्यंजक हैं,

जैसे– $4a,\ \frac{\sqrt{3}a^2}{4},\quad \frac{4}{3}\pi r^3,\ 5ax^2yz$ आदि

एक पद वाले बीजीय व्यंजक हैं।

$(x + 3), m - 9,\ 2p + q$ दो पद वाले बीजीय व्यंजक हैं।

$m - 9$ में m और -9 दो पद हैं तथा $2p + q$ में दो पद $2p$ और q है इसी प्रकार $a + b + c, x^2 + 2x + 3$ तीन पद वाले बीजीय व्यंजक हैं। यहाँ $a + b + c$ में a पहला, b दूसरा और c तीसरा पद है। दूसरे उदाहरण में x^2 पहला पद, $2x$ दूसरा पद है 3 तीसरा पद है।

क्या आप सोच सकते हैं कि ये दो पद वाले या तीन पद वाले क्यों हैं जबकि इनसे बड़े–बड़े व्यंजक केवल एक–पदीय हैं।

किसी व्यंजक का पद केवल संख्या, केवल अक्षर संख्या या संख्या व अक्षर संख्या का गुणनफल होता है। कोई व्यंजक एक या एक से अधिक पदों से बना होता है। किसी व्यंजक में '+' या '–' चिह्न से पद निर्धारित किया जाता है '×' या '÷' चिह्न से नहीं।

उदाहरण देखें–

1. $3x$
   एक पद
2. $2x + 3y$
   दो पद
3. $-xy - 4x + 35$
   तीन पद
4. $\frac{x}{yz}$
   एक पद
5. xy
   एक पद

व्यंजक $2P + P$, $(x + 3)^2$, $(x - y)^2$ में कितने पद होंगे? क्या आप बता सकते हैं?

इन तीनों व्यंजकों को देखने से ऐसा लगता है कि इनमें प्रत्येक में दो–दो पद हैं क्योंकि ये पद '+' व '–' चिह्न से अलग हो रहे हैं किंतु ऐसा नहीं है। यहाँ $2P + P = 3P$ लिखा जा सकता है, स्पष्ट है कि $3P$ एक पद है। इसी प्रकार देखें–

$(x+3)^2$ को हम $x^2 + 6x + 9$ लिख सकते हैं, इसमें तीन पद दिख रहे हैं।

$(x - y)^2$ को हम $x^2 - 2xy + y^2$ लिख सकते हैं, इसमें भी तीन पद हैं।

आपने देखा कि व्यंजकों में हम जो पद बता रहे थे, उन व्यंजकों को सरलीकृत करने पर पदों की संख्या बदल गई।

अतः हम कह सकते हैं कि यदि किसी व्यंजक को उसके सरल रूप में लिखना संभव हो तो उसे सरल रूप में लिखकर उसके पदों की संख्या गिनते हैं।

बहुपद (विशेष प्रकार का बीजीय व्यंजक)
Polynomials (Special Kinds of Algebraic Expression)

नीचे कुछ बीजीय व्यंजक दिए जा रहे हैं–

$x^2 + 5x$ $\qquad$ $p - 1$ $\qquad$ $x^3 - 2x^2 + 3x - 7$

ये सभी व्यंजक 'बहुपद' कहे जाते हैं। क्या कोई ऐसी विशेष बात है जो इन सभी में दिखाई पड़ती है?

कुछ और बीजीय व्यंजक देखिए जो 'बहुपद' नहीं है–

$x + \frac{1}{x}$, $\qquad$ $y^2 + y^{\frac{1}{2}} + 3$, $\qquad$ $p^3 - 2p + \sqrt[3]{p}$, $\qquad$ $3x^{-1}$

क्या इन चारों उदाहरणों में कोई ऐसी बात दिखाई पड़ती है जो पहले उदाहरणों से अलग है? इनके बहुपद नहीं होने का क्या कारण समझा जा सकता है?

सभी व्यंजकों, जो बहुपद हैं और जो बहुपद नहीं है की तुलना कीजिए। अपने साथियों और शिक्षक से चर्चा कीजिए कि कब एक व्यंजक बहुपद होता है और कब नहीं?

0, 1, 2, 3, 4, ...
पूर्ण संख्याएँ हैं।

आप संभवतः इस निष्कर्ष पर पहुंच गए होंगे कि जिस बीजीय व्यंजक में अक्षर संख्याओं की घातें पूर्ण संख्या है वही बहुपद है।

करके देखें

1. इनमें से कौन से बहुपद हैं?

   (i) S-3 (ii) $5y^{-3}$ (iii) $p+\frac{1}{p}$

   (iv) ax^2+b (v) $x^{\frac{1}{2}}+1$ (vi) $5p^2+2p+1$

2. 5 नये बहुपद बनाएँ।

बहुपद के पद (Terms of Polynomials)

हमें बहुपद के पद गिनना, बहुपद के गुणांक पता करना, बहुपद की घात पता करना आदि सीखना होगा। इनकी हमें आगे आवश्यकता होगी। बहुपद x^2+3x में दो पद हैं, पहला पद x^2 और दूसरा $3x$। इसी तरह m^3-2m^2+9m+1 में चार पद हैं, $m^3, -2m^2, 9m$ और 1। बहुपद $3y$ में केवल एक पद है $3y$।

पदों की संख्या के आधार पर बहुपद का नाम निर्धारित होता है। चूंकि बहुपद एक बीजीय व्यंजक है अतः इसके पदों को बीजीय व्यंजकों की तरह ही गिनते हैं। ऊपर दिए गए उदाहरणों में–

$3y$ एकपदी बहुपद है,

x^2+3x द्विपदी बहुपद है,

m^3-2m^2+9m+1 चारपदीय बहुपद है।

सोचें एवं चर्चा करें

1. किसी बहुपद में पदों की संख्या कितनी हो सकती है, अनंत या परिमित (finite)?
2. $2p+p$ एक पदीय है या दो पदीय है?
3. $(x+2)^2$ कितने पद का व्यंजक है?

करके देखें

निम्नलिखित व्यंजकों को पदों के आधार पर छाँटिए–

(i) 9C (ii) $\frac{1}{2}t+\frac{a}{2}$ (iii) $a^2+2ab+b^2$ (iv) $\frac{p}{q}$

(v) $4x-y$ (vi) $2m+c$ (vii) x^4+3x^2+1

बहुपद की घात (Degree of Polynomials)

किसी बहुपद में कुछ और संख्याएँ होती हैं जो बहुपद के पदों में अक्षर संख्या में लिखी होती हैं, जैसे–

$3x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 9$

इस चारपदी बहुपद में अक्षर संख्या x की घातें क्रमशः 5, 4 और 3 हैं। इनमें सबसे बड़ी घात 5 है। इस स्थिति में "बहुपद $3x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 9$ की घात (Degree of Polynomial) 5 है" या $3x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 9$, 5 घात का बहुपद है।

एक घात वाले बहुपदों को रैखिक बहुपद (Linear Polynomial) भी कहा जाता है।

कुछ और उदाहरण देखें–

$x^2 + 3$ में बहुपद की घात 2 है।

$x^2 - 2x^7 + 3x - 1$ बहुपद की घात 7 है।

$5y$ में बहुपद की घात 1 है।

बहुपद $x^2y + xy$ में बहुपद की घात क्या होगी?

बहुपद $x^2y + xy$ में पहले पद में x की घात 2 है और y की घात 1 है। अतः x^2y की घात 3 है इसी तरह xy की घात 2 है। इस प्रकार $x^2y + xy$ की घात 3 होगी।

बहुपद xy में बहुपद की घात क्या होगी? बहुपद xy में दो चर हैं x और y, दोनों की ही घात 1 है। बहुपद 'xy' की घात इन घातों के योग के बराबर यानी 2 है।

कभी–कभी संख्या को अक्षरों द्वारा भी दर्शाया जाता है, ऐसी स्थिति में अक्षर संख्या नियतांक या अचर होती है। उदाहरण के लिए $ax+b$ में अगर a और b नियतांक है तब, अक्षर संख्या x चर होगा तथा a, b अचर होंगे।

करके देखें

1. निम्नलिखित बहुपदों में बहुपद की घात ज्ञात कीजिए–
   (i) 8 (ii) xyz (iii) $uv + uv^2 + v^3$
2. कुछ बहुपद आप भी लिखिए फिर अपने साथियों से चर्चा कर उनकी घात भी लिखिए।

अचर बहुपद (Constant Polynomials)

अब इस प्रश्न पर विचार कीजिए–

क्या 6 भी एक बीजीय व्यंजक है?

क्या 6 एक बहुपद भी है?

ऐसा लगता है कि 6 के साथ कोई अक्षर संख्या नहीं है और व्यंजकों के सामान्य उदाहरण में अक्षर संख्या तो होती ही है, तो क्या 6 बीजीय व्यंजक नहीं है? लेकिन क्या 6 को $6x^\circ$ के रूप में लिखा जा सकता है? $(x^\circ = 1)$

इसमें अक्षर संख्या x की घात **शून्य** है। शून्य एक पूर्ण संख्या है। इसलिए $6x^{0}$ या 6 भी एक बीजीय व्यंजक है और एक पदी बहुपद भी।

तो ऐसे पद भी, जिसमें केवल कोई संख्या हो, बीजीय व्यंजक होते हैं, और बहुपद भी। ऐसे बहुपद को 'अचर बहुपद' (Constant Polynomials) कहा जाता है। याने 2, 7, –6, $\frac{3}{2}$, 122 आदि अचर बहुपद हैं। क्या आप अचर बहुपद के कुछ और उदाहरण बना सकेंगे?

बहुपदों का निरूपण (Representation of Polynomials)

कभी–कभी बहुपद को बार–बार लिखने की आवश्यकता पड़ती है। ऐसे में एक बड़े व लम्बे बहुपद को बार–बार लिखना होगा। बहुपद को व्यक्त करने का एक और रूप है। इस रूप में सिर्फ यह पता चलता है कि वह बहुपद किस अक्षर संख्या में है। उसके बारे में और कुछ पता नहीं चलता। सवाल के संदर्भ में, किंतु यह समझा जा सकता है कि यह किस बहुपद के बारे में है।

यदि किसी बहुपद की अक्षर संख्या x है तो उसे हम $p(x), q(x), r(x)$ आदि किसी से भी व्यक्त कर सकते हैं। यदि अक्षर संख्या y हो तो ऐसे बहुपद को $p(y), q(y), s(y), t(y)$ आदि से प्रदर्शित कर सकते हैं। कुछ उदाहरण देखें–

$p(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 9$ $\qquad$ $t(x) = x^6 - 2x^7 + 3x - 1$

$q(y) = 5y$ $\qquad$ $s(u) = u^2 + 3u^3$ $\qquad$ $r(b) = b^4 - b^2 + 6$

इसमें p, t, q आदि के चुनाव का कोई आधार नहीं है। किंतु एक बार इन्हें चुन लिया तो उस सवाल के लिए इसी अक्षर संख्या का उपयोग करेंगे।

बहुपदों के व्यापक रूप (General form of Polynomials)

नीचे एक घात वाले कुछ बहुपद दिए जा रहे हैं, इन्हें ध्यानपूर्वक देखिए–

$p(x) = 2x + 3$ $\qquad$ $q(x) = \sqrt{2} - x$ $\qquad$ $s(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$r(x) = x + 2$ $\qquad$ $p(x) = \sqrt{7}\,x - 4$ $\qquad$ $p(x) = 2(3x + 8)$

इन सभी में अधिकतम दो पद हैं।

सोचें एवं चर्चा करें

क्या आप एक घात वाला कोई ऐसा बहुपद बना सकते हैं जिसमें दो से अधिक पद हों? ध्यान रहे बहुपद बनाते समय समान पदों को इकट्ठा करके लिखें।

ऊपर के उदाहरणों के सभी बहुपदों में एक अक्षर संख्या आवश्यक रूप से उपस्थित है। दूसरे शब्दों में इसे ऐसा भी कह सकते हैं कि इन बहुपदों में अक्षर संख्या का गुणांक शून्य नहीं है। इसके अतिरिक्त इनमें वास्तविक संख्या $(+3, -4, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 0$ आदि) भी सम्मिलित है।

क्या हम इन्हें $ax + b$ के रूप में दर्शा सकते हैं जहाँ a और b कोई वास्तविक नियत संख्याएँ और $a \neq 0$ हैं?

दूसरे उदाहरण की $ax + b$ से तुलना करे तो–

$$\sqrt{2} - x = -x + \sqrt{2}$$
$$= (-1)\,x + \sqrt{2}$$
$$= a\,x + b \quad \text{(तुलना करें।)}$$

यहाँ $a = (-1)$ जहाँ a शून्य नहीं है।

$b = \sqrt{2}$ जहाँ $\sqrt{2}$ एक वास्तविक संख्या है।

आप देख रहे हैं बहुपद $\sqrt{2} - x$ $ax + b$ के जैसा ही है।

अक्षर संख्या के साथ जो संख्या गुणा में लिखी गई होती है उसे गुणांक कहते हैं, जैसे– बहुपद $m^3 - 3m^2 + 1$ में m^3 का गुणांक 1 है, m^2 का गुणांक –3 है।

सोचें: $m^2 + 1$ में 1 का गुणांक क्या होगा?

एक और बहुपद को देखें–

$$x = 1 \times x$$
$$= 1 \times x + 0$$
$$= ax + b$$
$$a = 1, b = 0$$

वास्तविक संख्या में सभी पूर्णांक, परिमेय और अपरिमेय संख्याएं आती हैं।

$-2, -1, 0, 1, 2, \ldots, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{7}, \sqrt{2}, \sqrt{7}, \ldots$

इसलिए बहुपद x भी $ax + b$ के रूप में लिखा जा सकता है। अब आप शेष चार बहुपदों को भी $ax + b$ के रूप में लिखें।

$ax + b$ को x के पदों में एक घात का बहुपद (रेखीय बहुपद) कहा जाता है। जहाँ a और b वास्तविक नियत संख्याएँ है और $a \neq 0$

अब इन बहुपदों पर विचार कीजिए–

$$4x^2 + 3x, \qquad -y^2 + 2, \qquad x^2 - 4x - 9, \qquad \sqrt{2}\,m^2 - \frac{3}{2}m - 9$$

ये बहुपद एक अक्षर संख्या वाले द्विघात बहुपद हैं। इन्हें वर्ग बहुपद (Quadratic Polynomials) कहा जाता है। इन्हें हम $ax^2 + bx + c$ के रूप में लिखते हैं जहाँ a, b और c वास्तविक नियत संख्याएँ तथा $a \neq 0$ है।

करके देखें

1. पाँच कोई वर्ग बहुपद बनाइए।
2. वर्ग बहुपद में अधिकतम कितने पद हो सकते हैं?
3. वर्ग बहुपद में न्यूनतम कितने पद हो सकते हैं?

अधिक घात वाले बहुपदों के व्यापक रूप

$4x^3+2x^2+5x-7,\quad y^4+3y^3-5y^2+7y,\quad m^5-3m^2+2,\quad z^6-5z^5-3z^2+2z$

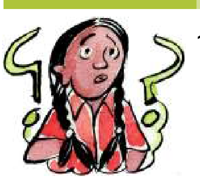
आदि सभी बहुपद हैं। हम देख सकते हैं कि इनमें बहुपद की घात बढ़ती जा रही है साथ–साथ अधिकतम संभव पदों की संख्या भी बढ़ रही है। इन सब में x, y, m, z आदि कि विभिन्न घातों के अलावा संख्याएँ हैं। ये सभी वास्तविक संख्याएँ हैं बहुपद की घात उसमें उपस्थित अक्षर संख्या (x, y, m, z) आदि की अधिकतम घात से तय होती है। अतः अधिकतम घात का गुणांक शून्य नहीं हो सकता। इसलिए हमने दो घात वाले बहुपद में $a \neq 0$ की शर्त रखी।

बहुपदों के बारे में हम आगे और पढ़ेंगे साथ ही अक्षर के अलग–अलग तरह के प्रयोग के बारे में भी जानेंगे। सभी घातों के लिए बहुपद के और भी व्यापक रूप को देखेंगे। यह सब आगे की कक्षाओं में होगा। क्या आप दिए गए अधिक घात वाले बहुपदों को भी ऊपर लिखे गए $ax + b$, $ax^2 + bx + c$ की तरह लिख सकते हैं?

शून्य बहुपद

यदि किसी बहुपद के सभी गुणांक 0 हो जाएं जैसे– ax^2+bx+c में $a=b=c=0$ हो तो हमें 0 मिलेगा। इसे शून्य बहुपद कहते हैं। इसकी घात अपरिभाषित है। अर्थात् इसको प्रत्येक घात के बहुपद के रूप में लिखा जा सकता है।

प्रश्नावली – 4.1



1. निम्नलिखित व्यंजकों में कौनसा बहुपद है और कौनसा नहीं? अपने उत्तर का कारण भी लिखिए।

   (i) $4x^2 - 3x + 5$ (ii) $z + \frac{3}{z}$ (iii) $\sqrt{y} + 2y + 3$

   (iv) $x^2 + \frac{3}{2}$ (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. निम्नलिखित में x^2 का गुणांक लिखिए–

   (i) $3x^2 + 2x^2 + 3x + 2$ (ii) $3x^2 + 1$ (iii) $2 - 5x^2 + \frac{1}{2}x^3$

   (iv) $\frac{x^2}{2}+1$ (v) $x^4 + x^3 + \frac{1}{4}x^2$

3. निम्न बहुपद में x का गुणांक एवं अचर पद लिखिए।

(i) $x^2 + \frac{1}{5}x + 5$ (ii) $\sqrt{2}\,x + 7$ (iii) $x^2 + 2$

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक का एक उदाहरण लिखिए–

(i) घात 4 का द्विपदी बहुपद (ii) घात 6 का त्रिपदी बहुपद

(iii) घात 5 का एकपदी बहुपद

5. निम्नलिखित बहुपदों में प्रत्येक की घात लिखिए–

(i) $x^3 - 6x^2 + x + 1$ (ii) $y^9 - 3y^7 + \frac{3}{2}y^2 + 4$ (iii) $3 - y^3z$

(iv) $x^2y - 2x + 1$ (v) $5t - \sqrt{11}$ (vi) 7

6. निम्नलिखित बहुपदों में से अचर, रैखिक, द्विघातीय एवं त्रिघातीय बहुपदों को छाँटिए–

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $9x^3$ (iii) $y + y^2 + \frac{3}{4}$

(iv) $t + 3$ (v) $y - y^3$ (vi) 8

(vii) $2x^2 + 3$ (viii) $P^2 - P + 5$ (ix) $x + \frac{2}{3}$

(x) 4 (xi) $-\frac{u}{4} + \frac{3}{2}$ (xii) $-\frac{3}{7}$

बहुपद के शून्यक (Zeroes of a Polynomial)

बहुपद $p(x) = x^2 + x - 6$ में $x = 1, 2, 0$ आदि मान रखने पर हम देखते हैं कि

$x = 1$ पर, $p(1) = 1 + 1 - 6 = -4$

$p(1) = -4$

हम कहेंगे $x = 1$ के लिए $p(x)$ का मान -4 है।

$x = 2$ पर

$p(2) = 4 + 2 - 6$

$p(2) = 0$

$x = 2$ के लिए $p(x)$ का मान 0 हो जाता है। हम कहेंगे कि 2 बहुपद $p(x)$ का शून्यक है।

हम कह सकते हैं कि जब किसी बहुपद का मान चर के किसी मान के लिए शून्य हो जाता है तो चर का वह मान बहुपद का शून्यक होता है।

उदाहरण–1. बहुपद $p(x) = 2x + 1$ का शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल : किसी बहुपद का शून्यक ज्ञात करना किसी समीकरण का हल ज्ञात करने के समान है, $p(x) = 0$ होने के लिए हमें x का वह मान चाहिए जो इसे संतुष्ट करे।

अर्थात् x का वह मान होगा जब $2x + 1 = 0$

$$2x = -1 \qquad \text{या} \qquad x = \frac{-1}{2}$$

स्पष्टतः $p(x)$ में $x = \frac{-1}{2}$ रखने पर शून्य प्राप्त होगा अतः $\frac{-1}{2}$, $p(x)$ का एक शून्यक है।

उदाहरण–2. पता कीजिए कि क्या 0 और 2, बहुपद x^2-$2x$ के शून्यक हैं?

हल : माना $p(x) = x^2 - 2x$

तब $x = 0$ रखने पर

$$p(0) = (0) - 2 \times 0 = 0$$

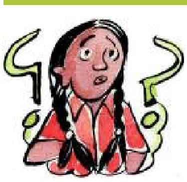
याने 0, $p(x)$ का एक शून्यक है।

अब x=2 रखने पर

$$p(2) = 2^2 - 2 \times 2$$
$$= 4 - 4 = 0$$

याने $p(x)$ का एक और शून्यक 2 है।

प्रश्नावली – 4.2



1 बहुपद $5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ का मान ज्ञात कीजिए यदि

(i) $x = 0$ (ii) $x = 1$ (iii) $x = -2$

2 निम्नलिखित प्रत्येक बहुपद के लिए $P(0), p(-1), p(2), p(3)$ का मान ज्ञात कीजिए–

(i) $p(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ (ii) $p(r) = (r-1)(r+1)$

(iii) $p(t) = \frac{2}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}$ (iv) $p(y) = (y^2 - y + 1)(y + 1)$

(v) $p(x) = x + 2$

3 पता कीजिए कि दिए गए बहुपदों के सामने लिखे मान क्या उनके शून्यक हैं?

(i) $p(x) = 3x + 1 \; ; \; x = \frac{-1}{3}$ (ii) $p(x) = x + 2 \; ; \; x = -2$

(iii) $p(x) = 5x - 4 \; ; \; x = \frac{5}{4}$ (iv) $p(y) = y^2 - 1 \; ; \; y = 1, -1$

(v) $p(t) = (t + 1)\,(t - 2) \; ; \; t = +1, -2$ (vi) $p(x) = lx + m \; ; \; x = \frac{-m}{l}$

(vii) $p(r) = 3r^2 - 1 \; ; \; r = \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

4 निम्नलिखित बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए–

(i) $p(x) = x + 6$ (ii) $p(x) = x - 6$ (iii) $p(y) = 5y$

(iv) $p(t) = at,\; a \neq 0,\; a$ एक वास्तविक नियत संख्या है।

(v) $p(r)=cr+d,\; c\neq 0,\; c,\; d$ वास्तविक नियत संख्याएं हैं।

(vi) $p(u) = 3u - 6$ (vii) $\mathrm{r(s)} = 2\mathrm{s} + 3$

(viii) $p(x) = \sqrt{5} - x$ (ix) $q(t) = \frac{1}{2}t - \frac{2}{3}$

बहुपदों को जोड़ना और घटाना (Addition and Subtraction of Polynomials)

ASQA3D

हमने बीजीय व्यंजकों को जोड़ने और घटाने का अभ्यास किया है। यह भी जाना है कि सभी बहुपद बीजीय व्यंजक ही हैं। इसलिए बहुपदों का जोड़ना–घटाना बीजीय व्यंजकों के जोड़ने–घटाने जैसा ही है।

सभी पदों को देखकर समान पदों को इकट्ठा करके उनके गुणांकों में जोड़ना/घटाना कर सकते हैं।

नीचे के उदाहरणों को देखो और यह बताओ कि इन्हें हल करने में क्या–क्या बातें ध्यान में रखनी होती हैं।

उदाहरण–3. बहुपद $3x^3 - x^2 + 5x - 4$ तथा $3x^2 - 7x + 8$ को जोड़िए।

हल : $3x^3 - x^2 + 5x - 4$ (यहाँ पर समान घात के पदों को एक साथ लिखेंगे)

$$\begin{array}{r} 3x^3 - x^2 + 5x - 4 \\ +\qquad 3x^2 - 7x + 8 \\ \hline 3x^3 + (-1+3)x^2 + (5-7)x + (-4+8) \end{array} = 3x^3 + 2x^2 - 2x + 4$$

उदाहरण–4. बहुपद $\frac{3}{2}y^3 + y^2 + y + 1$ तथा $y^4 - \frac{1}{2}y^3 - 3y + 1$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{l} \frac{3}{2}y^3 + y^2 + y + 1 \\ + y^4 - \frac{1}{2}y^3 \qquad - 3y + 1 \\ \hline y^4 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)y^3 + y^2 + (1-3)y + (1+1) \\ \hline \end{array} = y^4 + y^3 + y^2 - 2y + 2$$

उदाहरण–5. बहुपद $9x^2 - 3x - 7$ में से $4x^2 + 3x - 2$ को घटाइए।

हल :

$$\begin{array}{l} 9x^2 - 3x - 7 \\ 4x^2 + 3x - 2 \\ - \quad - \quad + \end{array}$$

(घटाने पर चिह्न परिवर्तित होते हैं)

$$\overline{\underline{(9-4)x^2 + (-3-3)x + (-7+2)}} = 5x^2 - 6x - 5$$

उदाहरण–6. $x(z) = 2z^2 - 5 + 11z - z^3$ में से $s(z) = 3z - 5z^2 + 7 + 3z^3$ को घटाइए।

हल : सर्वप्रथम दोनों बहुपदों को अक्षर संख्याओं की घातों के घटते क्रम में लिखिए।

$x(z) = 2z^2 - 5 + 11z - z^3 = -z^3 + 2z^2 + 11z - 5$

तथा $s(z) = 3z - 5z^2 + 7 + 3z^3 = 3z^3 - 5z^2 + 3z + 7$

अब $x(z) - s(z) = -z^3 + 2z^2 + 11z - 5$

$$\begin{array}{l} 3z^3 - 5z^2 + 3z + 7 \\ - \quad + \quad - \quad - \\ \hline (-1-3)z^3 + (2+5)z^2 + (11-3)z + (-5-7) \\ \hline \end{array}$$

$= -4z^3 + 7z^2 + 8z - 12$

उदाहरण–7. बहुपदों $3x + 4 - 5x^2$, $5 + 9x$ तथा $4x - 17 - 5x^2$ का योगफल ज्ञात कीजिए एवं योगफल से प्राप्त बहुपद की घात बताइए।

हल : $-5x^2+3x+4$ (x को घटती घातों के रूप में लिखने पर)

$+9x+5$

$-5x^2+4x-17$

$$\overline{(-5-5)x^2+(3+9+4)x+(4+5-17)} = -10x^2+16x-8$$

अतः बहुपद $-10x^2+16x-8$ की घात = 2

उदाहरण–8. $p(x) = 3x^2 - 8x + 11$ तथा $q(x) = -4x^2 + 15$ के योगफल में से $r(x) = 2x^2 - 3x - 1$ को घटाइए एवं प्राप्त हुए बहुपद की घात बताइए।

हल : पहले हम $p(x)$ तथा $q(x)$ का योग करते हैं–

$p(x) + q(x) = 3x^2 - 8x + 11$

$-4x^2 \quad + 15$

$$(3-4)x^2 - 8x + (11+15) = -x^2 - 8x + 26$$

अब इस योग में से $r(x)$ को घटाते हैं–

$p(x) + q(x) - r(x) = -x^2 - 8x + 26$

$2x^2 - 3x - 1$

$- \quad + \quad +$ (चिह्न परिवर्तित करने पर)

$$\overline{(-1-2)x^2+(-8+3)x+(26+1)} = -3x^2-5x+27$$

$p(x) + q(x) - r(x) = -3x^2 - 5x + 27$

अतः बहुपद $-3x^2 - 5x + 27$ की घात = 2

उदाहरण–9. $p(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1;\ q(x) = 4x^3 + 2x^2 - 2x + 5$ का योगफल एवं अंतर ज्ञात कीजिए।

हल : $p(x) + q(x) = (4x^3 + 3x^2 + 2x - 1) + (4x^3 + 2x^2 - 2x + 5)$

$= (4 + 4)x^3 + (3 + 2)x^2 + (2 - 2)x + (-1 + 5)$

$= 8x^3 + 5x^2 + 0x + 4$

$= 8x^3 + 5x^2 + 4$

इसी प्रकार अंतर

$p(x) - q(x) = (4x^3 + 3x^2 + 2x - 1) - (4x^3 + 2x^2 - 2x + 5)$

$= (4 - 4)x^3 + (3 - 2)x^2 + (2 + 2)x + (-1 - 5)$

$= x^2 + 4x - 6$

करके देखें

निम्नलिखित के योगफल व अन्तर पता करें और प्राप्त बहुपद की घात भी बताइए।

(i) $p(y) = y^2 + 5y,\ q(y) = 3y - 5$

(ii) $p(r) = 5r^2 - 9,\ s(r) = 9r^2 - 4$

(iii) $p(y) = 15y^4 - 5y^2 + 27,\ \ s(y) = 15y^4 - 9$

कई बार हमें बहुपदों का योग अथवा अंतर पता होता है। यदि ऐसे में हमें एक बहुपद पता हो तो दूसरा बहुपद भी पता कर सकते हैं।

उदाहरण–10. : $2u^2 - 4u + 3$ में क्या जोड़ें कि योगफल $4u^3 - 5u^2 + 1$ प्राप्त हो?

हल : माना $p(u) = 2u^2 - 4u + 3$ में $q(u)$ को जोड़ने पर $r(u) = 4u^3 - 5u^2 + 1$ प्राप्त होगा।

अर्थात् $p(u) + q(u) = r(u)$

$$q(u) = r(u) - p(u)$$

$$\begin{aligned} q(u) &= (4u^3 - 5u^2 + 1) - (2u^2 - 4u + 3) \\ &= 4u^3 - 5u^2 + 1 - 2u^2 + 4u - 3 \\ &= 4u^3 + (-5 - 2)\,u^2 + 4u + (1 - 3) \\ &= 4u^3 - 7u^2 + 4u - 2 \end{aligned}$$

उदाहरण–11. $2y^3 - 3y^2 + 4$ में क्या घटाएं कि अंतर $y^3 - 1$ प्राप्त हो?

हल : माना $p\,(y) = 2y^3 - 3y^2 + 4$ में से $q\,(y)$ घटाने पर अंतर $r(y) = y^3 - 1$ प्राप्त होगा।

अर्थात् $p\,(y) - q\,(y) = r\,(y)$

या $q\,(y) = p\,(y) - r\,(y)$

$$\begin{aligned} q\,(y) &= (2y^3 - 3y^2 + 4) - (y^3 - 1) \\ &= 2y^3 - 3y^2 + 4 - y^3 + 1 \\ &= (2 - 1)\,y^3 - 3y^2 + (4 + 1) \\ &= y^3 - 3y^2 + 5 \end{aligned}$$

करके देखें

1. $5t^2 - 3t + 4$ में से क्या घटाएँ कि $2t^3 - 4$ प्राप्त हो।
2. $6r^2 + 4r - 2$ में क्या जोड़ें कि $15r^2 + 4$ प्राप्त हो।
3. ऐसे 5 और सवाल बनाएँ और हल करें।

बहुपदों का गुणा (Multiplication of Polynomials)

बहुपदों को जोड़ने–घटाने की तरह ही उनका गुणा भी बीजीय व्यंजकों जैसा ही होता है।

उदाहरण–12. बहुपद $p(x) = 2x^2 + 3x + 4$ को 3 से गुणा करें।

हल : $3\,p(x) = 3 \times (2x^2 + 3x + 4)$

$= 6x^2 + 9x + 12$

उदाहरण–13. $(2x + 5) \times (4x + 3)$

हल : $= 2x(4x + 3) + 5(4x + 3)$

$= [(2x \times 4x) + (2x \times 3)] + [(5 \times 4x) + (5 \times 3)]$

$= 8x^2 + 6x + 20x + 15$

$= 8x^2 + 26x + 15$

उदाहरण–14. $(2x + 5) \times (3x^2 + 4x + 6)$, गुणनफल की घात बताइए।

हल : $= [2x \times (3x^2 + 4x + 6)] + [5 \times (3x^2 + 4x + 6)]$

$= 2x \times 3x^2 + 2x \times 4x + 2x \times 6 + 5 \times 3x^2 + 5 \times 4x + 5 \times 6$

$= 6x^3 + 8x^2 + 12x + 15x^2 + 20x + 30$

$= 6x^3 + (8 + 15)\,x^2 + (12 + 20)\,x + 30$

$= 6x^3 + 23x^2 + 32x + 30$

यहाँ बहुपद की घात 3 है।

उदाहरण–15. यदि $p(x) = 2x + 3$ तब $p(x)\,.\,q(x)$ ज्ञात कीजिए।

$q(x) = x^2 + x - 2$

हल : तब $p(x)\,.\,q(x) = (2x + 3)(x^2 + x - 2)$

$= 2x(x^2 + x - 2) + 3(x^2 + x - 2)$

$= 2x \times x^2 + 2x \times x + 2x \times (-2) + 3 \times x^2 + 3x + 3 \times (-2)$

$= 2x^3 + 2x^2 - 4x + 3x^2 + 3x - 6$

$= 2x^3 + (2 + 3)\,x^2 + (-4 + 3)\,x - 6$

$= 2x^3 + 5x^2 - x - 6$

करके देखें

निम्नलिखित बहुपदों का गुणा करके, गुणनफल की घात बताइए–

(i) $p(x) = x^2 + 3x + 2$; $q(x) = x^2 + 3x + 1$

(ii) $p(v) = v^2 - 3v + 2$; $q(v) = v + 1$

(iii) $p(x) = 2x^2 + 7x + 3$; $q(x) = 5x^2 - 3x$

(iv) $p(y) = y^3 - y^2 + y - 1$; $q(y) = y + 1$

(v) $p(u) = 3u^2 - 12u + 4$; $q(u) = u^2 - 2u + 1$

प्रश्नावली – 4.3

1. निम्नलिखित बहुपदों को जोड़िए–

(i) $2x^2 + x + 1$ एवं $3x^2 + 4x + 5$ (ii) $8p^2 - 3p + 4$ एवं $3p^3 - 4p + 7$

(iii) $-5x^3 + 9x^2 - 5x + 7$ एवं $-2x^2 + 7x^3 - 3x - 8$

2. निम्नलिखित बहुपदों को जोड़िए। जोड़ से प्राप्त बहुपद की घात बताइए।

(i) $3y^2 + 2y - 5$; $2y^2 + 5 + 8y$ तथा $-y^2 - y$

(ii) $5 + 7r - 3r^2$; $r^2 + 7$ तथा $r^2 - 3r + 5$

(iii) $4x + 7 - 3x^2 + 5x^3$; $7x^2 - 2x + 1$ तथा $-2x^3 - 2x$

3. घटाइए–

(i) $7t^3 - 3t^2 + 2$ में से $t^2 - 5t + 2$

(ii) $2p^2 - 5 + 11p - p^3$ में से $3p - 5p^2 + 7 + 3p^3$

(iii) $-3z^2 + 11z + 12z^3 + 13$ में से $5z^3 + 7z^2 + 2z - 4$

4. $x^4 + 3x^3 + 2x + 6$ और $x^4 - 3x^2 + 6x + 2$ के योगफल में से $x^3 - 3x + 4$ को घटाइए।

5. यदि $p(u) = u^7 - u^5 + 2u^2 + 1$ और $q(u) = -u^7 + u - 2$ हो तो $p(u) + q(u)$ की घात बताइए।

6. $x^3 - 3x^2 + 6$ में क्या जोड़ें कि योगफल $x^2 - x + 4$ प्राप्त हो?

7. $u^7 - 3u^6 + 4u^2 + 2$ में क्या जोड़ें कि योगफल $u^6 - u - 4$ प्राप्त हो?

8. $y^3 - 3y^2 + y + 2$ में क्या घटाएं कि अंतर $y^3 + 2y + 1$ प्राप्त हो?

9. $t^2 + t - 7$ में क्या घटाएं कि अंतर $t^3 + t^2 + 3t + 4$ प्राप्त हो?

10. निम्नलिखित का गुणा कीजिए–

(i) $3x + 4$ का $7x^2 + 2x + 1$ से (ii) $5x^3 + 2x$ का $3x^2 - 9x + 6$ से

(iii) $p^4 - 5p^2 + 3$ का $p^3 + 1$ से

11. यदि $p(x) = x^3 + 7x + 3$ तथा $q(x) = 2x^3 - 3$ हो तो $p(x)\,q(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

12. यदि $p(u) = u^2 + 3u + 4$, $q(u) = u^2 + u - 12$ तथा $r(u) = u - 2$ हो तब $p(u)q(u)r(u)$ की घात बताइए।

हमने सीखा

1. एक विशेष प्रकार का बीजीय व्यंजक, जिसमें अक्षर संख्या (चर) की घात पूर्ण संख्या हो तब वह बहुपद कहलाता है।
2. बहुपद के पद '+' व '–' चिह्न द्वारा निर्धारित होते हैं।
3. बहुपद के गुणांक एक संख्या होती है जो अक्षर संख्या के साथ गुणा में लिखी गई होती है। कभी–कभी संख्या को अक्षरों द्वारा दर्शाते हैं तब गुणांक संख्या न होकर अक्षर होते हैं। उदाहरण $ax + b$ में x का गुणांक a है।
4. किसी बहुपद में उपस्थित सभी अक्षर संख्या का गुणांक शून्य होने पर वह शून्य बहुपद कहलाता है।
5. किसी भी संख्या को बीजीय व्यंजक व बहुपद कह सकते हैं। 3, 5, 6 .... इत्यादि बीजीय व्यंजक व बहुपद दोनों हैं।
6. केवल संख्या वाले बहुपद (जहाँ बहुपद में केवल संख्या हो या अक्षर संख्या जो नियतांक हो) को अचर बहुपद कहते हैं।
7. किसी बहुपद में चर (अक्षर संख्या) की अधिकतम घात को बहुपद की घात कहते हैं। उदाहरण– बहुपद $x^5 + 3x^3 + 2x$ की घात 5 है।
8. बहुपदों को $p(x), q(x), r(x)$ आदि से व्यक्त किया जा सकता है। जिसमें कोष्ठक के भीतर लिखी अक्षर संख्या बहुपद की अक्षर संख्या को दर्शाती है।
9. $ax + b$ एक घात व एक चर का बहुपद है जहाँ a, b वास्तविक नियत संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है।
10. घात 2 के एक चर के बहुपद को वर्ग बहुपद कहते हैं।
11. जब किसी बहुपद का मान चर के किसी मान के लिए शून्य हो जाता है तो चर के उस मान बहुपद का शून्यक होता है।
12. रैखिक बहुपद का व्यापक रूप $ax + b$ जहाँ a, b वास्तविक नियत सख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है।
13. वर्ग बहुपद का व्यापक रूप $ax^2 + bx + c$ जहाँ a, b, c वास्तविक नियत सख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है।
14. त्रिघात बहुपद का व्यापक रूप $ax^3 + bx^2 + cx + d$ जहाँ a, b, c, d वास्तविक नियत सख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है।

B54IIX