पाठ 11
विशेष प्रकार के चतुर्भुज

आइए सीखें

- समलंब चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज, वर्ग, आयत, समचतुर्भुज की अवधारणाओं को समझकर उनकी आकृतियों की पहचान एवं उनकी विशेषताएँ।
- **निम्नलिखित गुणों का सत्यापन**

  (अ) समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजायें बराबर होती हैं।

  (ब) समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

  (स) समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

  (द) आयत के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तथा लम्बाई में बराबर होते हैं।

  (य) समचतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे के लम्ब समद्विभाजक होते हैं।

  (र) वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं तथा एक-दूसरे को समकोण पर विभाजित करते हैं।

हमने कक्षा 7वीं में चतुर्भुज के शीर्ष, भुजाएँ, कोण, विकर्ण, आसन्न भुजाएँ, सम्मुख भुजाओं और कोणों के योग से सम्बन्धित गुणों के बारे में पढ़ा है अब हम विशेष प्रकार के चतुर्भुज, जैसे समलंब चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज, आयत, वर्ग और समचतुर्भुज के बारे में अध्ययन करेंगे।

11.1 समलंब चतुर्भुज (Trapezium)

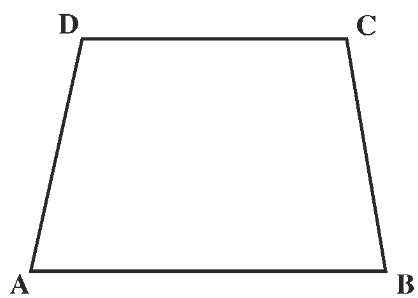
आकृति 11.1 में दिए गए चतुर्भुज ABCD को ध्यान से देखिए। इसमें कौनसी भुजाएँ समान्तर हैं और कौन सी समांतर नहीं है?

देखिए चित्र में

(i) सम्मुख भुजाएँ AB और DC समांतर हैं।

(ii) भुजाएँ AD और BC समांतर नहीं है।

इस प्रकार आकृति 11.1 में सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समांतर है और एक युग्म समान्तर नहीं है। ऐसे चतुर्भुज को हम समलंब चतुर्भुज कहते हैं।



आकृति 11.1

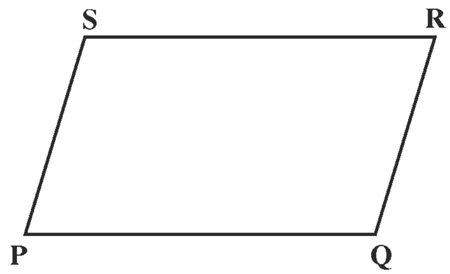
एक चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं के युग्म में से कम से कम एक युग्म की भुजाएं समांतर हो, समलंब चतुर्भुज कहलाता है।

अब आकृति 11.2 में दिए गए चतुर्भुज PQRS को देखिए। इसमें (i) भुजाएँ PQ और SR समांतर हैं।

(ii) भुजाएँ PS और QR भी समांतर हैं।

यह एक समलंब चतुर्भुज है क्योंकि PQ||SR और यह इसलिए भी समलंब है, क्योंकि PS||QR.

इस प्रकार चतुर्भुज PQRS एक विशिष्ट समलंब चतुर्भुज है जिसमें सम्मुख भुजाएँ समांतर हैं। इस प्रकार के समलंब चतुर्भुज को समांतर चतुर्भुज कहते हैं।



आकृति 11.2

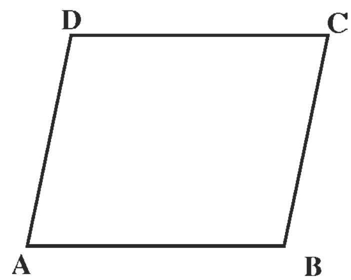
11.2 समांतर चतुर्भुज (Parallelogram)

आकृति 11.3 में दिए गए चतुर्भुज ABCD को देखिए, इसमें

(i) सम्मुख भुजाएँ AD और BC समांतर है।

(ii) सम्मुख भुजाएँ AB और DC भी समांतर है।

इस प्रकार आकृति 11.3 में सम्मुख भुजाओं के युग्म समांतर है, अतः इसको हम समांतर चतुर्भुज कहेंगे।

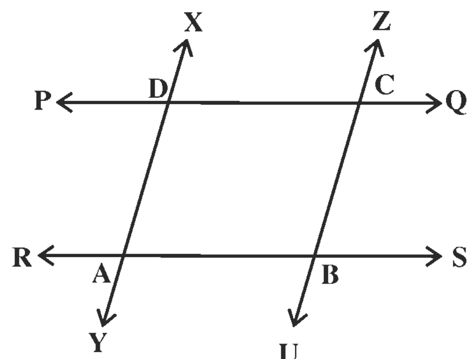


आकृति 11.3

ऐसा चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्मों की भुजाएँ समांतर होती हैं, समांतर चतुर्भुज कहलाता है।

क्रियाकलाप 11.1

समांतर रेखाओं का एक युग्म (PQ, RS) खींचिए। पहले युग्म की समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करते हुए, समांतर रेखाओं का एक अन्य युग्म (XY, ZU) खींचिए। इस प्रकार प्राप्त चतुर्भुज को ABCD से नामांकित कीजिए। AB, BC, CD और DA को मापिए। अपने प्रेक्षणों को सारणी में लिखिए जैसा कि नीचे दर्शाया गया है।



आकृति 11.4

सम्मुख भुजाओं का प्रथम युग्म			सम्मुख भुजाओं का दूसरा युग्म		
AB	DC	AB–DC	AD	BC	AD–BC

हम देखते हैं कि AB–DC और AD–BC दोनों का अंतर शून्य है। अर्थात AB=DC और AD=BC।

इस क्रियाकलाप से हमने सीखा कि

समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

क्रियाकलाप 11.2

क्रियाकलाप 11.1 की तरह समांतर चतुर्भुज ABCD (आकृति 11.4) में ∠A, ∠B, ∠C और ∠D को दर्शाएँ समांतर चतुर्भुज के कोणों ∠A, ∠B, ∠C तथा ∠D को मापिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दी गई सारणी में लिखिए।

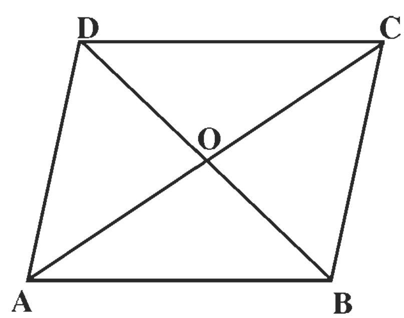
सम्मुख कोणों का पहला युग्म			**सम्मुख कोणों का दूसरा युग्म**		
∠A	∠C	∠A–∠C	∠B	∠D	∠B–∠D

हम देखेंगे कि अंतर ∠A–∠C और ∠B–∠D दोनों ही शून्य हैं। अत: हम कह सकते हैं कि ∠A=∠C और ∠B=∠D. इस क्रियाकलाप से हमने सीखा कि

''समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण सदैव बराबर होते हैं।''

क्रियाकलाप 11.3

क्रियाकलाप 11.1 की तरह समांतर चतुर्भुज ABCD बनाइए तथा A से C और B से D को मिलाइए। अब AC और BD के प्रतिच्छेद बिन्दु को O से नामांकित कीजिए। OA, OC, OB और OD को नापिए और अपने प्रेक्षणों को नीचे दी गई सारणी में लिखिए।



आकृति 11.4 (अ)

पहला विकर्ण			**दूसरा विकर्ण**		
OA	OC	OA–OC	OB	OD	OB–OD

हम देखते हैं कि अंतर OA–OC और OB–OD दोनों ही शून्य है अत: हम कह सकते हैं OA=OC और OB=OD.

इस क्रियाकलाप से हमने सीखा कि

> **''समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।**

इस प्रकार हम देखते है कि एक समांतर चतुर्भुज में

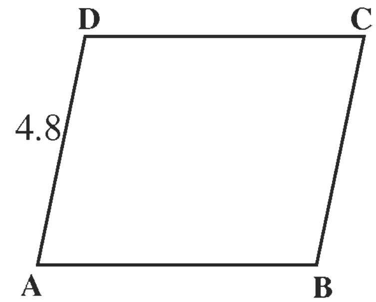
(i) सम्मुख भुजायें बराबर होती हैं।

(ii) सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

(iii) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

उदाहरण 1. किसी समांतर चतुर्भुज की एक भुजा 4.8 सेमी है तथा अन्य भुजा पहली भुजा की $\frac{3}{2}$ गुनी है। इस समांतर चतुर्भुज का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। भुजा AD = 4.8 सेमी. है। चूंकि समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजायें बराबर होती हैं। इसलिए BC = 4.8 सेमी है। दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार, समांतर चतुर्भुज की भुजा AB = $\frac{3}{2} \times 4.8 = 7.2$ सेमी।



आकृति 11.5

इसलिए सम्मुख भुजा DC = 7.2 सेमी

> समांतर चतुर्भुज का परिमाप = 2 [आसन्न भुजाओं का योगफल] = चारों भुजाओं का योगफल

अत: समांतर चतुर्भुज का परिमाप = [4.8 + 7.2 + 4.8 + 7.2] सेमी

= 24 सेमी

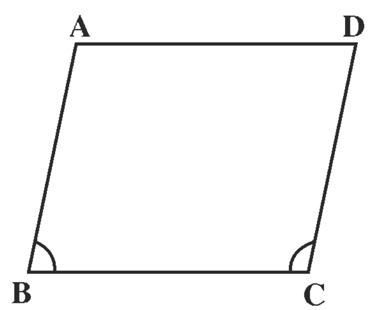
उदाहरण 2. किसी समांतर चतुर्भुज के दो आसन्न कोणों का अनुपात 1:2 है समांतर चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है तथा इसके दो आसन्न कोण B और C का अनुपात 1:2 है।

$\angle B + \angle C = 180^0$ (अंत: कोण)

परन्तु यह दिया गया है कि

$\angle B : \angle C = 1 : 2$



आकृति 11.6

मान लीजिए $\angle B = x$, प्रश्नानुसार $\angle C = 2x$ होगा।

$$x + 2x = 180^0$$
$$3x = 180^0$$
$$x = \frac{180^0}{3}$$
$$x = 60^0$$
$$\angle B = x = 60^0$$
$$\angle C = 2x = 2 \times 60 = 120^0$$

अत: $\angle D = \angle B = 60^0$

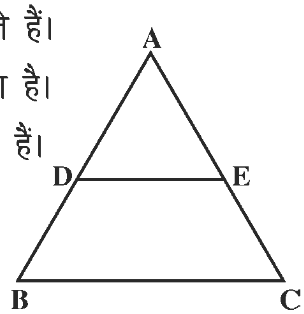
तथा $\angle A = \angle C = 120^0$

समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

टिप्पणी : इस प्रकार हमने देखा कि प्रत्येक समांतर चतुर्भुज एक समलंब चतुर्भुज होता है, परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है अर्थात प्रत्येक समलंब चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज नहीं होता।

प्रश्नावली 11.1

1. **निम्नलिखित रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :**
   (i) वह चतुर्भुज जिसमें भुजाओं का एक युग्म समान्तर है .... चतुर्भुज कहलाता है।
   (ii) समान्तर चतुर्भुज में सम्मुख कोण .... होते हैं।
   (iii) समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे .... करते हैं।
   (iv) प्रत्येक समांतर चतुर्भुज एक .... चतुर्भुज होता है।
   (v) समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ .... होती हैं।
2. आकृति 11.7 में BCED किस प्रकार का चतुर्भुज है?



आकृति 11.7

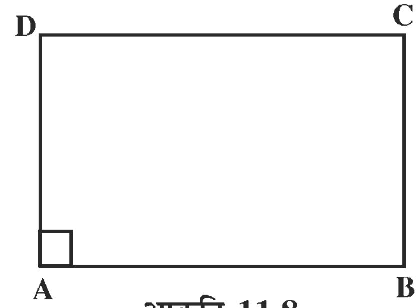
3. ABCD एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें AB ∥ DC
   यदि $\angle A = \angle B = 40^0$ तो अन्य दोनों कोणों की माप ज्ञात कीजिए।
4. चतुर्भुज ABCD में कोण A, B, C और D का अनुपात 1:3:7:9 है।
   (i) प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए?
   (ii) क्या ABCD एक समलंब चतुर्भुज है?
   (iii) क्या ABCD एक समांतर चतुर्भुज है?
5. समांतर और समलंब चतुर्भुज में अंतर स्पष्ट कीजिए।
6. किसी समांतर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाएँ 4 सेमी और 5 सेमी है उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।
7. किसी समान्तर चतुर्भुज के दो आसन्न कोणों का अनुपात 2:3 है उसके सभी कोण ज्ञात कीजिए।

8. किसी समांतर चतुर्भुज के दो आसन्न कोण बराबर हैं। इस समांतर चतुर्भुज के प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए।

11.3 आयत (Rectangle)

आकृति 11.8 में दिए गए चतुर्भुज ABCD को ध्यान से देखिए।

यह एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें $\angle A = 90^0$ है। अत: इस समांतर चतुर्भुज को हम आयत कहेंगे।

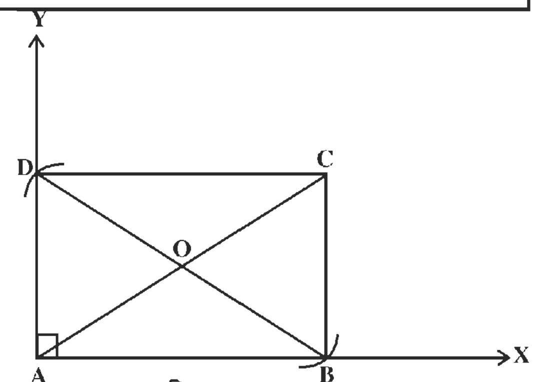


आकृति 11.8

"समांतर चतुर्भुज जिसमें एक कोण समकोण हो आयत कहलाता है।"

क्रियाकलाप 11.4

एक समकोण $\angle XAY$ खींचिए तथा इसकी भुजाओं AX और AY में से क्रमश: मान लीजिए, AD = 3 सेमी और AB = 4 सेमी काट लीजिए। बिन्दुओं D और B से होकर क्रमश: AB और AD के समांतर रेखायें खींचिए जो C पर प्रतिच्छेद करती है।



आकृति 11.9

आकृति 11.9 के अनुसार हमें एक आयत ABCD प्राप्त हो जाता है AC और BD को मिलाइए। AC और BD को नापिए तथा अपने प्रेक्षणों को नीचे दी गई सारणी में लिखिए।

विकर्ण AC	विकर्ण BD	AC – BD

हम देखते हैं कि अंतर AC – BD शून्य है। इस प्रकार AC = BD है।

इस क्रियाकलाप से यह गुण प्रदर्शित होता है।

"आयत के विकर्ण बराबर होते हैं।"

क्रियाकलाप 11.5

क्रियाकलाप 11.4 की तरह आयत ABCD बनाइए इसमें $\angle A = 90^0$ तथा $AB \parallel DC$ है।

अत: $\angle A + \angle D = 180^0$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्त:कोण)

$90^0 + \angle D = 180^0$

$\angle D = 180^0 - 90^0$

$\angle D = 90^0$

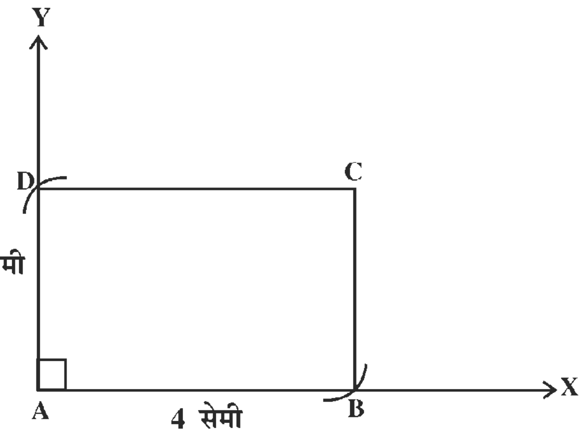
चूँकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज भी है, इसलिए AB = DC और AD = BC

$\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

$\angle C = \angle A$ $[\angle A = 90^0]$

$\angle B = \angle D$ $[\angle D = 90^0]$

अत: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$



आकृति 11.10

आकृति में चारों कोणों को नापिए और अपने प्रेक्षणों को सारणी में लिखिए।

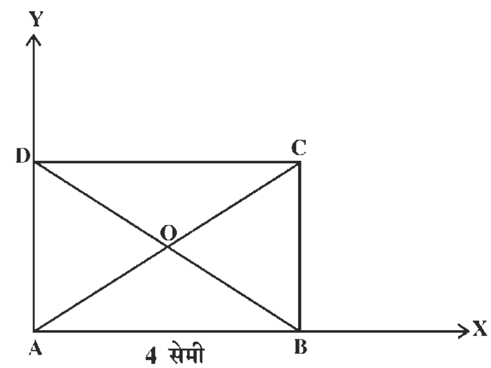
$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$90-\angle A$	$90-\angle B$	$90-\angle C$	$90-\angle D$

हम देखेंगे कि अंतर $90 - \angle A$, $90 - \angle B$, $90 - \angle C$, $90 - \angle D$ सभी शून्य के बराबर हैं। इस क्रियाकलाप से यह गुण प्रदर्शित होता है

आयत का प्रत्येक कोण समकोण होता है।

क्रियाकलाप 11.6

क्रियाकलाप 11.4 की तरह आयत ABCD बनाइए। AC और BD को मिलाइए इनके प्रतिच्छेद बिन्दु को 0 से नामांकित कीजिए अब OA, OB, OC और OD को मापिए अपने प्रेक्षणों को सारणी में लिखिए।



आकृति 11.11

पहला विकर्ण			दूसरा विकर्ण		
OA	OC	OA–OC	OB	OD	OB–OD

हम देखेंगे कि अन्तर OA–OC और OB–OD दोनों ही शून्य है। अतः हम कह सकते हैं कि OA=OC और OB = OD इस क्रियाकलाप से हमें पता लगता है कि

आयत के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

इस प्रकार हमने सीखा है कि एक आयत में

(i) चारों कोण समकोण होते हैं।

(ii) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

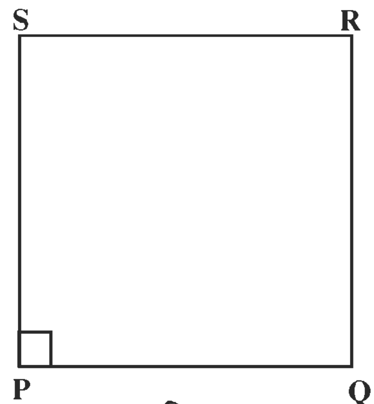
(iii) विकर्ण बराबर होते हैं।

(iv) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

11.4 वर्ग (Square)

आकृति 11.12 में दिये गये चतुर्भुज PQRS को देखिए। यह एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ PQ और PS बराबर है।

$\angle P = 90^0$ भी है, इस प्रकार के समांतर चतुर्भुज को वर्ग कहते हैं।



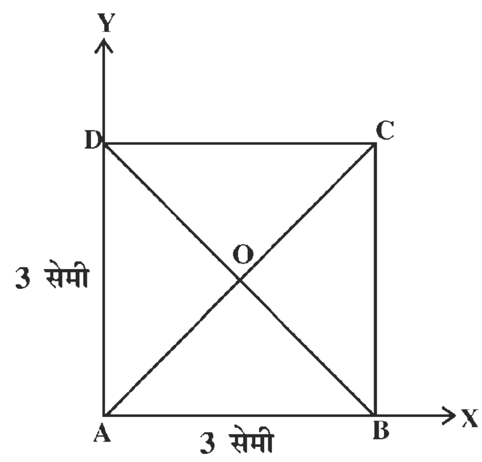
आकृति 11.12

''एक समांतर चतुर्भुज जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर हों तथा एक कोण समकोण हो वर्ग कहलाता है।

क्रियाकलाप 11.7

एक समकोण $\angle XAY$ खींचिए तथा इसकी भुजाओं AX और AY में से क्रमशः मान लीजिए कि भुजा AD = 3 cm और AB =3 cm. बिन्दु D और B से होकर क्रमशः AB और AD के समांतर रेखाएँ खीचिये जो C पर प्रतिच्छेद करती है। इस प्रकार हमें एक वर्ग ABCD प्राप्त हो जाता है।

भुजाओं AB, BC, CD और DA को नापिए। आकृति 11.13 और प्रेक्षणों को सारणी में लिखे।



आकृति 11.13

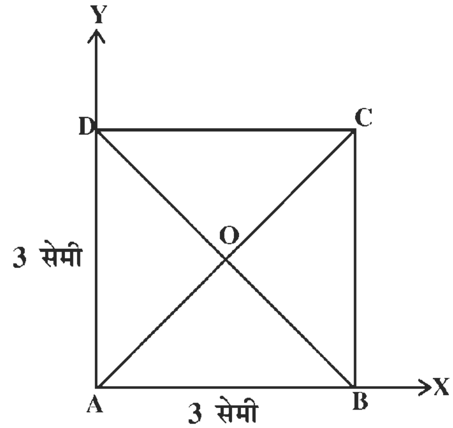
AB	BC	CD	DA	AB-BC	BC-CD	CD-DA	DA-AB

आप देखेंगे कि अंतर AB-BC, BC-CD, CD-DA, DA-AB चारों ही शून्य हैं

अर्थात् AB = BC = CD = DA

इस क्रियाकलाप से हमें पता लगता है कि

वर्ग की चारों भुजाएँ बराबर होती है



आकृति 11.14

क्रियाकलाप 11.8

क्रियाकलाप 11.7 की तरह वर्ग ABCD बनाइए। AC और BD को मिलाइए। विकर्ण AC और BD को मापिए और अपने प्रेक्षणों को नीचे दी गई सारणी में लिखिए।

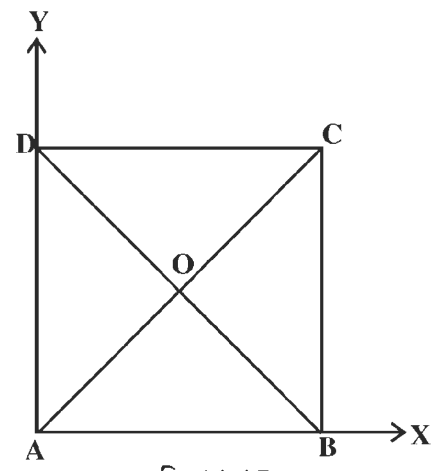
विकर्ण AC	विकर्ण BD	AC-BD

हम देखते हैं कि अन्तर AC-BD शून्य के बराबर है। इस प्रकार AC=BD है। इस क्रियाकलाप से वर्ग का निम्नलिखित गुण प्रदर्शित होता है।

वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं।

क्रियाकलाप 11.9

एक समकोण $\angle XAY$ खींचिए। इसकी भुजाओं AX तथा AY में से क्रमशः रेखाखण्ड AB और AD इस प्रकार काटिए कि AB = AD हो। D से होकर एक रेखा AB के समान्तर खींचिए तथा B से होकर, एक रेखा AD के समान्तर खींचिए जो एक-दूसरे को C पर काटती है। स्पष्ट है समान्तर चतुर्भुज ABCD वर्ग है। AC और BD को मिलाइए। AC और BD के प्रतिच्छेद बिन्दु को O से नामांकित कीजिए। $\angle BOC$ तथा $\angle AOB$ को मापिए, और अपने प्रेक्षणों को सारणी में लिखिए



आकृति 11.15

$\angle AOB$	$90^0 - \angle AOB$	$\angle BOC$	$90^0 - \angle BOC$

हम देखेंगे कि अंतर $90^0 - \angle AOB$ और $90^0 - \angle BOC$ दोनों ही शून्य हैं। इस प्रकार

$\angle AOB = \angle BOC = 90^0$

अत: $\angle COD = \angle AOD = 90^0$

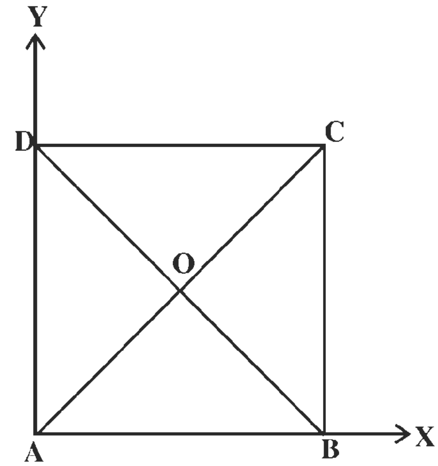
इस क्रियाकलाप से निम्नलिखित गुण प्रदर्शित होता है।

''वर्ग के विकर्ण लम्बवत होते हैं।''

क्रियाकलाप 11.10

क्रियाकलाप 11.7 की तरह वर्ग ABCD बनाइए। AC और BD को मिलाइए। विकर्ण AC और BD के प्रतिच्छेद बिन्दु को O से नामांकित कीजिए।

अब OA, OB, OC और OD को नापिए। अपने प्रेक्षणों को एक सारणी के रूप में नीचे दर्शाए अनुसार लिखिए।



आकृति 11.16

पहला विकर्ण			दूसरा विकर्ण		
OA	OC	OA – OC	OB	OD	OB – OD

हम देखेंगे कि OA – OC और OB – OD दोनों ही शून्य है इस प्रकार OA=OC और OB=OD

इस क्रियाकलाप से वर्ग का यह गुण प्रदर्शित होता है।

''वर्ग के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं''

इस प्रकार सारांश रूप में एक वर्ग में

(i) सभी भुजायें समान लम्बाई की होती है।

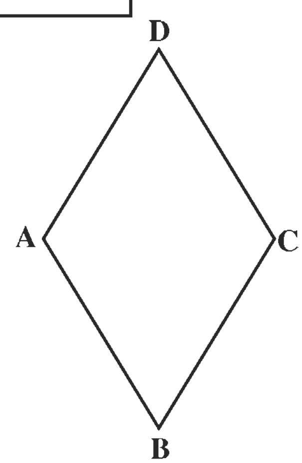
(ii) सभी कोण समकोण होते हैं।

(iii) विकर्ण बराबर लम्बाई के होते हैं।

(iv) विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

11.5 समचतुर्भुज (Rhombus)

आकृति 11.17 में दिए गए चतुर्भुज ABCD को देखिए। यह एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें



आकृति 11.17

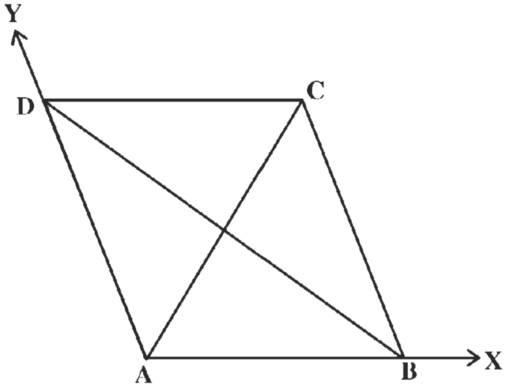
चित्र

आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजायें AB और AD बराबर है। इस आकृति को हम समचतुर्भुज कहते हैं।

''एक ऐसा समांतर चतुर्भुज जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएं बराबर हों समचतुर्भुज कहलाता है।''

क्रियाकलाप 11.11

$\angle XAY$ इस प्रकार बनाइए कि ये समकोण नहीं हो। अब इसकी भुजाओं AX और AY में से क्रमशः रेखाखण्ड AB और AD इस प्रकार काटिए कि AD=AB हो D, से होकर एक रेखा AB के समांतर खींचिए तथा B से होकर एक रेखा AD के समांतर खींचिए जो एक दूसरे को C पर प्रतिच्छेद करे। स्पष्ट है कि हमें एक समांतर चतुर्भुज ABCD प्राप्त हो गया है जिसमें AB=AD है।



आकृति 11.18

अर्थात् हमें एक समचतुर्भुज ABCD प्राप्त हो गया है। भुजाओं AB, BC, CD और DA को मापिए और अपने प्रेक्षणों को सारणी में लिखिए।

AB	BC	CD	DA	AB-BC	BC-CD	CD-DA	DA-AB

हम देखेंगे कि अंतर AB-BC, BC-CD, CD-DA, DA-AB चारों ही शून्य हैं।

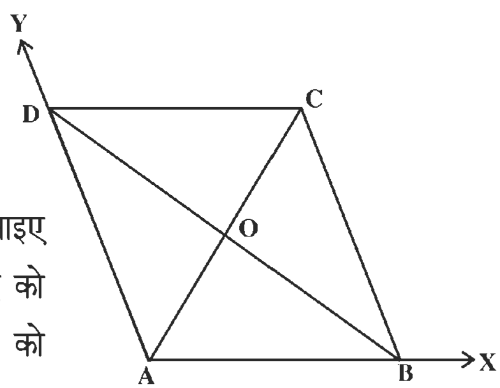
अर्थात् AB = BC = CD = DA.

इस क्रियाकलाप से हमने सीखा कि

समचतुर्भुज में चारों भुजाएँ बराबर होती हैं।

क्रियाकलाप 11.12

क्रियाकलाप 11.11 की तरह समचतुर्भुज ABCD बनाइए AC और BD को मिलाइए। AC और BD के प्रतिच्छेद बिन्दु को 0 से नामांकित कीजिए। अब OA, OC, OB और OD को मापिए। अपने प्रेक्षणों को सारणी में दर्शाये अनुसार लिखिए।



आकृति 11.19

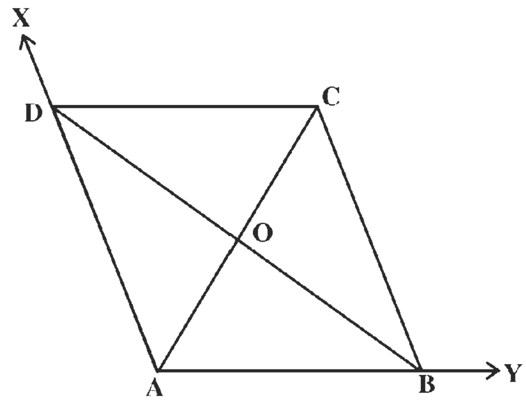
पहला विकर्ण			दूसरा विकर्ण		
OA	OC	OA-OC	OB	OD	OB-OD

हम देखते हैं कि अन्तर OA-OC और OB-OD दोनों ही शून्य है। अतः हम कह सकते हैं कि OA=OC और OB=OD

इस क्रियाकलाप से हमने सीखा कि

समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

क्रियाकलाप 11.13



आकृति 11.20

$\angle XAY$ खींचिए। इसकी भुजाओं AX और AY में क्रमशः रेखाखण्ड AD और AB इस प्रकार काटिए कि AD = AB हो। D से होकर, एक रेखा AB के समान्तर खींचिए तथा B से होकर, एक रेखा AD के समान्तर खींचिए जो एक दूसरे को C पर प्रतिच्छेद करें। (आकृति 11.6) स्पष्ट है कि हमें एक ऐसा समांतर चतुर्भुज ABCD प्राप्त हो गया है, जिस में AB = AD है। अर्थात ABCD एक समचतुर्भुज है।

AC और BD को मिलाइए। AC और BD के प्रतिच्छेद बिन्दु को O से नामांकित कीजिए।

$\angle BOC$ और $\angle COD$ को नापिए। अपने प्रेक्षणों के नीचे दर्शाये अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए।

$\angle BOC$	$90^0 - \angle BOC$	$\angle COD$	$90^0 - \angle COD$

हम देखते हैं कि अंतर $90^0 - \angle BOC$ और $90^0 - \angle COD$ दोनों ही शून्य हैं। इस प्रकार

$$\angle BOC = \angle COD = 90^0$$

अत: $\angle DOA = \angle BOA = 90^0$ (शीर्षाभिमुख कोणों के गुण से)

इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

सम चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

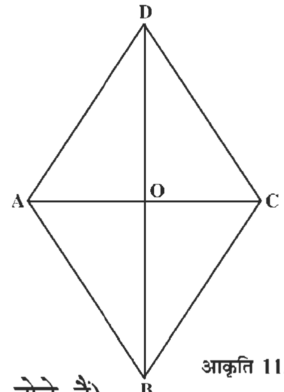
इस प्रकार हमने सीखा कि समचतुर्भुज में (i) चारों भुजाए बराबर होती हैं। (ii) विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

टिप्पणी

(i) प्रत्येक समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज है, परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।
(ii) प्रत्येक आयत एक समांतर चतुर्भुज है, परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।
(iii) प्रत्येक वर्ग एक समांतर चतुर्भुज है परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।
(iv) प्रत्येक वर्ग एक समचतुर्भुज है, परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।
(v) प्रत्येक वर्ग एक आयत है, परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।

उदाहरण 3. किसी समचतुर्भुज ABCD के विकर्णों AC और BD की लंबाइयाँ क्रमश: 6 सेमी और 8 सेमी हैं। इस समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए समचतुर्भुज के विकर्ण AC और BD एक-दूसरे के बिंदु O पर समद्विभाजित करते हैं।



आकृति 11.21

अब AC = 6 सेमी और BD = 8 सेमी है।

$OA = \frac{1}{2} AC = \frac{6}{2}$ सेमी = 3 सेमी है तथा

$OB = \frac{1}{2} BD = \frac{8}{2}$ सेमी = 4 सेमी है।

(विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं)

अब $\angle AOB = 90^0$ (समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं)

पैइथागोरस प्रमेय द्वारा

$AB^2 = OA^2 + OB^2$

$= 3^2 + 4^2$

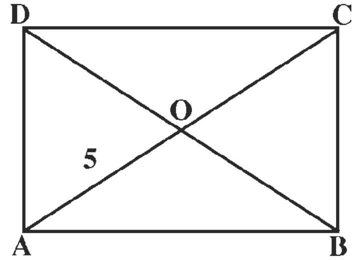
$= 9 + 16$

$= 25$

$AB = \sqrt{25} = 5$ सेमी

अत: समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 5 सेमी है।

उदाहरण 4. आयत ABCD के विकर्ण AC और BD एक-दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं यदि OA = 5 सेमी है, तो AC और BD ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.22

हल : $OA = OC$ (आयत के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।)

$AC = AO + OC$

$= OA + OA$ $(OC = OA)$

$= 2 \times OA$

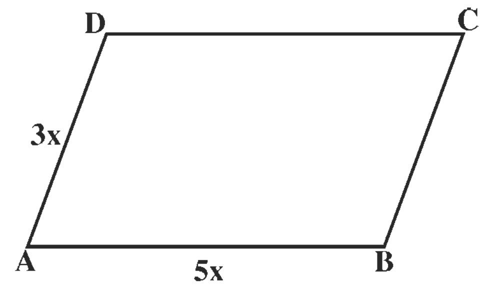
$= 2 \times 5$ सेमी $(OA = 5$ सेमी।

$= 10$ सेमी (आयत के विकर्ण बराबर होते हैं)

चूंकि $BD = AC$

$\therefore BD = 10$ सेमी।

उदाहरण 5. किसी समान्तर चतुर्भुज की दो भुजाओं का अनुपात 3:5 है तथा उसका परिमाप 48 सेमी है समांतर चतुर्भुज की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.23

हल : मान लीजिए ABCD समांतर चतुर्भुज है।

इसकी दो भुजाओं का अनुपात 3 : 5 है।

मान लीजिए $AD = 3x$ और $AB = 5x$.

$AD = BC = 3x$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजायें)

$AB = DC = 5x$

समांतर चतुर्भुज ABCD का परिमाप = 48 सेमी.

$AB + BC + CD + DA = 48$ सेमी

$5x + 3x + 5x + 3x = 48$ सेमी

$16x = 48$ सेमी

$x = \frac{48}{16}$ सेमी

$\therefore x = 3$ सेमी

अतः,भुजा $AB = 5x = 5 \times 3 = 15$ सेमी

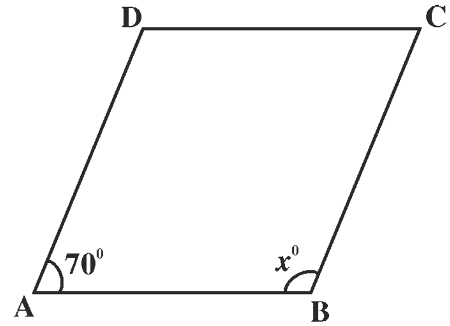
भुजा $AD = 3x = 3 \times 3 = 9$ सेमी

भुजा $BC = 3x = 3 \times 3 = 9$ सेमी

भुजा $DC = 5x = 5 \times 3 = 15$ सेमी

उदाहरण 6. किसी समांतर चतुर्भुज के एक कोण का माप 70^0 है। उसके अन्य कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और माना $\angle A = 70^0$ और $\angle B = x^0$



आकृति 11.24

$\angle A + \angle B = 180^0$ (समांतर चतुर्भुज में एक ही और के अन्त:कोणों का योग 180 होता है)

$70^0 + x^0 = 180^0$

$x^0 = 180^0 - 70^0$

$x^0 = 110^0$

$\angle A = \angle C = 70^0$

$\angle B = \angle D = 110^0$

(समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

चतुर्भुज के गुणधर्म

आकृति	भुजाओं के गुणधर्म	कोणों के गुणधर्म	विकर्णों के गुणधर्म
समलंब चतुर्भुज	सम्मुख भुजाओं का एकयुग्म समांतर होता है।	--	--
समांतर चतुर्भुज	सम्मुख भुजाएँ बराबर और समांतर होती हैं।	सम्मुख कोण बराबर होते हैं।	विकर्णों की लम्बाइयां बराबर नहीं होतीं, विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
समचतुर्भुज	चारों भुजाएँ बराबर होती हैं, सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं।	सम्मुख कोण बराबर होते हैं।	विकर्ण बराबर लम्बाई के नहीं होते हैं। विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
आयत	केवल सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं। सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं।	सभी कोण बराबर होते हैं। प्रत्येक कोण समकोण होता है।	विकर्ण बराबर लम्बाई के होते हैं। विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

वर्ग	सभी भुजायें बराबर होती हैं। सम्मुख भुजायें समांतर होती हैं।	सभी कोण बराबर होते हैं प्रत्येक कोण समकोण होता है।	विकर्ण बराबर लम्बाई के होते हैं। विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

चतुर्भुज

↕

समलम्ब चतुर्भुज

↕

समांतर चतुर्भुज

↕

आयत

↕

वर्ग

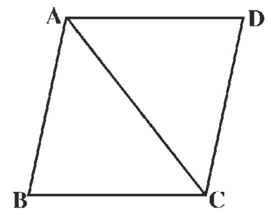
↕

समचतुर्भुज

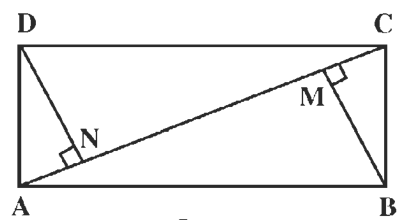
प्रश्नावली 11.2

1. आयत के लिए निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं?
   - (i) इसमें बराबर लम्बाई वाली सम्मुख भुजाओं के दो युग्म हैं।
   - (ii) इसकी सभी भुजायें बराबर लम्बाई की हैं।
   - (iii) इसके विकर्ण बराबर हैं।
   - (iv) इसके विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।
   - (v) इसके विकर्ण परस्पर लम्ब हैं।
   - (vi) इसके सभी कोण बराबर हैं।
2. समचतुर्भुज के लिए निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं?
   - (i) इसमें समांतर रेखाओं के दो युग्म हैं।
   - (ii) इसमें बराबर कोणों के दो युग्म हैं।
   - (iii) इसमें बराबर भुजाओं के केवल दो युग्म हैं।
   - (iv) इसके दो कोण समकोण हैं।
   - (v) इसके विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
   - (vi) इसके विकर्ण बराबर हैं और परस्पर लम्ब हैं।

3. वर्ग में निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं?
   (i) वर्ग की सम्मुख भुजायें समान्तर होती हैं।
   (ii) वर्ग के चारों कोण बराबर होते हैं।
   (iii) वर्ग के विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं।
   (iv) वर्ग एक समचतुर्भुज होता है।
   (v) एक समचतुर्भुज हमेशा वर्ग होता है।
   (vi) सभी आयत वर्ग होते हैं।
4. किसी समांतर चतुर्भुज का परिमाप 150 सेमी है। इसकी एक भुजा अन्य भुजा से 25 सेमी बड़ी हैं। इस समांतर चतुर्भुज की सभी भुजाओं की लम्बाइयाँ ज्ञात कीजिए।
5. एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब नहीं हैं। क्या यह एक समचतुर्भुज हैं? क्यों?
6. समचतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC उसकी भुजा BC के बराबर है। इस समचतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

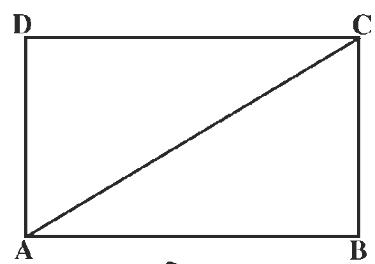


7. किसी चतुर्भुज के विकर्ण 10 सेमी और 24 सेमी लम्बाइयों के हैं। यदि ये विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं तो इस चतुर्भुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
8. किसी चतुर्भुज के प्रत्येक विकर्ण की लम्बाई 12 सेमी है। ये विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित भी करते हैं। इस चतुर्भुज को आप क्या विशेष नाम दे सकते हैं? क्यों?
9. आकृति 11.25 में ABCD एक आयत है। क्रमश: शीर्षों B और D से विकर्ण AC पर दो लम्ब BM और DN हैं।
   (i) क्या AB = CD है? क्यों?
   (ii) क्या ∠BMA = ∠DNC है? क्यों?
   (iii) क्या ∠BAM = ∠DCN है? क्यों?
   (iv) क्या BM = DN है? क्यों?



आकृति 11.25

10. आकृति 11.26 में AC एक आयत ABCD का विकर्ण है।
   (i) क्या BC = DA है? क्यों?
   (ii) क्या AB = CD है? क्यों?
   (iii) क्या ∠B = ∠D है क्यों?
   (iv) क्या ∠BAC = ∠ACD है? क्यों?



आकृति 11.26

11. वर्ग की एक भुजा की माप 4 सेमी है। उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।
12. वर्ग के एक विकर्ण की माप $4\sqrt{2}$ सेमी है। वर्ग का परिमाप ज्ञात कीजिए।