

7 BSE Class 10 Maths Important Questions Chapter 2

बहुपद

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1.

बहुपद का शून्यक क्या होता है?

उत्तर:

एक वास्तविक संख्या a किसी बहुपद $p(x)$ का शून्यक कहलाएगी यदि $p(a) = 0$ हो अर्थात् चर का वह मान जिससे बहुपद का मान शून्य हो जाए।

प्रश्न 2.

रैखिक बहुपद का उदाहरण लिखिए।

उत्तर:

$ax + b$, जहाँ $a, b \in \mathbb{R}$ तथा $a \neq 0$

प्रश्न 3.

यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हों तो $\alpha + \beta$ तथा $\alpha\beta$ का मान लिखिए।

उत्तर:

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ तथा $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

प्रश्न 4.

विभाजन एल्गोरिथ्म लिखिए।

उत्तर:

यदि दिए गए बहुपद $p(x)$ और शून्येतर बहुपद $g(x)$ के लिए दो ऐसे बहुपदों $q(x)$ तथा $r(x)$ का अस्तित्व होता है कि $p(x) = g(x)q(x) + r(x)$ जहाँ $r(x) = 0$ है या घात $r(x) < \text{घात } g(x)$ है।

प्रश्न 5.

बहुपद किसे कहते हैं?

उत्तर:

एक से अधिक पदों के बीजगणितीय व्यंजक बहुपद कहलाते हैं यदि इसके पदों में किसी भी चर की घात ऋणात्मक नहीं होनी चाहिए।

प्रश्न 6.

एक द्विघात बहुपद का उदाहरण लिखिए।

उत्तर:

$y^2 - 2$

प्रश्न 7.

त्रिघात बहुपद की परिभाषा उदाहरण सहित लिखिए।

उत्तर:

एक ऐसा बहुपद जिसमें घातों की अधिकतम संख्या तीन हो, त्रिघात बहुपद कहलाता है। जैसे $3x^3 - 2x^2 + x - 1$

प्रश्न 8.

बहुपद का मान क्या होता है?

उत्तर:

यदि x में $p(x)$ कोई बहुपद है और यदि k कोई वास्तविक संख्या है, तो $p(x)$ में x को k से प्रतिस्थापित करने पर जो वास्तविक संख्या प्राप्त होती है, वह $p(x)$ का $x = k$ पर मान कहलाती है और इसे $p(k)$ से निरूपित किया जाता है।

प्रश्न 9.

यदि व्यंजक $x^3 - 2x + 1$ का एक भाजक $(x - 1)$ है तो शेषफल लिखिए।

उत्तर:

माना कि व्यंजक $f(x) = x^3 - 2x + 1$ का एक गुणनखण्ड $(x - 1)$ है।

अतः $(1) = (1)^3 - 2(1) + 1 = 1 - 2 + 1$

$= 0$

∴ शेषफल = शून्य

प्रश्न 10.

द्विघात बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

$x^2 + 7x + 10$

$x^2 + 5x + 2x + 10$

$(x + 5) + 2(x + 5) = (x + 2)(x + 5)$

∴ $x^2 + 7x + 10$ का मान शून्य है, जब $x + 2 = 0$ या $x + 5 = 0$ है अर्थात् जब $x = -2$ या $x = -5$ हो।

∴ $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक -2 और -5 हैं।

प्रश्न 11.

यदि 2 बहुपद $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + kx + 10$ का गुणनखण्ड हो तो k का मान लिखिए।

हल:

$f(2) = 2^4 - x^3 - 4 \times 2^2 + k \times 2 + 10$

या $0 = 16 - 8 - 16 + 2k + 10$

$0 = 2k + 2$

∴ $k = -22 - 22 = -1$

प्रश्न 12.

यदि $(x - 2)$ व्यंजक $x^2 + 2x - a$ का एक गुणनखण्ड है तो a का मान लिखिए।

उत्तर:

$$x - 2 = 0 \text{ या } x = 2$$

व्यंजक में रखने पर इसका मान शून्य होना चाहिए। अतः

$$(2)^2 + 2 \times 2 - a = 0$$

$$4 + 4 - a = 0$$

$$a = 8$$

प्रश्न 13.

यदि $x + y + 3 - 3xyz = (x + y + z)(x + y + 2 + k)$ हो, तो k का मान लिखिए।

उत्तर:

$$k = -xy - yz - zx$$

प्रश्न 14.

एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिये जिसके शून्यकों के योग और गुणनफल क्रमशः -4 और 3 हों।

हल:

$x^2 - (\text{मूलों का योग})x + \text{मूलों का गुणनफल}$

$$x^2 - (-4)x + 3$$

$$x^2 + 4x + 3$$

प्रश्न 15.

एक n घात वाले बहुपद के अधिकतम शून्यकों की संख्या लिखिए।

उत्तर:

n शून्यक।

प्रश्न 16.

द्विघात बहुपद $ax + bx + c$ के आलेख की आकृति किस प्रकार की प्राप्त होती है?

उत्तर:

परवलंया आकृति।

प्रश्न 17.

वह बहुपद ज्ञात कीजिये जिसके शून्यक -5 और 4 हों।

हल:

$$[x - (-5)](x - 4)$$

$$\Rightarrow (x + 5)(x - 4)$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 5x - 20$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 20$$

प्रश्न 18.

यदि बहुपद $f(x) = x^2 - 5x + k$ के शून्यक α तथा β इस प्रकार हों कि $\alpha - \beta =$

1 तो k का मान लिखिये।

हल:

दिया गया है कि α तथा β बहुपद $x^2 - 5x + k$ के शून्यक हैं।

$$\alpha + \beta = (-5) + (-5) = -10$$

$$\alpha\beta = k$$

$$\alpha - \beta = 1$$

$$\text{या } (\alpha - \beta) = 1$$

$$(\alpha + \beta) - 4\alpha\beta = 1$$

$$\text{या } 25 - 4k = 1$$

$$4k = 24 \therefore k = 24/4 = 6$$

प्रश्न 19.

$x^2 - 9$ के शून्यक ज्ञात कीजिये।।

हल:

$$x^2 - 9 = (x)^2 - (3)^2 = (x + 3)(x - 3)$$

बहुपद के शून्यक के लिये

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ तथा}$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

अतः बहुपद $x^2 - 9$ के शून्यक = -3

प्रश्न 20.

यदि बहुपद $ax^2 - 6x - 6$ के शून्यकों का गुणनफल 6 हो, तो a का मान ज्ञात कीजिये।

हल:

दिये गये बहुपद के शून्यक a तथा B हैं। तब शून्यकों का गुणनफल

$$\alpha\beta = caca \text{ से}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta = -6a - 6a$$

$$\Rightarrow 6 = -6a - 6a$$

$$\therefore a = -1$$

लघुत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1.

भाग की क्रिया सम्पन्न किये बिना ही सिद्ध कीजिए कि

(i) $x^2 + (a - 3)x - 3a$ $(x + a)$ से पूर्णतः विभाजित होता है।

(ii) $3x^3 + 11x^2 + x - 15$ व्यंजक $(x - 1)$ से पूर्णतः विभाजित होता है।

हल:

(i) यदि $(x + a)$ से पूर्णतः विभाजित है तो $x = -a$ मान रखने पर व्यंजक का मान शून्य हो जायेगा। अतः

व्यंजक में $x = -a$ मान रखने पर

$$= (-a)^2 + (a - 3)(-a) - 3a$$

$$= a^2 - a^2 + 3a - 3a = 0$$

अतः $(x + a)$ से व्यंजक $x^2 + (a - 3)x - 3a$ पूर्णतः विभाजित है।

(ii) व्यंजक में $x = 1$ मान रखने पर

$$3(1)^3 + 11(1)^2 + 1 - 15$$

$$3 + 11 + 1 - 15 = 0$$

अतः व्यंजक $3x^3 + 11x^2 + x - 15$ व्यंजक $(x - 1)$ से पूर्णतः विभाजित है।

प्रश्न 2.

a के किस मान के लिए बहुपद $x^3 + 2x^2 - 3ax - 8$ में व्यंजक $(x - 4)$ का पूरा-पूरा भाग जाता है।

हल:

हम जानते हैं $(x - 4)$ का भाग देने पर शेषफल $f(a)$ प्राप्त होगा।

∴ $f(a)$ जहाँ

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3ax - 8$$

$$f(4) = (4)^3 + 2(4)^2 - 3a \times 4 - 8$$

$$= 64 + 32 - 12a - 8 = 0$$

$$\text{या } 12a = 88$$

$$a = \frac{88}{12} = \frac{22}{3}$$

प्रश्न 3.

सिद्ध कीजिए कि बहुपद $x^2 + 2x + 3$ के शून्य विद्यमान नहीं हैं।

हल:

$$\text{माना कि } f(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$f(x) = \{x^2 + 2 \times x + 1\} + 2$$

$$= (x + 1)^2 + 2$$

यहाँ x के वास्तविक मान के लिए $(x + 1)^2$ का मान ऋणात्मक नहीं होगा। अतः $(x + 1)^2$ हमेशा शून्य से अधिक होगा अतः (x) का मान 2 से अधिक होगा।

प्रश्न 4.

p के किस मान के लिए बहुपद $px^3 + 9x^2 + 6x - 1$ व्यंजक $(3x + 2)$ से पूर्णतः विभाजित होता है।

हल:

दिया गया है कि $(3x + 2)$ दिये गये व्यंजक का एक गुणखण्ड है।

$$\therefore 3x + 2 = 0$$

$$\text{या } 3x = -2 \therefore x = -\frac{2}{3}$$

व्यंजक $f(x) = px^3 + 9x^2 + 6x - 1$ में $x = -\frac{2}{3}$ मान रखने पर

$$\therefore f\left(-\frac{2}{3}\right) = p\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 9\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 6\left(-\frac{2}{3}\right) - 1$$

$$\text{या } p \times \frac{-8}{27} + 4 - 4 - 1 = 0$$

$$\text{या } \frac{-8p}{27} = 1$$

$$\text{या } p = -\frac{27}{8}$$

प्रश्न 5.

एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिये जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः 4 तथा 1 हैं।

हल:

दिया गया है

$$\alpha + \beta = 4$$

$$\text{तथा } \alpha\beta = 1$$

माना द्विघात बहुपद के शून्यक α व β हैं।

$$\therefore \text{द्विघात बहुपद} = (x - \alpha)(x - \beta)$$

$$= x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$= x^2 - 4x + 1$$

$$\text{अतः अभीष्ट बहुपद} = x^2 - 4x + 1$$

प्रश्न 6.

द्विघात बहुपद $2x^2 - 6x + 4$ के शून्यांकों का योग व गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया गया बहुपद $2x^2 - 6x + 4$

$$\begin{aligned} \text{अतः शून्यांकों का योग} &= \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} \\ &= \frac{-b}{a} \\ &= \left(\frac{-6}{2}\right) = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{तथा शून्यांकों का गुणनफल} &= \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} \\ &= \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

प्रश्न 7.

यदि $(x - 1)$ तथा $(x + 2)$ बहुपद $2x^3 + mx^2 + nx - 14$ के गुणनखण्ड हैं तो m तथा n के मान ज्ञात कीजिए।

हल:

माना कि $f(x) = 2x^3 + mx^2 + nx - 14$ है

अतः $(x - 1)$ तथा $(x + 2)$ $f(x)$ के

गुणनखण्ड होने चाहिए।

$$\text{अतः } f(1) = 0 \text{ व } f(-2) = 0$$

व्यंजक : $2x^3 + mx^2 + nx - 14$ में

$$f(1) = m(1)^2 + n(1) - 14 = 0$$

$$\Rightarrow m + n - 12 = 0$$

व्यंजक $2x^3 + mx^2 + nx - 14$ में

$$f(-2) = 2(-2)^3 + m(-2)^2 + n(-2) - 14 = 0$$

$$f(-2) = -16 + 4m - 2n - 14$$

$$\Rightarrow 4m - 2n - 30 = 0 \dots (ii)$$

समीकरण (i) व (ii) से

$$m + n = 12 \dots (iii)$$

$$2m - n = 15 \dots (iv)$$

जोड़ने पर $3m = 27 \Rightarrow$ अतः $m = 9$

समीकरण (iii) से $n = 3$

प्रश्न 8.

यदि बहुपद $x^3 + lx + m$ में $(x - 1)$ या $(x + 1)$ का भाग दिया जाये तो शेषफल 7 बचता है, । तथा m के मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$f(x) = x^3 + lx + m \text{ तथा } (x - 1) \text{ या } (x + 1)$$

इसके गुणनखण्ड हैं जब 7 इसमें से घटा दें अतः

$$(1) = 1 + l + m - 7 = 0$$

$$\Rightarrow l + m - 6 = 0 \dots (i)$$

$$f(1) = -1 - l + m - 7 = 0$$

$$\Rightarrow -1 + m - 8 = 0 \dots (ii)$$

समीकरण (i) व (ii) को हल करने पर $l = -1$ तथा $m = 7$

प्रश्न 9.

द्विघात बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल:

प्रश्नानुसार

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

इसलिए $x^2 + 7x + 10$ का मान शून्य है, जब $x + 2 = 0$ है या $x + 5 = 0$ है, अर्थात् जब $x = -2$ या $x = -5$ हो। इसलिए, $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक -2 और -5 हैं।

अब, शून्यकों का योग $= -2 + (-5) = (-7)$

अतः शून्यकों -2 और -5 द्वारा भी योगफल व गुणनफल वही हैं, जो कि इनमें हैं।

∴ बहुपद के शून्यकों और गुणांकों के बीच सम्बन्ध 'सही' है।

$$= \frac{-(7)}{1} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = (-2) \times (-5) = 10$$

$$= \frac{10}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 10.

एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिये जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः 0 और $\sqrt{5}$ हैं।

हल:

माना द्विघात बहुपद के शून्यक α तथा β हैं।

$$\text{दिया गया है } \alpha + \beta = 0$$

$$\alpha\beta = \sqrt{5}$$

α तथा β शून्यक हैं।

$$\therefore \text{द्विघात बहुपद} = (x - \alpha)(x - \beta)$$

$$= x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$= x^2 - 0 \cdot x + \sqrt{5} = x^2 + \sqrt{5}$$

अतः अभीष्ट बहुपद $= x^2 + \sqrt{5}$

प्रश्न 11.

यदि द्विघात व्यंजक $kx^2 + 5x + 3k$ के शून्यकों का योग उनके गुणनफल के बराबर हो, तो k का मान ज्ञात कीजिये।

हल:

दिए गए व्यंजक $kx^2 + 5x + 3k$ के अनुसार

शून्यकों का योग $(\alpha + \beta) = -5k/3k$

तथा शून्यकों का गुणनफल $(\alpha\beta) = 3k/3k = 1$

अब प्रश्नानुसार $-5k/3k = 1$

या $3k = -5$

$\therefore k = -5/3$

प्रश्न 12.

$3x^3 + x^2 + 2x + 5$ को $1 + 2x + x^2$ से भाग दीजिए। अब $1 + 2x + x^2 \sqrt{3x^3 + x^2 + 2x + 5} \begin{matrix} 3x - 5 \\ 3x^3 + 6x^2 + 3x \end{matrix}$

हल:

यहाँ $f(x) = 3x^3 + x^2 + 2x + 5$

तथा $g(x) = 1 + 2x + x^2$

$$\begin{array}{r} 3x - 5 \\ 3x^3 + 6x^2 + 3x \\ \hline -5x^2 - x + 5 \\ -5x^2 - 10x - 5 \\ \hline 9x + 10 \end{array}$$

भागफल = $3x - 5$ तथा शेषफल = $9x + 10$

प्रश्न 13.

द्विघात बहुपद $x^2 + x - 2$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल:

प्रश्नानुसार

$$x^2 + x - 2 = x^2 + 2x - x - 2$$

$$= x(x + 2) - 1(x + 2)$$

$$= (x + 2)(x - 1)$$

$x^2 + x - 2$ का मान शून्य होगा यदि $(x + 2)(x - 1)$ के मान शून्य हों अर्थात् $x + 2 = 0$

या $x - 1 = 0$ अर्थात् $x = -2$ या $x = 1$

अतः $x^2 + x - 2$ के शून्यक -2 और 1 हैं।

अब, शून्यकों का योग = $-2 + 1$

$$= -1 = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

तथा शून्यकों का गुणन = $(-2)(1)$

$$= -2 = \frac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$