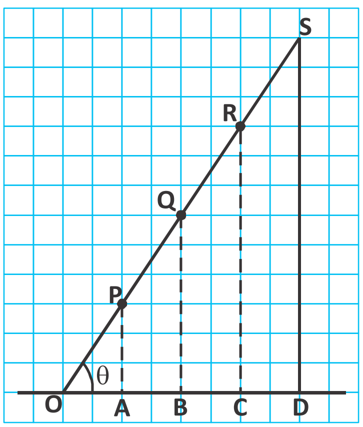
त्रिकोणमितीय अनुपात एवं सर्वसमिकाएँ

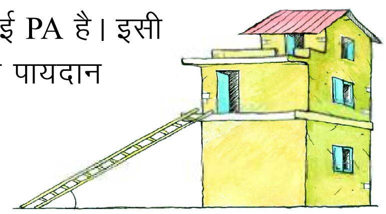
B8954P

[TRIGONOMETRICAL RATIO AND IDENTITIES] 08



चित्र–1

छत पर जाने की सीढ़ी का हर पायदान चढ़ने पर जमीन से हमारी ऊंचाई बढ़ती जाती है। (चित्र–1)



सीढ़ी के पहले पायदान P पर जमीन से ऊंचाई PA है। इसी तरह दूसरे पायदान Q पर ऊंचाई QB, तीसरे पायदान R पर RC तथा चौथे पायदान S पर SD है।

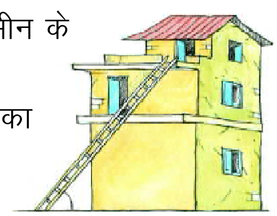
हर पायदान पर हम न सिर्फ ऊपर चढ़ते हैं बल्कि दीवार की तरफ आगे भी बढ़ते हैं।

क्या हम जितना ऊपर चढ़ते हैं उतना ही आगे बढ़ते हैं? क्या इन दोनों के बीच कोई संबंध है? आइये देखते हैं–

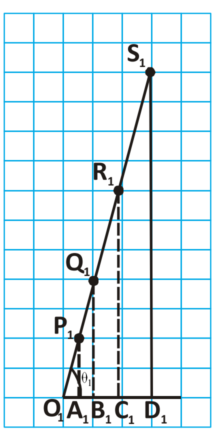
यहाँ $$\frac{PA}{OA} = \frac{QB}{OB} = \frac{RC}{OC} = \frac{SD}{OD}$$

हम जितना ऊपर चढ़ते हैं और जितना आगे बढ़ते हैं, उनका अनुपात नहीं बदलता।

अगर जहाँ चढ़ना है उसकी ऊंचाई थोड़ी ज्यादा हो तो क्या करना होगा? सीढ़ी को कुछ आगे दीवार की ओर खिसकाना होगा (चित्र 2)। सीढ़ी का जमीन के तल के साथ बनने वाला कोण बढ़ जाएगा।



अब खाने गिनकर बताएँ कि क्या ऊपर की तरह दोनों दूरियों का अनुपात स्थिर है?

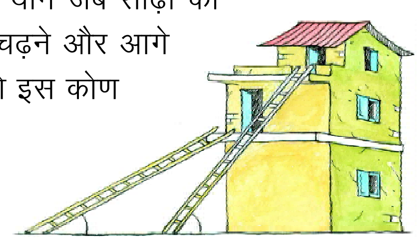


चित्र–2

$$\frac{P_1A_1}{O_1A_1} = \frac{Q_1B_1}{O_1B_1} = \frac{R_1C_1}{O_1C_1} = \frac{S_1D_1}{O_1D_1}$$

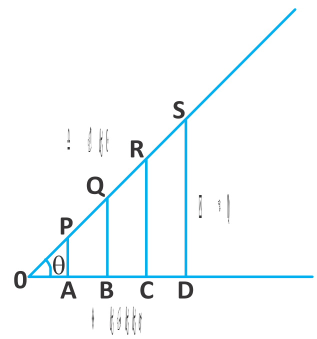
हम पाते हैं कि इस में भी अनुपात स्थिर है।

किंतु दूसरी स्थिति में अनुपात पहले से अधिक है। याने जब सीढ़ी का जमीन के साथ बनने वाला कोण (θ) बढ़ा तो ऊपर चढ़ने और आगे बढ़ने वाली दूरियों में अनुपात भी बढ़ा। इस अनुपात को इस कोण का tangent कहा जाता है।



याने tangent $\theta = \dfrac{PA}{OA} = \dfrac{QB}{OB}$

और tangent $\theta_1 = \dfrac{P_1A_1}{O_1A_1} = \dfrac{Q_1B_1}{O_1B_1}$



चित्र–3

अन्य अनुपात : इन चित्रों में जमीन से ऊपर उठने, दीवार की ओर बढ़ने और इनसे संबंधित सीढ़ी के हिस्से को रेखाखण्डों के रूप में देखें तो सीढ़ी के हर पायदान को शीर्ष बनाते हुए कई समकोण त्रिभुज दिखाई पड़ेंगे।

इन त्रिभुजों में यदि सीढ़ी द्वारा जमीन की रेखा से बनाए गए कोण को θ से व्यक्त करें तो हर त्रिभुज में इस कोण के लिए ऊपर उठने की दूरी–**लंब**, दीवार की ओर बढ़ी गई दूरी–**आधार** तथा सीढ़ी का हिस्सा–**कर्ण** होगा।

ऊपर हमने $\dfrac{PA}{OA}$ को tangent θ कहा है।

'लंब' और 'आधार' के रूप में tangent $\theta = \dfrac{\text{लंब}}{\text{आधार}}$ । इसका मान चित्र–3 के सभी त्रिभुजों में बराबर है। जब तक 'θ' नहीं बदलता, आधार व लम्ब का अनुपात भी नहीं बदलता।

इस अनुपात tangent θ को संक्षेप में tan θ कहते हैं।

$$\tan\theta = \frac{PA}{OA} = \frac{QB}{OB} = \frac{RC}{OC}$$

क्या इन रेखाखण्डों से कोई और भी अनुपात बनेंगे?

इन तीन दूरियों से कोई और स्थिर अनुपात भी बनेंगे? आइए लंब और कर्ण का अनुपात देखें।

अनुपात $= \dfrac{PA}{OP}, \dfrac{QB}{OQ}, \dfrac{RC}{OR}$

इसी तरह आधार और कर्ण का अनुपात

$$\frac{OA}{OP}, \frac{OB}{OQ}, \frac{OC}{OR}$$

क्या ये अनुपात भी स्थिर हैं? जाँच कीजिए।

कोण θ के लिए लंब व कर्ण के अनुपात को sineθ (संक्षेप में sinθ) कहते हैं।

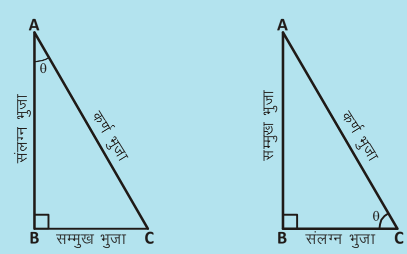
$$\sin\theta = \frac{PA}{OP} = \frac{QB}{OQ} = \frac{RC}{OR} \text{ आदि}$$

यहाँ समकोण ΔABC में ∠B = 90° तथा ∠A = θ (चित्र (i) में) तब कोण θ के सामने की भुजा BC सम्मुख भुजा व AB संलग्न भुजा एवं AC कर्ण भुजा होती है।

इसी प्रकार समकोण ΔABC में (चित्र (ii)) ∠B = 90°, ∠C = θ तब कोण θ के सामने की भुजा AB सम्मुख भुजा व BC संलग्न भुजा एवं AC कर्ण भुजा होगी।

चित्र (i) में $\sin\theta = \dfrac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण भुजा}} = \dfrac{BC}{AC}$, $\cos\theta = \dfrac{AB}{AC}$, $\tan\theta = \dfrac{BC}{AB}$

इसी प्रकार चित्र (ii) के लिए करके देखो।



इसी तरह आधार और कर्ण के अनुपात को cosine θ (संक्षेप में cosθ) कहते हैं।

$$\cos\theta = \frac{OA}{OP} = \frac{OB}{OQ} = \frac{OC}{OR} \text{ आदि}$$

(sinθ, cosθ, tanθ आदि अनुपातों को त्रिकोणमितीय अनुपात कहते हैं।)

प्रश्नावली - 8.1

यदि समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B$ समकोण है तो निम्नलिखित में $\sin A$, $\cos C$, $\tan A$ का मान ज्ञात कीजिए–

जबकि

(i)	AC=5	AB = 3	BC = 4
(ii)	AB = 12	BC = 5	AC = 13
(iii)	AB = 5	AC = 13	BC = 12
(iv)	BC = 12	AB = 9	AC = 15

अनुपातों में संबंध

sinθ, cosθ और tanθ में संबंध : समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B$ समकोण है यदि $\angle C = \theta$ है तो

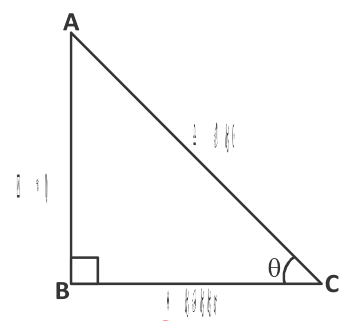
$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$= \frac{AB}{AC} \times \frac{AC}{BC}$$

$$= \frac{AB}{AC} \div \frac{BC}{AC}$$

$$= \sin\theta \div \cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



चित्र-4

कुछ और त्रिकोणमितीय अनुपात

हमने देखा समकोण त्रिभुज ABC जिसमें $\angle B$ समकोण है के $\angle C = \theta$ के लिए:–

$$\frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \sin\theta, \qquad \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \cos\theta, \qquad \frac{\text{लंब}}{\text{आधार}} = \tan\theta$$

इन अनुपातों के व्युत्क्रम तीन और अनुपात हैं। त्रिकोणमिति में इन तीनों अनुपातों के नाम हैं–

$$\frac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}} = \text{cosecant}\theta \text{ (या cosec}\theta) = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \text{secant}\theta \text{ (या sec}\theta) = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\frac{\text{आधार}}{\text{लंब}} = \text{cotanget}\theta \text{ (या cot}\theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$

करके देखें

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ हो तो $\cot\theta$ को भी $\sin\theta$ व $\cos\theta$ के रूप में लिखें?

त्रिकोणमितीय अनुपात और पाइथागोरस प्रमेय (Trigonometric Ratio and Pythagoras Theorem)

$a^2 = a \times a$

$b^2 = b \times b$

सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों की अवधारणा समकोण त्रिभुजों से समझी जा सकती है। समकोण त्रिभुज की भुजाओं के बीच पाइथागोरस प्रमेय एक संबंध देता है। इसका उपयोग करके हम त्रिकोणमितीय अनुपातों में कुछ संबंध ढूंढ़ सकते हैं।

एक समकोण त्रिभुज ABC की समकोण बनाने वाली भुजाओं की लंबाई a और b है और इसका विकर्ण c है, तो पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार a, b और c के बीच संबंध होगा:

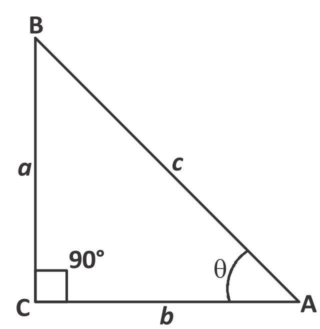
$\sin^2\theta$

$= \sin\theta \times \sin\theta$

$a^2 + b^2 = c^2$ (लंब^2 + आधार^2 = कर्ण^2) ...(1)

अब यदि विकर्ण c, आधार b पर θ कोण बनाता हो तो

$$\sin\theta = \frac{a}{c} \text{ और } \cos\theta = \frac{b}{c}$$



चित्र–5

दोनों पक्षों का वर्ग करें और जोड़ें

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{c^2}{c^2}$$ [$\because a^2+b^2=c^2$ संबंध (1) से]

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

इसे आप ऐसे भी लिख सकते हैं:–

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \qquad \text{या} \qquad \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$\sin^2\theta$ और $\cos^2\theta$ के संबंध के उपर्युक्त तीनों कथन समीकरण के रूप में हैं। ये समीकरण हमने कोण θ के उन सभी मानों के लिए दिखाए हैं जो $0°$ से $90°$ तक है। समकोण त्रिभुज में $(0 \leq \theta \leq 90)$ के लिए इन्हें **त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ** (Trigonometric identities) कहते हैं।

कुछ अन्य सर्वसमिकाएँ हैं जो $\tan^2\theta$ और $\sec^2\theta$ तथा $\cot^2\theta$ और $\mathrm{cosec}^2\theta$ में संबंध बताती हैं। इन्हें निम्नलिखित तरह से ज्ञात कर सकते हैं। देखें और समझें:–

सर्वसमिका–1 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta$ से भाग करने पर

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta \quad \text{(सर्वसमिका–2)} \quad \left(\because \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta\right)$$

पुनः यदि सर्वसमिका–1 के दोनों पक्षों में $\cos^2\theta$ से भाग करने पर

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \text{या} \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad \text{(सर्वसमिका–3)}$$

करके देखें

सर्वसमिका 1 की तरह सर्वसमिका 2 और सर्वसमिका 3 को भी उनके अलग रूपों में लिखिए।

त्रिकोणमितीय अनुपात पता करना

हमने देखा कि सभी छह त्रिकोणमितीय अनुपात एक दूसरे से संबंधित हैं। हम यह भी देख सकते हैं कि यदि कोई एक त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात हो तो हमें उस कोण से बने किसी भी समकोण त्रिभुज की हर दो भुजाओं के अनुपात की जानकारी प्राप्त हो जाती है।

ऐसा हम पाइथागोरस प्रमेय के उपयोग से कर सकते हैं। एक त्रिकोणमितीय अनुपात से सभी, शेष अनुपात मालूम कर सकते हैं।

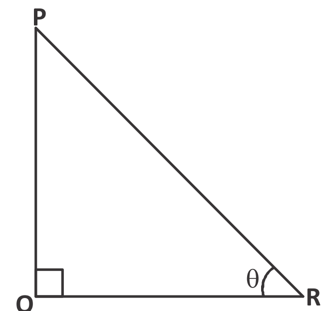
उदाहरण–1. ΔPQR एक समकोण त्रिभुज है। जिसमें $\angle Q$ समकोण है तथा $\angle R = \theta$

हमें $\sin\theta = \frac{3}{5}$ दिया है। क्या इससे हम बाकी अनुपात पता कर सकते हैं?

$$\because \sin\theta = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \frac{PQ}{PR} = \frac{3}{5}$$

इसे लिख सकते हैं, $\sin\theta = \frac{3x}{5x}$ (चूँकि $3x$ व $5x$ का अनुपात वही है जो 3 और 5 में है)

हम कहेंगे $PQ = 3x$, $PR = 5x$



चित्र–6

समकोण त्रिभुज PQR में, कर्ण^2 = लंब^2 + आधार^2

$(5x)^2 = (3x)^2$ + आधार^2

$25x^2 - 9x^2$ = आधार^2

$16x^2$ = आधार^2

$(4x)^2$ = आधार^2

या $(4x)^2 = (QR)^2$

या $QR = \sqrt{(4x)^2}$

$QR = 4x$

अब $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$

इसी प्रकार शेष त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात किए जा सकते हैं।

उदाहरण–2. यदि $\sin\theta = \frac{5}{13}$ हो तो शेष सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : हमें दिया गया है:– $\sin\theta = \frac{5}{13}$ ...(1)

$\sin\theta$ का मान ज्ञात होने पर $\cos\theta$ का मान कैसे निकालें।

हमें मालूम है–

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$\cos\theta$ पता करने के लिए इसे ऐसे लिखेंगे–

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 \qquad [\text{दिया है } \sin\theta = \frac{5}{13}]$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169 - 25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\cos^2\theta = \left(\frac{12}{13}\right)^2$$

$\therefore \quad \cos\theta = \dfrac{12}{13}$ ...(2)

अब हमें sinθ और cosθ के मान मालूम हैं। आइए अब tanθ का मान पता करते हैं।

आप जानते हैं कि– $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ या $\sin\theta \div \cos\theta$

$$\therefore \tan\theta = \frac{5}{13} \div \frac{12}{13}$$

$$= \frac{5}{13} \times \frac{13}{12}$$

$$\tan\theta = \frac{5}{12}$$

अब शेष अनुपात secθ, cosecθ और cotθ के मान ज्ञात करते हैं।

हम जानते हैं कि– $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

अब $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{12/13} = \dfrac{13}{12}$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{5/13} = \frac{13}{5}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{5/12} = \frac{12}{5}$$

उदाहरण–3. यदि $\sec A = \dfrac{5}{3}$, तो कोण A के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए–

हल : हमें दिया है $\sec A = \dfrac{5}{3}$ .... (1)

(i) चूँकि $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$ (secA का व्युत्क्रम cosA है)

$\therefore \cos A = \dfrac{1}{5/3} = \dfrac{3}{5}$ होगा।

(ii) सर्वसमिका 1 का उपयोग करके sinA का मान ज्ञात करेंगे।

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25}$$

$$= \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\sin^2 A = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\sin A = \frac{4}{5}$$

(iii) चूँकि $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ या $\sin A \div \cos A$

अब $\tan A = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5}$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$\therefore \tan A = \frac{4}{3}$ होगा।

(iv) tanA का व्युत्क्रम cotA होता है

अतः $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}$ होगा

(v) $\because \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{4/5} = \frac{5}{4}$

अतः $\operatorname{cosec} A = \frac{5}{4}$ होगा।

उदाहरण–4. यदि 5 $\tan\theta = 4$ हो तो $\dfrac{5\sin\theta - 3\cos\theta}{\sin\theta + 2\cos\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $5\tan\theta = 4$

तो $\tan\theta = \dfrac{4}{5}$

अब $\dfrac{5\sin\theta - 3\cos\theta}{\sin\theta + 2\cos\theta}$

$$= \frac{5\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} - \dfrac{3\cos\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + 2\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}}$$ ($\cos\theta$ से अंश एवं हर में भाग देने पर)

$$= \frac{5\tan\theta - 3}{\tan\theta + 2}$$ $\left(\because \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta\right)$

$$= \frac{5\left(\dfrac{4}{5}\right) - 3}{\left(\dfrac{4}{5}\right) + 2}$$ $\left(\because \tan\theta = \dfrac{4}{5}\right)$

$$= \frac{4-3}{(4+10)/5} = \frac{1}{14/5}$$

$$= \frac{5}{14}$$

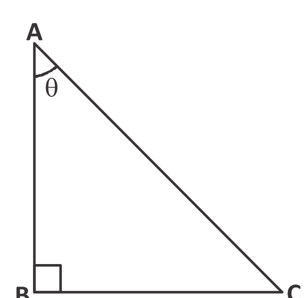
उदाहरण–5. किसी समकोण त्रिभुज ABC में, जिसमें $\angle B$ समकोण है।
यदि $\tan\theta = 1$ हो तो सिद्ध कीजिए
कि $2\sin\theta\cos\theta = 1$

हल : ΔABC में $\tan\theta = \dfrac{BC}{AB} = 1$

या $BC = AB$

माना $AB = BC = k$ जहां k कोई धनात्मक संख्या है

अब $AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{k^2 + k^2} = k\sqrt{2}$



चित्र–7

इसलिए $\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ और $\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

तो $2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 \quad (\because \sqrt{2}\times\sqrt{2} = 2)$

या $2\sin\theta\cos\theta = 1$ यही सिद्ध करना था।

प्रश्नावली - 8.2

1. निम्नलिखित में कोई एक त्रिकोणमितीय अनुपात दिया गया है। शेष त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करें:–

   (i) $\tan\theta = \frac{3}{4}$ (ii) $\sin\theta = \frac{5}{13}$ (iii) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

   (iv) $\cot\theta = 1$ (v) $\operatorname{cosec}A = \frac{5}{4}$ (vi) $\sec\beta = 2$

   (vii) $\operatorname{cosec}A = \sqrt{10}$

2. यदि $\cot\theta = \frac{21}{20}$ हो, तो $\sin\theta \times \cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. यदि $\cos A = \frac{4}{5}$ हो, तो $\frac{\cot A - \sin A}{2\tan A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\sec\theta = \frac{5}{3}$ हो, तो $\frac{\tan\theta - \sin\theta}{1 + \tan\theta.\sin\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\sin A = \frac{1}{3}$ हो, तो $\cos A$, $\operatorname{cosec}A + \tan A$, $\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. किसी समकोण ΔABC में $\angle C$ समकोण हो तथा $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ हो, तो $\sin A\cos B + \cos A\sin B$ का मान ज्ञात कीजिए।

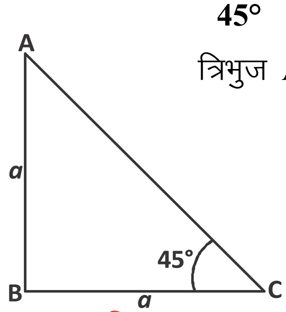
7. यदि $\cot A = \frac{3}{4}$ हो, तो $\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A}$ का मान ज्ञात कीजिए

8. यदि $\sin\theta = \frac{4}{5}$ हो, तो $\frac{4\tan\theta - 5\cos\theta}{\sec\theta + 4\cot\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

कुछ विशेष कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

समकोण त्रिभुज में $\theta = 0°, 30°, 45°, 60°$ अथवा $90°$ के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्यामिति का उपयोग कर पता कर सकते हैं। आइए देखें:–

45° के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात



चित्र-8

त्रिभुज ABC समकोण त्रिभुज है। जिसमें $\angle B$ समकोण है तथा $\angle C = 45°$ है।

स्पष्ट है कि $\angle A$ भी $45°$ का होगा।

यदि $BC = a$ हो तो

$AB = a$ (क्यों)

(किसी त्रिभुज में बराबर कोणों के सामने की भुजाएँ बराबर होती हैं।)

अब $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$= a^2 + a^2 = 2a^2$

$AC = a\sqrt{2}$

$\because$ $\angle C = 45°$ के लिए BC आधार, AB लंब और AC कर्ण है।

$$\therefore \quad \sin C = \sin 45° = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cot 45° = \frac{1}{\tan 45°} = \frac{1}{1} = 1$$

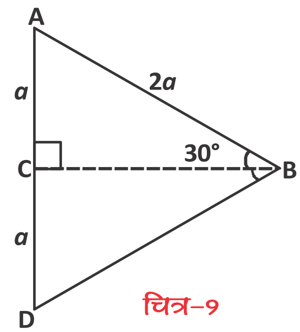
$$\sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{cosec } 45° = \frac{1}{\sin 45°} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

30° के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

ΔABD एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी प्रत्येक भुजा $2a$ व प्रत्येक कोण $60°$ है।

B से AD पर लंब डालें।



चित्र–9

यह AD को C पर मिलेगा।

$\therefore$ $AC = CD = a$ (क्यों?)

$\angle ABC = \angle DBC = 30°$ (क्यों?)

(समबाहु त्रिभुज के किसी शीर्ष से सामने वाली भुजा पर डाला गया लंब उस भुजा को दो बराबर भागों में बांटता है एवं शीर्ष के कोण को समद्विभाजित भी करता है।)

अब समकोण त्रिभुज ACB में $\angle C$ समकोण है।

$\angle ABC = 30°$ तथा इस कोण के लिए BC आधार, AC लंब और AB कर्ण है।

$BC^2 = AB^2 - AC^2$ $(BC^2 + AC^2 = AB^2$ से)

$= (2a)^2 - (a)^2 = 4a^2 - a^2$

$= 3a^2 = a^2.3$

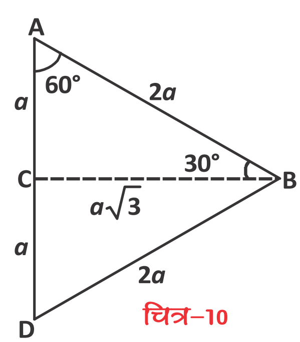
$BC = a.\sqrt{3}$

अब हमारे पास AB, BC और AC के मान हैं।

आप इनकी सहायता से 30° के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान अपनी कॉपी में लिखिए। आपके साथियों ने जो मान निकाले हैं उनसे मिलाइए।

60° के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

त्रिभुज ABC में $\angle A = 60°$ है।



चित्र–10

इस कोण के लिए लंब BC $\left(= a\sqrt{3}\right)$ है।

आधार AC $(= a)$ तथा कर्ण AB $(= 2a)$ है।

$$\sin 60° = \frac{BC}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

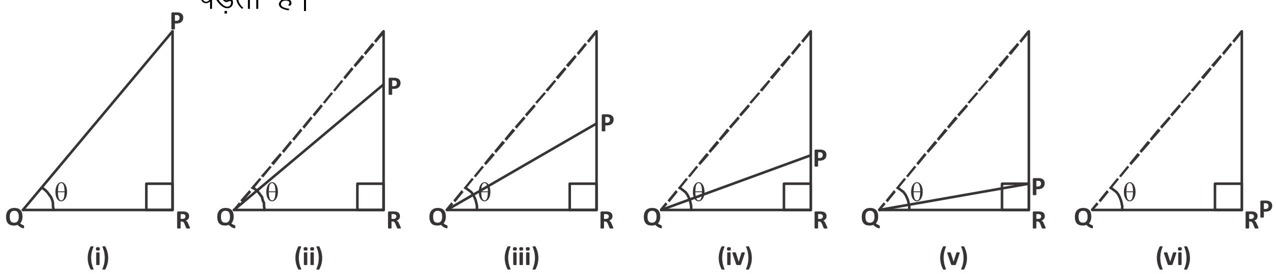
$$\tan 60° = \frac{BC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

शेष अनुपात साथियों के साथ मिलकर प्राप्त कीजिए।

0° के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

0° के कोण के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करने के लिए हमें समकोण त्रिभुज के बारे में सोचना होगा जिसका एक कोण 0° का हो। क्या ऐसा त्रिभुज संभव है? (इस सवाल पर अपने साथियों से चर्चा कीजिए।)

यहाँ हम इस बात पर विचार करेंगे कि किसी समकोण त्रिभुज का कोई न्यून कोण लगातार छोटा और छोटा होता जाए तो उसकी भुजाओं की लंबाइयों में कैसा बदलाव दिखाई पड़ता है।



चित्र-11

त्रिभुज PQR एक समकोण त्रिभुज है। $\angle PQR$ वह कोण है जिसे $0°$ तक छोटा करना है। चित्र (i) से (vi) में क्रमशः कोण θ को छोटा होता हुआ दिखाया गया है।

कोण को छोटा करते जाने पर लंब PR में क्या कोई बदलाव आ रहा है?

क्या कर्ण QP में भी कोई बदलाव दिखाई पड़ रहा है?

आप देख रहे हैं जैसे-जैसे θ कम हो रहा है PR भी छोटा होता जा रहा है।

जब θ लगभग शून्य के बराबर हो जाएगा तब PR भी लगभग शून्य के बराबर होगा।

अतः जब $\theta = 0$ होगा तब लंब $PR = 0$

इसके साथ ही QP भी छोटा हो रहा है और लगभग आधार QR के बराबर होता जा रहा है।

अतः $\theta = 0$ पर आधार QR = कर्ण QP

अतः $\sin 0° = \dfrac{PR}{QP} = \dfrac{0}{QP} = 0$

$\cos 0° = \dfrac{QR}{QP} = 1$ ($\because QR = QP$ दिया है)

$\tan 0° = \dfrac{PR}{QR} = \dfrac{0}{QR} = 0$

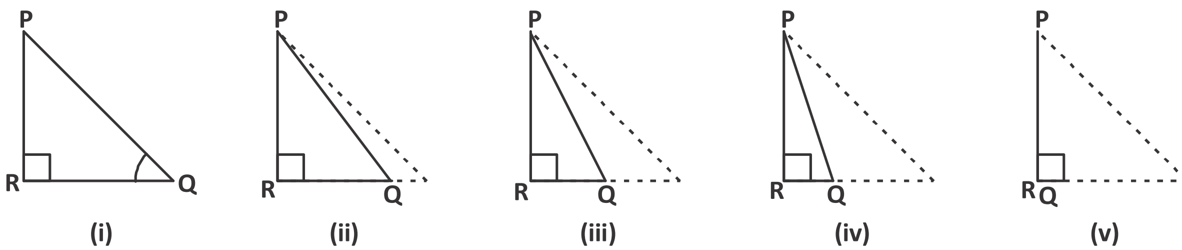
$\cot 0° = \dfrac{QR}{PR} = \dfrac{QR}{0}$ = अनिर्धारित (किसी परिमेय संख्या के हर में शून्य हो तो वह अनिर्धारित है)

$\sec 0° = \dfrac{QP}{QR} = 1$

$$\text{cosec } 0° = \frac{QP}{PR} = \frac{QP}{0} = \text{अनिर्धारित}$$

90° के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

90° कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करने के लिए ऐसा समकोण त्रिभुज लेना होगा जिसका एक न्यूनकोण बढ़ते–बढ़ते 90° ही हो जाए, उस त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयों में क्या परिवर्तन दिखाई पड़ता है?



चित्र–12

त्रिभुज PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसके ∠PQR को लगातार 90° तक बढ़ाना है। चित्र–12 में (i) से (v) तक ∠Q को क्रमशः बढ़ता हुआ दिखाया गया है।

कोण Q को बढ़ाने पर आधार QR में क्या कोई बदलाव आ रहा है?

क्या कर्ण PQ में भी कोई परिवर्तन दिख रहा है?

आप देख रहे हैं कि Q का मान बढ़ाते जाने पर आधार QR छोटा होता जा रहा है तथा जब $Q = 90°$ होगा तब $QR = 0$ हो जाएगा। इसके साथ ही PQ भी छोटा होता जा रहा है और लगभग लंब PR के बराबर होता जा रहा है।

अतः $\angle Q = 90°$ पर कर्ण PQ = लंब PR और आधार $QR = 0$

अब $$\text{Sin } 90° = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \frac{PR}{PQ} = 1$$

$$\text{Cos } 90° = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{QR}{PQ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan 90° = \frac{\text{लंब}}{\text{आधार}} = \frac{PR}{QR} = \frac{PR}{0} = \text{अनिर्धारित}$$

इसी प्रकार अन्य अनुपातों के लिए मान लिखिए।

कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

BJDHIL

सारणी–1

कोण अनुपात	0°	30°	45°	60°	90°
sinθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tanθ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अनिर्धारित
cotθ	अनिर्धारित	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
secθ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अनिर्धारित
cosecθ	अनिर्धारित	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

उदाहरण–6. मान ज्ञात कीजिए–

$$\cos 60° \ \cos 30° + \sin 60° \ \sin 30°$$

हल : $\cos 60° \ \cos 30° + \sin 60° \ \sin 30°$ में मान रखने पर

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

उदाहरण–7. मान ज्ञात कीजिए–

$$\frac{5\sin^2 30° + \cos^2 45° - 4\tan^2 30°}{2\sin 30° \ \cos 30° + \tan 45°}$$

tan 90°, sec 90°, cot 0°, cosec 0° अनिर्धारित हैं। 90° से थोड़े से कम मान पर गणना करें तो tanθ और secθ का मान बहुत ही अधिक होगा। 90° की तरफ आते जाते यह मान अनंत होता जाता है।

इसी तरह cotθ और cosecθ भी θ के 0° तक पहुंचते–पहुंचते अनंत होते जाते हैं और इनके मान निर्धारित नहीं किए जा सकते।

हल : $\dfrac{5\sin^2 30° + \cos^2 45° - 4\tan^2 30°}{2\sin 30° \cos 30° + \tan 45°}$ में मान रखने पर

$$= \frac{5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1}$$

$$= \frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{2} - \frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}$$

$$= \frac{\frac{15 + 6 - 16}{12}}{\frac{\sqrt{3} + 2}{2}} = \frac{\frac{21 - 16}{12}}{\frac{\sqrt{3} + 2}{2}}$$

$$= \frac{5}{12} \times \frac{2}{\sqrt{3}+2} = \frac{5}{6\left(\sqrt{3}+2\right)}$$

$$= \frac{5}{6\left(2+\sqrt{3}\right)} \times \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)}$$ (परिमेयीकरण करने याने हर को परिमेय संख्या बनाने पर)

$$= \frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{6\left(4-3\right)} = \frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{6} \qquad \left((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = (2)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2\right)$$

उदाहरण–8. सत्यापन कीजिए–

$$\cos^2 30° - \sin^2 30° = \cos 60°$$

हल : $\cos^2 30° - \sin^2 30°$

$= (\cos 30°)^2 - (\sin 30°)^2$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2} = \cos 60°$$

प्रश्नावली – 8.3

1. निम्नलिखित में से सही विकल्प चुनिए–

(i) $\dfrac{1 - \tan^2 45°}{1 + \tan^2 45°} =$

(a) 1 (b) tan90° (c) 0 (d) sin45°

(ii) $\dfrac{2\tan 30°}{1 - \tan^2 30°} =$

(a) sin 60° (b) sin 30° (c) tan 60° (d) cos 60°

2. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\cos 30° \cos 45° - \sin 30° \sin 45°$ (ii) $\tan 30° \sec 45° + \tan 60° \sec 30°$

(iii) $\operatorname{cosec} 30° + \cot 45°$ (iv) $\dfrac{\cot 60°}{\sec 30° - \tan 45°}$

(v) $\tan^2 60° + \tan^2 45°$ (vi) $\dfrac{\cos 30° + \sin 60°}{1 + \cos 60° + \sin 30°}$

(vii) $\dfrac{\sin^2 45° + \cos^2 45°}{\tan^2 60°}$ (viii) $\dfrac{\sin 30° - \sin 90° + 2\cos 0°}{\tan 30° \tan 60°}$

3. जाँचिए सत्य या असत्य–

(i) $\sin 30° \cos 60° + \cos 30° \sin 60° = \tan 90°$

(ii) $1 - 2\sin^2 30° = \cos^2 60°$ (iii) $2\cos^2 45° - 1 = \cos 90°$

(iv) $\sin^2 45° = 1 - \cos^2 45°$ (v) $\sin^2 60° + \cos^2 60° = 1$

BJHDK9

त्रिकोणमितीय समीकरण

जिस प्रकार एक चर राशि वाले बीजीय समीकरणों को हल कर अज्ञात राशि x, y, z, ... आदि राशि का मान ज्ञात करते हैं, उसी प्रकार त्रिकोणमितीय समीकरण को हल कर अज्ञात कोण θ का मान ज्ञात किया जाता है। इस भाग में हम उन त्रिकोणमितीय समीकरणों का अध्ययन करेंगे जिनमें चर (अज्ञात) कोण θ का मान 0° और 90° के मध्य हो।

उदाहरण–8. समीकरण $2\sin\theta - 1 = 0$ को हल कीजिए, यदि $0° \le \theta° \le 90°$

हल : $2\sin\theta - 1 = 0$

$2\sin\theta = 1$ या $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

$$\sin\theta = \sin 30° \qquad \left(\because \sin 30° = \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \theta = 30°$$

उदाहरण–9. समीकरण $\sqrt{3}\tan\theta = 1$ को हल कीजिए यदि $0° \le \theta° \le 90°$

हल : $\sqrt{3}\tan\theta = 1$ या $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\tan\theta = \tan 30° \qquad \left(\because \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\therefore \theta = 30°$$

प्रश्नावली – 8.4

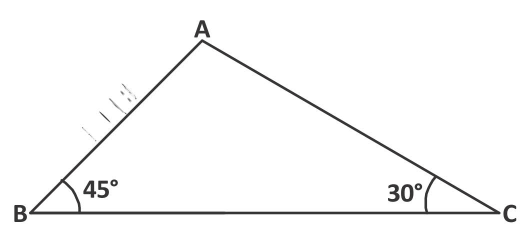
निम्नलिखित त्रिकोणमितीय समीकरण को θ के मान के लिए हल कीजिए, जबकि $0° \le \theta° \le 90°$

1. $\sin\theta = \cos\theta$
2. $2\cos\theta = 1$
3. $2\sin^2\theta = \frac{1}{2}$
4. $3\tan^2\theta - 1 = 0$
5. $2\sin\theta = \sqrt{3}$
6. $\tan\theta = 0$
7. $3\mathrm{cosec}^2\,\theta = 4$
8. $2\cos^2\theta = \frac{1}{2}$
9. $4\sin^2\theta - 3 = 0$
10. $4\sec^2\theta - 1 = 3$
11. $\cot^2\theta = 3$

त्रिकोणमितीय अनुपात के अनुप्रयोग

अभी तक हमने जितने कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के बारे में पढ़ा है वे कोण किसी समकोण त्रिभुज के ही कोण थे। समकोण त्रिभुज के अतिरिक्त अन्य त्रिभुजों, चतुर्भुजों, पंचभुजों, बहुभुजों में भी ये त्रिकोणमितीय अनुपात होते हैं और इनके मान निश्चित होते हैं। ये इन कोणों के विशिष्ट गुण होते हैं। अर्थात् किसी भी आकृति में कोणों के मान ज्ञात होने पर त्रिकोणमितीय अनुपात की सहायता से भुजाओं की माप ज्ञात कर सकते हैं। इसे हम निम्नलिखित उदाहरण से समझेंगे–

उदाहरण–10. एक त्रिभुज लेते हैं ABC जिस में $\angle B = 45°$ और $\angle C = 30°$ $AB = 5$ सेमी. त्रिभुज में कोई भी कोण 90° अंश का नहीं है।

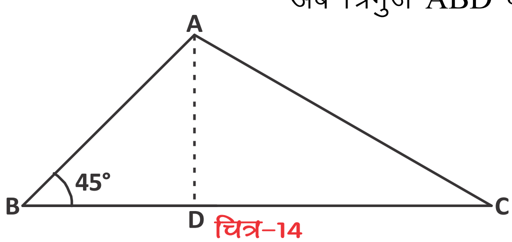


चित्र–13

क्या हम इस जानकारी से AC व BC पता कर सकते हैं?

शीर्ष A से भुजा BC पर एक लंब खींचें जो उसे D पर काटे।

अब त्रिभुज ABD को लें तो



चित्र-14

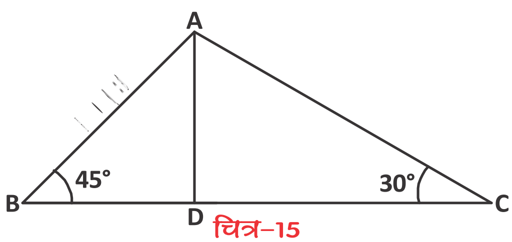
$$\sin 45° = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{5}$$

यानेे $AD = 5\sin 45° = \frac{5}{\sqrt{2}}$

हम BD पता कर सकते हैं। रेहाना ने कहा इस त्रिभुज में $AD = BD$

क्या आपको यह ठीक लगता है?

ये दोनों बराबर क्यों हैं?



चित्र-15

अब त्रिभुज ADC को देखें

$$\sin 30° = \frac{AD}{AC}$$

$$AC = \frac{AD}{\sin 30°}$$

यानेे $AC = \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sin 30°}$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}} \times 2 = 5\sqrt{2}$$

और $DC = AC\cos 30° = 5\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{5\times\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

BD और DC दोनों को जोड़ कर BC प्राप्त करते हैं।

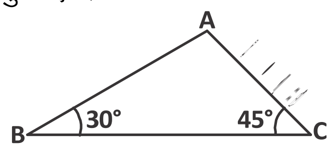
$$BC = \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}}$$

अतः $AB = 5, AC = 5\sqrt{2}$ और $BC = \frac{5\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}}$

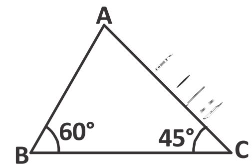
करके देखें

सभी भुजाएं ज्ञात करें

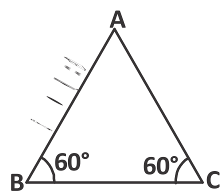
1.



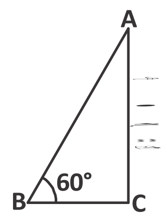
2.



3.



4.



हमने सीखा

1. त्रिकोणमितीय अनुपातों को निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात करते हैं–

$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$ $\quad\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$ $\quad\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$ $\quad\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$ $\quad\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

2. त्रिकोणमितीय अनुपातों में संबंध होता है जैसे– $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$,

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

3. यदि न्यूनकोण त्रिभुज का एक त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात है तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपात आसानी से ज्ञात कर सकते हैं?

4. हम विभिन्न कोण जैसे $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ और 90° के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कर सकते हैं।

5. sinA या cosA का मान 1 से ज्यादा नहीं हो सकता जबकि secA या cosecA का मान हमेशा 1 से ज्यादा या 1 होगा।

6. 3 सर्वसमिकाएँ हैंः–

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ जहाँ $\theta \neq 0$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ जहाँ $\theta \neq 90^\circ$