

# MP BOARD CLASS 12 PAPER 2013

## गणित : कक्षा XII

समय : 3 घण्टा ]

पूर्णांक : 100

- निर्देश : (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।  
(ii) प्रश्न-पत्र में दिये गये निर्देश सावधानीपूर्वक पढ़कर प्रश्नों के उत्तर दीजिए।  
(iii) प्रश्न-पत्र में दो खण्ड दिये गये हैं—खण्ड 'अ' और खण्ड 'ब'।  
(iv) खण्ड 'अ' में दिये गये प्रश्न 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं जिनके अन्तर्गत एक शब्द/वाक्य में उत्तर, रिक्त स्थानों की पूर्ति, सही जोड़े बनाना, सत्य/असत्य तथा सही विकल्प का चयन करना है। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।  
(v) खण्ड 'ब' के प्रत्येक प्रश्न में आन्तरिक विकल्प दिये गये हैं।  
(vi) प्रत्येक प्रश्न पर आबंटित अंक उसके सम्मुख अंकित हैं।

### खण्ड 'अ'

1. प्रत्येक वस्तुनिष्ठ प्रश्न में दिये गये विकल्पों में से सही उत्तर चुनकर लिखिए—

1 × 5 = 5

- (i) व्यंजक  $\frac{1}{x(x+a)}$  की आंशिक भिन्नें हैं—

(a)  $\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a}\right]$ , (b)  $\frac{1}{a} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a}\right]$ ,

(c)  $\frac{1}{a} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a}\right]$ , (d)  $\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a}\right]$ .

- (ii)  $\cos^{-1} \frac{3}{5} - \sin^{-1} \frac{4}{5}$  का मान है—

(a) 1, (b) 0, (c) -1, (d)  $\frac{4}{5}$ .

- (iii) बिन्दु (5, 12, 13) की x अक्ष से लम्बवत् दूरी है—

(a)  $\sqrt{313}$ , (b)  $\sqrt{13}$ , (c)  $\sqrt{5}$ , (d)  $\sqrt{12}$ .

- (iv) उस समतल का समीकरण जो X अक्ष के समान्तर है तथा Y और Z अक्षों से क्रमशः 5 और 7 अन्तःखण्ड काटता है, है—

(a)  $5x + 3y = 15$ , (b)  $7x + 3z = 21$ ,  
(c)  $7y + 5z = 35$ , (d)  $35x + 21y + 15z = 105$ .

- (v) बिन्दुओं (2, 3, 4) तथा (1, -2, 3) से गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरण होगा—

(a)  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-4}{-1}$ , (b)  $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-4}{-1}$ ,

(c)  $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-4}{-1}$ , (d)  $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-4}{1}$ .

उत्तर—(i) (c), (ii) (b), (iii) (a), (iv) (c), (v) (b).

2. निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य बताइए—

1 × 5 = 5

- (i) उस गोले का समीकरण जिसके एक व्यास के सिरों के निर्देशांक (2, -3, 4) और (-5, 6, 7) हैं,  $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y + 3z - 56 = 0$  है।

- (ii) एक सादश त्रिजसक आद आर आन्तम त्रिबन्दु सपाता हात ह, एकाक सादश कहलाता है ।  
 (iii) जब किसी वस्तु को ऊपर की ओर फेंका जाता है तो ऊपर की ओर जाने पर  $g$  का मान ऋणात्मक होता है ।  
 (iv) दो चरों  $x$  और  $y$  के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक  $r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x \sigma_y}$  होता है ।  
 (v) समाश्रयण गुणांकों का समान्तर माध्य सह-सम्बन्ध गुणांक से छोटा होता है ।  
 उत्तर—(i) असत्य, (ii) असत्य, (iii) सत्य, (iv) सत्य, (v) असत्य ।

3. प्रत्येक का एक शब्द में उत्तर दीजिए— 1 × 5 = 5

- (i) सदिश बीजगणित में विस्थापन कौन-सी राशि है ?  
 (ii)  $\log(\log \sin x)$  का अवकल गुणांक क्या होगा ?  
 (iii) यदि समाकल की सीमायें परस्पर बदल दी जायें तो समाकल के मान का चिह्न पर क्या प्रभाव पड़ता है ?  
 (iv) कार्य किस प्रकार की राशि है ?  
 (v) न्यूटन-रैफसन विधि से किसी संख्या  $y$  का वर्गमूल ज्ञात करने का सूत्र क्या है ?

उत्तर—(i) सदिश, (ii)  $\frac{\cot x}{\log(\sin x)}$ , (iii) चिह्न विपरीत हो जाता है, (iv) अदिश,

$$(v) \sqrt{y} = \frac{1}{2} \left[ x_n + \frac{N}{x_n} \right].$$

4. सही जोड़ी बनाइए— 1 × 5 = 5

- |   |  |
|---|--|
| ‘अ’   | ‘ब’  |
| (i) रेखा $\vec{r} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k})$<br>और समतल $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}) = 5$ आपस में हैं | (a) $\frac{45}{16}$                                      |
| (ii) $\int \sin^2 x \cdot dx$   | (b) $1 - \frac{\pi}{4}$                                  |
| (iii) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \cdot dx$  | (c) $\frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} \sin 2x \right)$ |
| (iv) यदि $x_n$ किसी समीकरण $f(x) = 0$ का सन्निकट मूल हो, तो न्यूटन-रैफसन विधि से $x_{n+1}$ होगा   | (d) समान्तर  |
| (v) न्यूटन-रैफसन विधि से $\frac{5}{2}$ के निकट समीकरण $x^2 - x - 5$ का मूल है   | (e) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$             |

उत्तर—(i) → (d), (ii) → (c), (iii) → (b), (iv) → (e), (v) → (a).

5. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए— 1 × 5 = 5

- (i)  $\sin x^3$  का अवकल गुणांक ..... होगा ।  
 (ii)  $\int \frac{1}{1 - \sin x} dx$  का मान ..... है ।  
 (iii) वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  का क्षेत्रफल ..... है ।  
 (iv) आभासी स्थिति विधि ..... है ।  
 (v) न्यूटन-रैफसन विधि से 10 का घनमूल प्रथम पुनरावृत्ति पश्चात् ..... है ।  
 उत्तर—(i)  $3x^2 \cos x^3$ , (ii)  $\tan x + \sec x$ , (iii)  $\pi a^2$ , (iv) समीकरण के वास्तविक मूल ज्ञात करने की सबसे पुरानी विधि, (v) 2.167.

### खण्ड ‘ब’

6.  $\frac{x^4}{x^3 + 1}$  को आंशिक भिन्नों में विभक्त कीजिए । 4 अथवा  
 $\frac{2x + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)}$  को आंशिक भिन्नों में विभक्त कीजिए ।

7. यदि  $\sin^{-1}x + \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$  हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$2x^2 = \sqrt{5} - 1.$$

4 अथवा

सिद्ध कीजिए कि :  $\cos^{-1} \frac{3}{11} - \sin^{-1} \frac{3}{4} = \sin^{-1} \frac{19}{44}$ .

8. प्रथम सिद्धान्त से  $\tan^{-1}x$  का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

4 अथवा

$\log \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

9. फलन  $f(x) = \sin x + \cos x - 1$  के लिये अन्तराल  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  में रोले की प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

4 अथवा

सिद्ध कीजिए कि  $\sin x + \cos x$  का उच्चिष्ठ मान  $\sqrt{2}$  है।

10. सिद्ध कीजिए कि सहसम्बन्ध गुणांक का मान  $-1$  से  $+1$  के बीच होता है। 4 अथवा निम्नलिखित आँकड़ों से पद विचलन विधि द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

$x$	10	14	18	22	26	30
$y$	18	12	24	6	30	36

11. किसी फर्म के विज्ञापन के खर्च और बिक्री के आँकड़े निम्न प्रकार प्राप्त हुए :

	बिक्री (करोड़ों में)	विज्ञापन (करोड़ों में)
माध्य	40	6
मानक विचलन	10	1.5

सहसम्बन्ध गुणांक  $r = 0.9$

यदि फर्म 60 करोड़ रुपये की बिक्री का लक्ष्य निर्धारित करे, तो विज्ञापन पर खर्च कितना होगा ?

4 अथवा

निम्नांकित आँकड़ों के लिए  $y$  की  $x$  पर समाश्रयण रेखा ज्ञात कीजिए :

$x$	10	9	8	7	6	4	3
$y$	8	12	7	10	8	9	6

12. यदि  $x^y = e^{x-y}$  हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}$$

4 अथवा

यदि  $y = (\sin^{-1}x)^2$  तो सिद्ध कीजिए कि :  $(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \cdot \frac{dy}{dx} - 2 = 0$ .

13.  $x + 3y + 6 = 0$  तथा  $3x - y - 4z = 0$  के प्रतिच्छेदी रेखा से होकर जाने वाले उन समतलों के समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी मूल-बिन्दु से लम्बवत् दूरी 1 है। 5 अथवा एक परिवर्तनशील समतल मूल-बिन्दु से स्थिर दूरी P पर रहता हुआ निर्देशांक अक्षों को A, B, C पर काटता है। दर्शाइए कि चतुष्फलक OABC के केन्द्रक का बिन्दु-पथ  $x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = 16P^{-2}$  है।

14. सदिश विधि से त्रिकोणमिति का साइन (sine) नियम सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

5 अथवा

दर्शाइये कि :  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ .

15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$  का मान ज्ञात कीजिए।

5 अथवा

$f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$  जब  $x \neq 0$   $f(x) = 1$  जब  $x = 0$ , क्या  $f(x)$ ,  $x = 0$  पर सतत है ?

16.  $\int \frac{5x + 7}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

5 अथवा

$\int \frac{dx}{1 - 2 \sin x}$  का मान ज्ञात कीजिए।

17. सिद्ध कीजिए कि :  $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^3 x} dx = \frac{\pi}{4}$ .

5 अथवा

वक्र  $x^2 = 4y$  और रेखा  $x = 4y - 2$  के अन्तर्गत क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

18. अवकल समीकरण  $x(x - y) dy + y^2 dx = 0$  को हल कीजिए।

5 अथवा

अवकल समीकरण  $\cos x \frac{dy}{dx} + y = \sin x$  को हल कीजिए।

9. 10 बच्चों के समूह में से जिसमें 6 लड़के और 4 लड़कियाँ हैं, 3 बच्चे यदृच्छया चुने जाते हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुना हुआ समूह केवल एक विशेष लड़की रखता है।

5 अथवा

दो घनाकार पाँसे एक साथ फेंके जाते हैं। पहले पाँसे पर सम संख्या अथवा दोनों का योगफल 9 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

20. दर्शाइए कि रेखायें  $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7}$  और  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5}$

परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं। प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए। 6 अथवा

$\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-4}{1}$  और  $\frac{x}{-3} = \frac{y+9}{2} = \frac{z-2}{4}$  के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

21. किसी बिन्दु  $(1, 2, 3)$  से होकर जाने वाली और समतलों  $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + 5 = 0$  तथा  $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}) = 3$  के प्रतिच्छेदी रेखा से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। 6 अथवा

उन रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके सदिश समीकरण  $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$  तथा  $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$  हैं।