पाठ 7

बीजीय सर्वसमिकाएँ

आइए सीखें

- $(x + a)(x + b)$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$ $(a^3 + b^3)$, $(a^3 - b^3)$ तथा $(a+b+c)^2$ सर्वसमिकाओं को लिखना तथा उनका ज्यामितीय सत्यापन करना।
- उपरोक्त सर्वसमिकाओं पर आधारित गुणनखण्ड के सरल प्रश्नों को हल करना।

7.1 पुनरावलोकन पिछली कक्षाओं में हमने बीजीय व्यंजकों के गुणनफल द्वारा निम्न बीजीय सर्वसमिकाओं को ज्ञात करना सीख लिया है

सर्वसमिका	गुणनफल
1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a + b)$ $\times (a + b)$ $a^2 + ab + ab + b^2$ $= a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a - b)$ $\times (a - b)$ $a^2 - ab - ab + b^2$ $= a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	$(a + b)$ $\times (a - b)$ $a^2 + ab - ab - b^2$ $= a^2 - b^2$

उपरोक्त प्रकार के, तुल्यता के ऐसे बीजीय संबंध को बीजीय सर्वसमिका कहा जाता है। बीजीय संबंध उसमें उपस्थित अक्षरों (चरों) के सभी मानों के लिये सत्य रहता है। $3x + 7 = 16$ समीकरण है सर्वसमिका नहीं, क्योंकि यह केवल $x = 3$ के लिये सत्य है। सर्वसमिकाओं का प्रयोग हम व्यंजकों को सरल करने, मान निकालने तथा गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिये करते हैं।

सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ में द्विपद $a + b$ में उसी द्विपद $(a + b)$ का गुणा कर विस्तार प्राप्त किया गया है। यदि दोनों द्विपद समान न होकर प्रत्येक द्विपद में एक पद समान तथा दूसरे पद भिन्न हों तो सर्वसमिका का क्या रूप होगा, इसका अध्ययन करेंगे।

उदाहरण $(x + a)(x + b)$

7.2 आइए कुछ अन्य सर्वसमिकाएँ ज्ञात करें

सर्वसमिका I $(x + a)(x + b)$ या $x^2 + (a + b)x + ab$

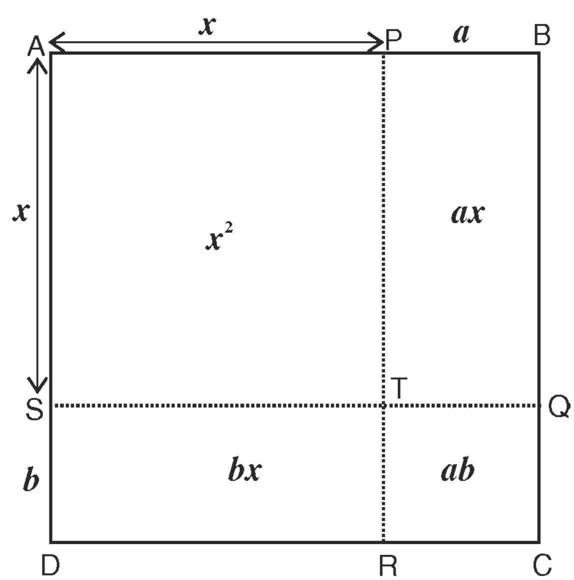
$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$$

(i) गुणनफल द्वारा सर्वसमिका प्राप्त करना

$(x + a)$ $\times (x + b)$ $= x^2 + ax + bx + ab$ $= x^2 + (a + b).x + ab$	$(x + a)(x + b)$ $= x(x + b) + a(x + b)$ $= x^2 + bx + ax + ab$ $= x^2 + (a + b)x + ab$

(ii) सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का ज्यामितीय सत्यापन

क्रियाकलाप 1 : एक आयताकार कार्ड-बोर्ड या शादी के कार्ड को लेकर लम्बाई और चौड़ाई के अनुदिश समान दूरी x मान कर चिह्न लगा लेते हैं, लम्बाई और चौड़ाई के अनुदिश शेष बची हुई दूरियों को a तथा b चिह्नित कर लेते हैं।



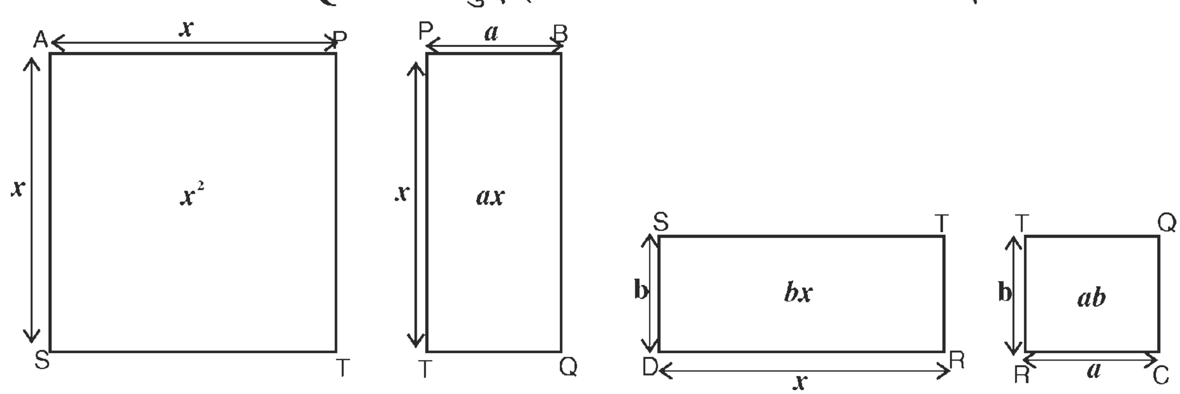
चिह्नित बिन्दुओं से दिए गए चित्र के अनुसार लम्बाई तथा चौड़ाई की रेखाओं के समान्तर क्रमशः सरल रेखाएँ खींचकर प्रत्येक खण्ड का क्षेत्रफल लम्बाई × चौड़ाई सूत्र द्वारा ज्ञात कर लिख देते हैं।

संपूर्ण आकृति/कार्ड (ABCD) का क्षेत्रफल

= लम्बाई × चौड़ाई

$= (x + a) \times (x + b)$

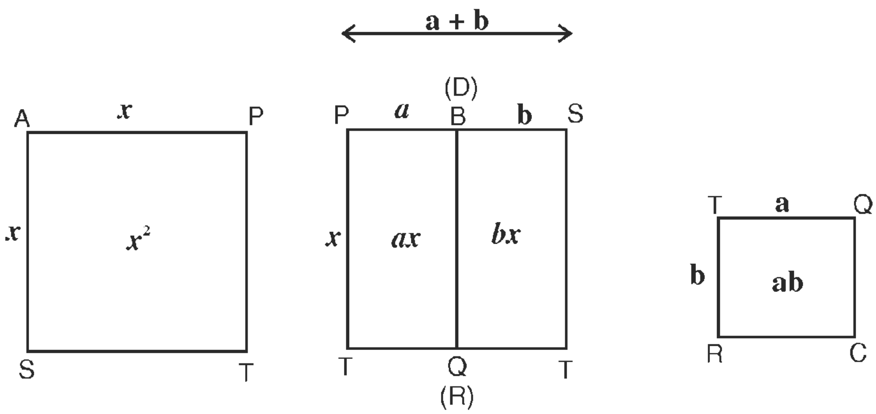
रेखाखण्ड PR व SQ से काटते हुए इन चारों खण्डों को अलग कर लीजिए।



संपूर्ण आकृति का क्षेत्रफल (ABCD का क्षेत्रफल) वही होगा जो अलग किए गए खण्डों का कुल क्षेत्रफल है

$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$

उपरोक्त चार खण्डों में से दो खण्ड ax व bx क्षेत्रफल के हैं। इन्हें मिलाकर (a + b) लम्बाई व x चौड़ाई का एक अन्य कार्ड खण्ड बना सकते हैं।



स्पष्ट है अब सम्पूर्ण कार्ड/आकृति (ABCD) का क्षेत्रफल उपरोक्त तीनों आकृतियों के क्षेत्रफल के योग के बराबर होगा।

अतः **$(x + a)(x + b) = x^2 + (a+b)x + ab$**

इस सर्वसमिका के विविध रूप

सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

में a तथा b के विविध धनात्मक तथा ऋणात्मक मान हो सकते हैं। जिससे निम्नलिखित अन्य सर्वसमिकाएँ प्राप्त करते हैं।

(i) जब b = a हो तब

$$(x + a)(x + a) = (x + a)^2$$
$$= x^2 + (a + a)x + a \times a$$
$$= x^2 + 2ax + a^2$$

(ii) जब b = –a हो तब

$$(x + a)(x - a) = x^2 + [a + (-a)]x + a \times (-a)$$
$$= x^2 - a^2$$

(iii) जब b के स्थान पर -b हो तब

$$(x + a)(x - b)$$
$$= x^2 + [(a + (-b)]x + a \times (-b)$$
$$= x^2 + (a - b)x - ab$$

अब a के स्थान पर –a और b के स्थान पर –b हो तब

(iv) $(x - a)(x - b)$

$$= x^2 + [(-a) + (-b)]x + (-a)(-b)$$

$$= x^2 - (a + b)x + ab$$

अब दिए गए व्यंजकों को सरल करने तथा मान निकालने में इन सर्वसमिकाओं का उपयोग करेंगे। निम्नलिखित उदाहरणों को ध्यान से देखिए

उदाहरण 1. **निम्न गुणनफलों को ज्ञात कीजिए**

(a) $(x + 2)(x + 5)$ (b) $(y + 3)(y + 4)$

हल : (a) सर्व समिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ में $a = 2$ तथा $b = 5$ रखने पर

$$(x + 2)(x + 5) = x^2 + (2 + 5)x + 2 \times 5$$

$$= x^2 + 7x + 10$$

(b) सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ में $x = y, a = 3$ तथा $b = 4$ रखने पर

$$(y + 3)(y + 4) = y^2 + (3 + 4)y + 3 \times 4$$

$$= y^2 + 7y + 12$$

उदाहरण 2. सर्वसमिका का उपयोग करते हुए निम्नलिखित व्यंजकों का मान ज्ञात कीजिए

(a) $(p - 3)(p + 4)$

(b) $(z - 1)(z - 7)$

हल : (a) सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ में $x = p, a = -3$ तथा $b = 4$ रखने पर

$$(p - 3)(p + 4) = p^2 + (-3 + 4)p + (-3)(4)$$

$$= p^2 + p - 12$$

(b) सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ में $x = z, a = -1$ तथा $b = -7$ रखने पर

$$(z - 1)(z - 7) = Z^2 + [(-1) + (-7)].Z + (-1)(-7)$$

$$= Z^2 - 8Z + 7$$

उदाहरण 3. सर्वसमिका का उपयोग कर निम्नलिखित गुणनफलों का मान ज्ञात कीजिए

(a) 105×107 (b) 56×48

हल : (a) $105 \times 107 = (100 + 5)\ (100 + 7)$

सर्वसमिका में $x = 100,\ a = 5$ और $b = 7$ रखने पर

$$= (100)^2 + (5 + 7).100 + 5 \times 7$$
$$= 10000 + 1200 + 35$$
$$= 11235$$

(b) $56 \times 48 = (50 + 6)\ (50 - 2)$

सर्वसमिका में $x = 50,\ a = 6$ तथा $b = -2$ रखने पर

$$= (50)^2 + [(6) + (-2)]\ 50 + (6)\ (-2)$$
$$= 2500 + 4 \times 50 - 12$$
$$= 2500 + 200 - 12$$
$$= 2688$$

सर्वसमिका II : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

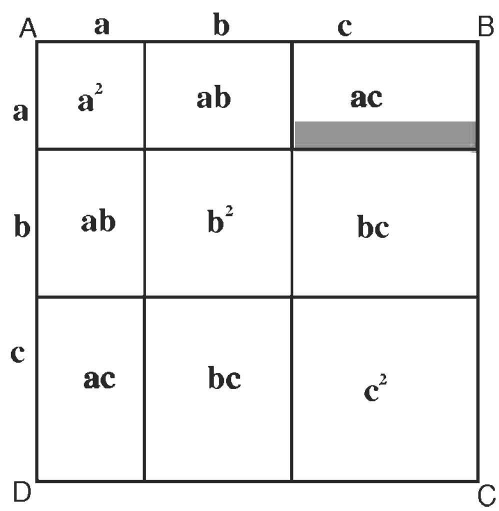
(i) गुणनफल द्वारा सर्वसमिका को प्राप्त करना

$(a + b + c)$	
$\times (a + b + c)$	$(a + b + c)\ (a + b + c)$
$ac + bc + c^2$	$= a\ (a + b + c) + b\ (a + b + c)$
$ab + bc \quad + b^2$	$+ c\ (a + b + c)$
$ab + ac \quad + a^2$	$= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc$
$2ab + 2ac + 2bc + c^2 + b^2 + a^2$	$+ ac + bc + c^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$	$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

(ii) सर्वसमिका II का ज्यामितीय सत्यापन :

क्रियाकलाप 2 एक वर्गाकार कार्ड बोर्ड या शादी के कार्ड को लेकर उसकी लम्बाई के अनुदिश दो चिह्न लगा कर तीन रेखाखण्ड प्राप्त कर लेते हैं। प्राप्त रेखाखण्डों को क्रमशः a, b, c लम्बाई का मान लेते हैं। कार्ड की चौड़ाई के अनुदिश भी उसी प्रकार क्रमशः a, b, c लम्बाई के रेखाखण्ड कर लेते हैं।

इस तरह दिए गए चित्र के अनुसार वर्ग ABCD को 9 क्षेत्रों में बाँटकर उनका क्षेत्रफल लिख लेवें।



स्पष्ट है सम्पूर्ण आकृति का क्षेत्रफल उससे बनने वाले 9 क्षेत्रों के कुल क्षेत्रफल के बराबर होगा।

ध्यान से देखने पर स्पष्ट है कि ab, bc व ca क्षेत्रफल वाली दो-दो आकृतियाँ हैं।

सम्पूर्ण आकृति ABCD का क्षेत्रफल

(लम्बाई × चौड़ाई) $= (a + b + c) \times (a + b + c)$

अत: $\boxed{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}$

उपरोक्त सर्वसमिका का उपयोग किसी त्रिपद के वर्ग को प्रसारित रूप में लिखने में करते हैं, निम्नलिखित उदाहरणों को ध्यान से देखें

उदाहरण : 4 $(2x + 3y + 4z)^2$ को प्रसारित रूप में लिखिए :

हल : दिए हुए व्यंजक की $(a + b + c)^2$ से तुलना करने पर $a = 2x$, $b = 3y$ $c = 4z$

अब सर्वसमिका में a, b, c के इन मानों को रखने पर

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(2x + 3y + 4z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + (4z)^2 + 2\,(2x)\,(3y) + 2\,(3y)\,(4z) + 2\,(4z)\,(2x)$$

$$= 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 24yz + 16xz$$

उदाहरण 5. $(3p - 2q + 7r)^2$ प्रसारित रूप में लिखिए

हल : व्यंजक $(a + b + c)^2$ से व्यंजक $(3p - 2q + 7r)^2$

$a = 3p$

$b = -2q$

$c = 7r$

अत: सर्वसमिका

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,(a)\,(b) + 2\,(b)\,(c) + 2\,(c)\,(a)$$

में a, b और c के मान रखने पर

$$(3p - 2q + 7r)^2 = (3p)^2 + (-2q)^2 + (7r)^2 + 2\,(3p)\,(-2q) + 2\,(-2q)\,(7r) + 2\,(7r)\,(3p)$$

$$= 9p^2 + 4q^2 + 49r^2 - 12pq - 28qr + 42pr$$

उदाहरण 6 सरल कीजिए

$$(2x + y+z)^2 - (2x -y - z)^2$$

हल : $(2x + y+z)^2 = (2x)^2 + (y)^2 + (z)^2 + 2\,(2x)\,y + 2yz + 2z\,(2x)$

$$= 4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 2yz + 4zx \quad .... (I)$$

$$(2x - y - z)^2 = (2x)^2 + (-y)^2 + (-z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(-z) + 2(-z)(2x)$$

$$= 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2yz - 4xz \quad .... (II)$$

(I) में से (II) को घटाने पर

$$(2x + y + z)^2 - (2x - y - z)^2$$

$$= (4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 2yz + 4zx) - (4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2yz - 4zx)$$

$$= 4x^2+y^2+z^2+4xy + 2yz + 4zx-4x^2-y^2-z^2 + 4xy-2yz + 4zx$$

$$= 8xy + 8zx$$

$$= 8x(y + z)$$

प्रश्नावली 7.1

1. निम्नलिखित में से कौन-कौन सी सर्वसमिकाएँ नहीं हैं और क्यों

   (i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

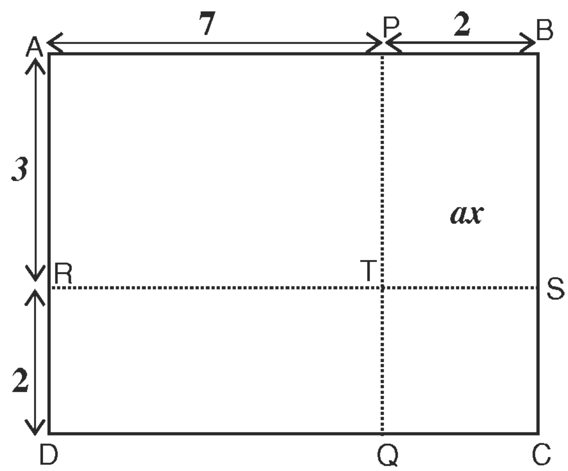
   (ii) $(3 + 5)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 5 + 5^2$

   (iii) $(p + a)(p + b) = p^2 + (a + b).p + q^2$

   (iv) $3x + 5 = 14$

2. बीजीय सर्वसमिका किसे कहते हैं? सर्वसमिका और समीकरण में क्या अंतर है, उदाहरण देकर समझाइए?

3. चित्र को देखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए



   (i) APTR का क्षेत्रफल =

   (ii) PBST का क्षेत्रफल =

   (iii) TSCQ का क्षेत्रफल =

   (iv) RTQD का क्षेत्रफल =

   (v) उपरोक्त चारों क्षेत्रफल का योग =

   (vi) ABCD का क्षेत्रफल =

4. रिक्त स्थानों की पूर्ति इस प्रकार कीजिए कि प्रत्येक कथन सत्य हो जाये :

(i) $(a - b + c)^2 =$ — $+ (-b)^2 + (c)^2 + 2(a)(-b) + 2(-b)(c) + 2$ .....

(ii) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)$ .... + ...

5. निम्नलिखित में उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $(x + 2)(x + 8)$ (ii) $(x + 3)(x + 5)$

(iii) $(y + 5)(y - 7)$ (iv) $(y - 8)(y - 3)$

(v) $(p + 5)(p + 6)$ (vi) $\left(q+\frac{1}{2}\right)\left(q+\frac{1}{2}\right)$

(vii) $\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$ (viii) $\left(p+\frac{3}{5}\right)(p-5)$

(ix) $(y + 5)(y - 5)$ (x) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

(xi) $(z - 14)(z - 1)$ (xii) $(y - 4)(y + 20)$

6. सर्वसमिकाओं का उपयोग कर निम्नलिखित गुणनफलों को ज्ञात कीजिए :

(i) 102×105 (ii) 204×203

(iii) 102×98 (iv) 95×101

(v) 86×82 (vi) 95×96

(vii) 194×189 (viii) 204×197

7. निम्नलिखित गुणनफलों के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\left(x+\frac{1}{5}\right)(x + 5)$ (ii) $(y + 3)\left(y+\frac{5}{6}\right)$

(iii) $\left(z+\frac{3}{4}\right)\left(z+\frac{4}{3}\right)$ (iv) $(p^2 + 5)(p^2 - 7)$

(v) $\left(y^2+\frac{5}{7}\right)\left(y^2-\frac{5}{7}\right)$

8. निम्नलिखित व्यंजकों का मान प्रसारित रूप में लिखिए :

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(x + y + z)^2$

(iii) $(x - y + z)^2$ (iv) $(x - y - z)^2$

(v) $(l + 2m - n)^2$ (vi) $(3a + 2b - 3c)^2$

(vii) $(5a - 7b + c)^2$ (viii) $\left(a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}\right)^2$

(ix) $\left(a-\frac{1}{3}b+\frac{2}{5}c\right)^2$ (x) $\left(-a-\frac{1}{2}b-6\right)^2$

9. सरल कीजिए :

(i) $(x-4)(x-1)$ (ii) $(q^2+4)(q^2+1)$

(iii) $(z^3+1)(z^3-8)$ (iv) $\left(x^3-\frac{3}{8}\right)\left(x^3+\frac{3}{8}\right)$

(v) $(p+q+r)^2+(p-q-r)^2$ (vi) $(2x-y+z)^2-(2x+y-z)^2$

7.3 बीजीय गुणनफल की वैकल्पिक विधि :

ऊर्ध्वतिर्यक विधि द्वारा गुणा के प्रश्नों को हल करने की ही तरह बीजगणित में भी इस विधि द्वारा सरलता से गुणा कर सकते हैं तथा उत्तर की जाँच बीजांक द्वारा की जा सकती है।

उदाहरण 7. $(2x+1)$ और $(3x+2)$ का गुणा कीजिए?

हल : सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक के प्रयोग से गुणनफल सीधे एक पंक्ति में लिखा जा सकता है। प्रश्न का हल दायें से बायें या बायें से दायें तरफ से गुणा कर किया जा सकता है।

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ \times\ 3x+2 \\ \hline 6x^2+7x+2 \\ \hline \end{array}$$

हल बायें से दायें (→)

(1) $\begin{array}{r} 2x \\ \times\ 3x \\ \hline 6x^2 \end{array}$ ↑ ऊर्ध्व गुणा → गुणनफल का बायां पद

(2) $\begin{array}{r} 2x+1 \\ \times\ 3x+2 \\ \hline \end{array}$ ╳ तिर्यक गुणा कर जोड़िए

$(2x \times 2) + (3x \times 1)$

$= 4x + 3x$

$= 7x$ → गुणनफल का मध्य पद

ऊर्ध्व गुणा

(3) $\begin{array}{r} 1 \\ \times\ 2 \\ \hline 2 \end{array}$ → गुणनफल का दायाँ पद

उत्तर की जाँच :

(प्रथम व्यंजक के गुणांकों का बीजांक) × (द्वितीय व्यंजक के गुणांकों का बीजांक) = (उत्तर में प्राप्त व्यंजक के गुणांकों का बीजांक)

(1) $3 \times 5 = 15$ का बीजांक $= 1 + 5 = 6$

(2) $6x^2+7x+2$ में गुणांकों का बीजांक $6+7+2 = 15$, अत: $1+5 = 6$

दोनों बीजांक बराबर हैं। $(6 = 6)$ अत: उत्तर सही है।

- दो या दो से अधिक अंकों की संख्या अथवा बीजीय व्यंजक में चर के गुणांकों तथा अचर संख्याओं के अंकों का योग 1 से 9 (एक अंकीय) के बीच प्राप्त होने वाला अंक उस संख्या या व्यंजक का बीजांक कहलाता है।
- यदि अंकों का योग शून्य अथवा ऋणात्मक हो तो उसमें 9 जोड़कर अभीष्ट बीजांक प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण 8. 2x+y एवं 3x-2y का गुणा (सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक की सहायता से) कीजिए?

हल :

$$\begin{array}{r} 2x + y \\ \times\ 3x - 2y \\ \hline 6x^2 - xy - 2y^2 \end{array}$$

हल दायें से बायें →

(1) प्रथम स्तंभ से

$$\begin{array}{r} y \\ \times\ -2y \\ \hline -2y^2 \end{array}$$

ऊर्ध्व गुणा ↑

गुणनफल का दायां पद

(2) प्रथम एवं द्वितीय स्तंभों से

$$\begin{array}{r} 2x + y \\ \times\ 3x - 2y \end{array}$$

तिर्यक गुणा कर जोड़िए

$[2x \times (-2y)] + 3x \times y$

$= -4xy + 3xy$

$= -xy$ गुणनफल का मध्य पद

(3) द्वितीय स्तंभ से

$$\begin{array}{r} 2x \\ \times\ 3x \\ \hline 6x^2 \end{array}$$

ऊर्ध्व गुणा ↑

गुणनफल का बायाँ पद

उदाहरण 9. $2x^2 - 3x + 4$ का $x^2 + 2x + 1$ से गुणा कीजिए।

हल : सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक द्वारा

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3x + 4 \\ \times\ \ x^2 + 2x + 1 \\ \hline 2x^4 + x^3 + ox^2 + 5x + 4 \\ \hline 2x^4 + x^3 + 5x + 4 \end{array}$$

हल दायें से बायें-

(1) प्रथम स्तंभ से

$$\begin{array}{r} +4 \\ \times +1 \\ \hline +4 \end{array}$$

ऊर्ध्व गुणा ↑

गुणनफल का दायाँ पद

(2) प्रथम एवं द्वितीय स्तंभों से

$$-3x + 4$$
$$\times \quad +2x + 1$$

तिर्यक गुणा कर जोड़िए

$(-3x \times 1) + (2x \times 4)$

$= -3x + 8x$

$= 5x$ गुणनफल का दायाँ मध्य पद

(3) प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय स्तंभों से

$$2x^2 - 3x + 4$$
$$x^2 + 2x + 1$$

संकेत के अनुसार बाहर-बाहर का तिर्यक तथा मध्य का ऊर्ध्व गुणा तथा प्राप्त गुणनफलों का योग

$(2x^2 \times 1) + (x^2 \times 4) + (-3x \times 2x)$

$= 2x^2 + 4x^2 - 6x^2$

$= 0$

(4) द्वितीय एवं तृतीय स्तंभों से

$$2x^2 - 3x$$
$$x^2 + 2x$$

तिर्यक गुणा कर जोड़िए

$(2x^2 \times 2x) + (-3x \times x^2)$

$= 4x^3 - 3x^3$

$= x^3$ गुणनफल का बायां मध्य पद

(5) तृतीय स्तंभ से

$$2x^2$$
$$\times x^2$$
$$2x^4$$

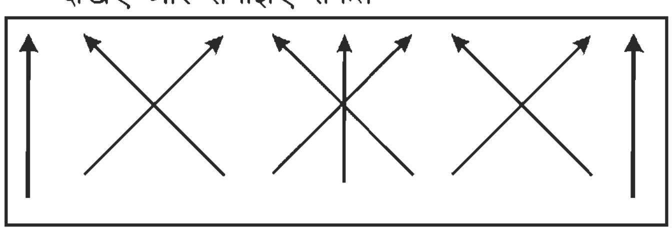
गुणनफल का बायाँ पद

उदाहरण 10. $3x^2 + 2x + 4$ एवं $2x^2 + 3$ का गुणा कीजिए?

हल :

$$3x^2 + 2x + 4$$
$$\times 2x^2 + 0x + 3$$
$$6x^4 + 4x^3 + 17x^2 + 6x + 12$$

देखिए और समझिए संकेत



प्रश्नावली 7.2

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यक के प्रयोग से प्रश्नों को हल कर उत्तर की जाँच कीजिए।

1. $\begin{array}{r} x + 2 \\ \times \quad x + 3 \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 2x - 2 \\ \times \quad x + 3 \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} x + y \\ \times \quad x + 2y \\ \hline \end{array}$

(4) $\begin{array}{r} 2x - 2y \\ \times \quad 3x + y \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{r} x^2 + 2x + 3 \\ \times\ 2x^2 + 3x + 1 \\ \hline \end{array}$

(6) $\begin{array}{r} x^2 + x + 4 \\ \times \quad x^2 + 3 \\ \hline \end{array}$

III. सर्वसमिका $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^3$ का प्रसार

$(a + b)^3 = (a + b)\ (a + b)\ (a + b)$

$= (a + b)\ (a + b)^2$

$= (a + b)\ (a^2 + 2ab + b^2)$ $[(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$

$= a\ (a^2 + 2ab + b^2) + b\ (a^2 + 2ab + b^2)$ (वितरण नियम से)

$= a \times a^2 + a \times 2ab + a \times b^2 + b \times a^2 + b \times 2ab + b \times b^2$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

$= a^3 + b^3 + 3ab\ (a + b)$

(सजातीय पदों को जोड़ने तथा a के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर)

अत: $\boxed{(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\ (a + b)}$

निगमन उक्त सर्वसमिका से हम प्राप्त करते हैं कि

$(a + b)^3 - 3ab\ (a + b)$

$= a^3 + b^3 + 3ab\ (a + b) - 3ab\ (a + b)$

$= a^3 + b^3$

अत: हम नीचे लिखी सर्वसमिका प्राप्त करते हैं

$$\boxed{\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab\,(a + b)}}$$

IV सर्वसमिका $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a - b)^3$ का प्रसार

$(a - b)^3 = (a - b)\,(a - b)\,(a - b)$

$= (a - b)\,(a - b)^2$

$= (a - b)\,(a^2 - 2ab + b^2)$ $\quad [(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$

$= a\,(a^2 - 2ab + b^2) - b\,(a^2 - 2ab + b^2)$ (वितरण नियम से)

$= a \times a^2 - a \times 2ab + a \times b^2 - b \times a^2 + b \times 2ab - b \times b^2$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(सजातीय पदों को जोड़ने तथा a के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर)

$= a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$

अत: $\boxed{(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)}$

निगमन : सर्वसमिका से हम प्राप्त करते हैं कि

$(a - b)^3 = [a + (-b)]^3$

$= a^3 + (-b)^3 + 3a\,(-b)\,[a + (-b)]$ [b के स्थान पर (–b) प्रतिस्थापित करने पर]

$= a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b)$

$$\boxed{\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}}$$

या

$$\boxed{\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3ab\,(a + b) + b^3}}$$

(i) गुणनफल द्वारा उपरोक्त सर्वसमिका को प्राप्त करना

$(a + b)$ $\times (a + b)$ $a^2 + ab + ba + b^2$ $= a^2 + 2ab + b^2$ पुनः $(a^2 + 2ab + b^2)$ $\times (a + b)$ $a^3 + 2a^2b + ab^2$ $a^2b + 2ab^2 + b^3$ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a + b)(a + b)(a + b)$ $= (a + b)(a + b)^2$ $= (a + b)[a^2 + 2ab + b^2]$ $= a(a^2 + 2ab + b^2)$ $+ b(a^2 + 2ab + b^2)$ $= a^3 + 2a^2b + ab^2$ $+ ba^2 + 2ab^2 + b^3$ $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ या $= a^3 + 3ab(a + b) + b^3$

सर्वसमिका $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ का ज्यामितीय सत्यापन

भुजा a का एक घनाकार गुटका लीजिए। (जिसे $a \times a \times a$ का घन कहा जाएगा) भुजा b का एक दूसरा घनाकार गुटका लीजिए (जिसे $b \times b \times b$ का घन कहा जाएगा) a लम्बाई की भुजा, a चौड़ाई की भुजा तथा b ऊँचाई की भुजा वाले (जिन्हें $a \times a \times b$ का घनाभ) कहा जाएगा, के तीन गुटके घनाभ आकार के लीजिए।

b लम्बाई की भुजा, b चौड़ाई की भुजा तथा a ऊँचाई की भुजा वाले तीन गुटके घनाभ आकार के लीजिए। (जिन्हें $a \times b \times b$ का घनाभ कहा जाएगा)

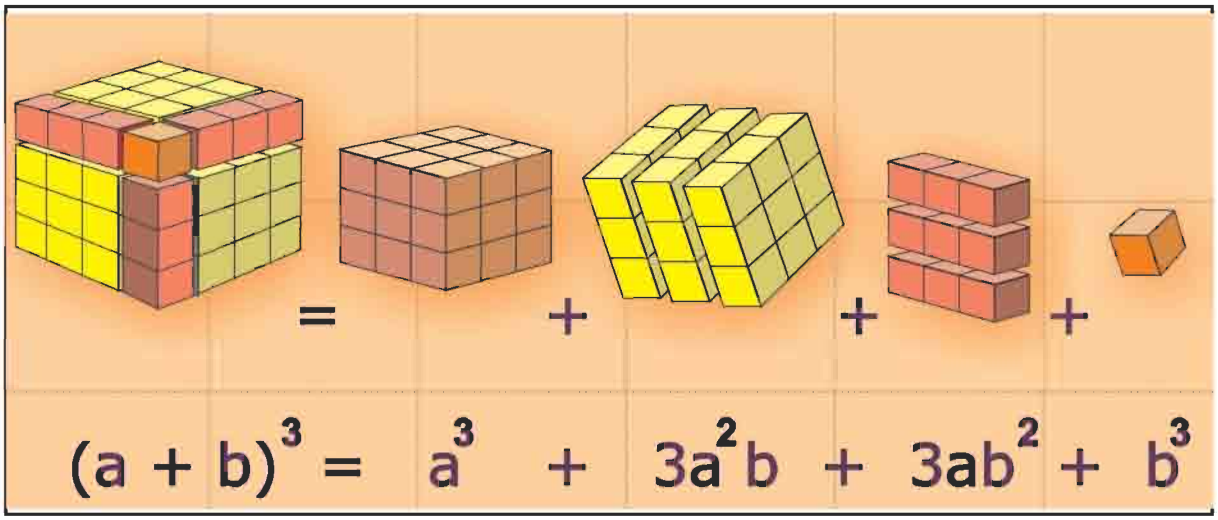
अब इनमें से $a \times a \times a$ का घन, $a \times a \times b$ के तीन में दो घनाभ, $a \times b \times b$ के तीन में से एक घनाभ के गुटकों को चित्र में दर्शाये अनुसार इस प्रकार खड़ा कीजिए (जमाइए) कि इनके आधार चित्र में दर्शाये अनुसार हो तथा जिनकी ऊँचाई a हो। स्पष्टया चारों गुटकों के आधारों से भुजा (a+b) वाला एक वर्ग बन जाएगा। ये चारों गुटके हमारे द्वारा बनाए जाने वाले ठोस का निचला भाग बनाते हैं। ध्यान से देखने पर यह भाग भुजाओं a + b, a + b तथा a का एक घनाभ बना है।

अब शेष चार गुटके ($a \times a \times b$ का एक घनाभ, $a \times b \times b$ के दो घनाभ तथा $b \times b \times b$ का एक घन) लेकर उन्हें भी इस प्रकार खड़ा कीजिए (जमाइए) कि उनके आधार भी चित्र में दर्शाए अनुसार हो और प्रत्येक गुटके की ऊँचाई b होवे जैसा चित्र में दिखलाया गया है। इन गुटकों को निचले भाग के ऊपर इस प्रकार रखिए कि बीच में कोई खाली स्थान न रहने पाये। यह हमारे द्वारा बनाए जाने वाले ठोस का ऊपरी भाग होगा। ध्यान दीजिए कि यह भाग भुजाओं a + b, a + b तथा b वाला एक घनाभ है। स्पष्ट

है, इसका आधार निचले भाग की ऊपरी सतह को ठीक पूरा-पूरा ढक लेगा। चूंकि निचले भाग के घनाभ की ऊँचाई **a** है और ऊपरी भाग के घनाभ की ऊँचाई **b** है, अत: इस प्रकार बने ठोस की सम्पूर्ण ऊँचाई **(a+b)** है, जैसा चित्र में दर्शाया गया है। इस प्रकार हम जो आठ गुटके लेकर चले थे उनसे भुजा **a+b** वाला एक घन बन गया।

इस तरह **a + b** भुजा वाले ठोस घन का आयतन लिए गए आठ गुटकों के आयतन के योग के तुल्य है।

अत: $$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



नोट : a^3 का घन, b^3 का घन, a^2b के 3 घनाभ, ab^2 के तीन घनाभ बनाकर इस प्रकार रखें कि $(a + b)$ का घन प्राप्त हो।

सर्वसमिका (iv)

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

या

$$(a - b)^3 = a^3 - 3ab\,(a - b) - b^3$$

(i) गुणनफल द्वारा सर्वसमिका को प्राप्त करना

$(a-b)$ $\times (a-b)$ $a^2 - ab - ab + b^2$ $= a^2 - 2ab + b^2$ पुन: $(a^2 - 2ab + b^2)$ $\times (a-b)$ $a^3 - 2a^2b + ab^2$ $- a^2b + 2ab^2 - b^3$ $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$ $= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2)$ $= a(a^2 - 2ab + b^2)$ $- b(a^2 - 2ab + b^2)$ $= a^3 - 2a^2b + ab^2$ $- a^2b + 2ab^2 - b^3$ $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

सर्वसमिका III के अनुसार

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

b के स्थान पर –b प्रतिस्थापित करने पर

$(a-b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$

अत: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

यही सर्वसमिका IV है।

उदाहरण 11. निम्नलिखित घनों को प्रसारित रूप में लिखिए

(i) $(3x + 4y)^3$ (ii) $(3p - 2q)^3$

(i) $(3x + 4y)^3$ की तुलना $(a + b)^3$ से करने पर,

$a = 3x$ तथा $b = 4y$

अत: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ में $a = 3x$ तथा $b = 4y$ रखने पर

$(3x + 4y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(4y) + 3(3x)(4y)^2 + (4y)^3$

$= 27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64y^3$

(ii) $(3p - 2q)^3$ की तुलना $(a + b)^3$ से करने पर,

$a = 3p$ तथा $b = -2q$

अत: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ में $a = 3p$ तथा $b = -2q$ रखने पर

$(3p - 2q)^3 = (3p)^3 + 3(3p)^2(-2q) + 3(3p)(-2q)^2 + (-2q)^3$

$= 27p^3 - 54p^2q + 36pq^2 - 8q^3$

उदाहरण 12. $x^3 + 8y^3$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि $x + 2y = 8$ और $xy = 6$ है।

हल :

$(x + 2y)^3 = x^3 + (2y)^3 + 3(x)(2y)(x + 2y)$

$(x + 2y)^3 = x^3 + 8y^3 + 6xy(x + 2y)$

$(8)^3 = x^3 + 8y^3 + 6 \times 6 \times 8$

$512 = x^3 + 8y^3 + 288$

$512 - 288 = x^3 + 8y^3$

$x^3 + 8y^3 = 224$

उदाहरण 13. सर्वसमिका का प्रयोग कर 998^3 का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$998^3 = (1000 - 2)^3$

$= (1000)^3 - (2)^3 - 3(1000)(2)(1000 - 2)$

$= 1000000000 - 8 - 6(1000) \times 998$

$= 1000000000 - 5988000 - 8$

$= 994011992$

उदाहरण 14. $(x + 4y)^3 - (x - 4y)^3$ को सरल कीजिए

हल :

$(x + 4y)^3$ की तुलना $(a + b)^3$ से करने पर

$a = x, b = 4y$

अत: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ में $a = x$ तथा $b = 4y$ रखने पर

$(x + 4y)^3 = x^3 + (4y)^3 + 3(x)(4y)(x + 4y)$

$= x^3 + 64y^3 + 12xy(x + 4y)$

$= x^3 + 64y^3 + 12x^2y + 48xy^2$

$= x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3$

(x के घातांकों को घटते क्रम में रखने पर)

अब $(x - 4y)^3$ की तुलना $(a - b)^3$ से करने पर

$a = x, b = 4y$

अत: $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$ में $a = x$ तथा $b = 4y$ रखने पर

$(x - 4y)^3 = x^3 - (4y)^3 - 3(x)(4y)(x - 4y)$

$= x^3 - 64y^3 - 12xy(x - 4y)$

$= x^3 - 64y^3 - 12x^2y + 48xy^2$

$= x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3$

(x के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर)

ऊपर ज्ञात किए गए $(x + 4y)^3$ और $(x - 4y)^3$ के मानों का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है:

$(x + 4y)^3 - (x - 4y)^3 = (x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3) - (x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3)$

$= x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3 - x^3 + 12x^2y - 48xy^2 + 64y^3$

$= 24x^2y + 128y^3$

प्रश्नावली 7.3

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

   (i) $(a + b)^3 = a^3 + ...a^2b + 3a ... + b^3$

   (ii) $(a - b)^3 = a^3 \ldots 3a^2b \ldots 3ab^2 \ldots\ldots$

2. निम्नलिखित में से असत्य कथन छाँटिए

   "$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$" तो इस प्रसार में

   (i) a की घात कम हो रही है।

   (ii) b की घात बढ़ रही है।

   (iii) कुल 4 पद है।

   (iv) उपरोक्त सभी कथन असत्य है।

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार कीजिए

   (i) $(x + 2y)^3$ (ii) $(x - 2y)^3$

   (iii) $(x + y)^3$ (iv) $(x - y)^3$

   (v) $(3x + 2y)^3$ (vi) $(ax - by)^3$

   (vii) $\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)^3$ (viii) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right)^3$

4. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर निम्नलिखित घनों के मान निकालिए

   (i) $(104)^3$ (ii) $(203)^3$ (iii) $(48)^3$

   (iv) $(97)^3$ (v) 1001^3 (vi) 999^3

   (vii) 601^3

5. $8x^3 + 27y^3$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि

   (i) $2x + 3y = 8$ और $xy = 2$

   (ii) $2x + 3y = \frac{21}{2}$ और $xy = \frac{5}{6}$

6. $p^3 - 8y^3$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि

(i) $p - 2y = 2$ और $py = 8$

(ii) $p - 2y = 1$ और $py = 10$

7. सरल कीजिए

(i) $(a + 2b)^3 + (a - 2b)^3$ (ii) $(a - 3b)^3 + (a + 3b)^3$

(iii) $(2a + 5b)^3 - (2a - 5b)^3$ (iv) $(2x + 5)^3 - (2x - 5)^3$

7.4 बीजीय व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात करना :

जब कोई बीजीय व्यंजक कुछ संख्याओं और बीजीय चरों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है, उदाहरणार्थ

$15p^2q$

$= 3 \times 5 \times p \times p \times q$

तो इन संख्याओं और बीजीय चरों में से प्रत्येक को (3, 5, p, q) दिए गए व्यंजक का गुणनखण्ड कहते हैं।

कक्षा VII में हमने गुणनखण्ड ज्ञात करने की मुख्य तीन निम्न विधियाँ सीखीं थीं :

- कोई सार्व गुणनखण्ड अलग कर गुणनखण्ड ज्ञात करना (जैसे $ab + bc = (a + c).b$)
- पदों के पुर्नसमूहन द्वारा गुणनखण्ड ज्ञात करना

(जैसे $2ab + 2a + 5b + 5 \Rightarrow (2ab + 2a) + (5b + 5)$

$\Rightarrow 2a(b + 1) + 5(b + 1)$

$\Rightarrow (2a + 5)(b + 1)$

- सर्वसमिकाओं $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

तथा $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

का उपयोग कर गुणनखण्ड ज्ञात करना।

हम निम्न सर्वसमिकाओं के उपयोग से गुणनखण्ड ज्ञात करना सीखेंगे।

(1) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + a \times b$

(2) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

(3) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(4) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

उपरोक्त सर्वसमिकाओं का उपयोग कर गुणनखण्ड ज्ञात करने हेतु निम्न उदाहरण देखिये

$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ का गुणनफल ज्ञात करना :

हम $a^3 + b^3$ को दो व्यंजकों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। ऐसा करने के लिए हम $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ का गुणनफल ज्ञात करते हैं।

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$

$= a \times a^2 + a \times (-ab) + a \times (b)^2 + b \times (a)^2 + b \times (-ab) + b \times b^2$

$= a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - b^2a + b^3$

$= a^3 - a^2b + a^2b + ab^2 - ab^2 + b^3$ (समान पदों के योग से)

$= a^3 + b^3$

अत: $\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$

$(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ का गुणनफल ज्ञात करना :

$a^3 + b^3$ की भाँति हम $a^3 - b^3$ को भी दो व्यंजकों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। ऐसा करने के लिए $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ का गुणनफल ज्ञात करेंगे।

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2)$

$= a \times a^2 + a \times ab + a \times b^2 - b \times a^2 - b \times ab - b \times b^2$

$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$

$= a^3 + a^2b - a^2b + ab^2 - ab^2 - b^3$

(समान पदों के योग से)

$= a^3 - b^3$

अत: $\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$

नोट: सर्वसमिका $a^3 - b^3$ को सीधा सर्वसमिका $a^3 + b^3$ से भी निम्न प्रकार से प्राप्त कर सकते हैं :

$a^3 - b^3 = a^3 + (-b)^3$

अत: $a^3 - b^3 = [a + (-b)]\ [a^2 - a \times (-b) + (-b)^2]$

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

उदाहरण 15. $x^2 + 5x + 6$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $x^2 + (a + b)x + ab$ से $x^2 + 5x + 6$ की तुलना करने पर

$a + b = 5$, और $a \times b = 6$

6 के संभावित गुणनखण्ड हैं 1, 6 तथा 2, 3 इनमें ऐसे गुणनखण्ड लेते हैं जिनका योग 5 हो।

स्पष्ट है 6 के ऐसे दो गुणनखण्ड, जिनका योग 5 हो, 2 और 3 है।

अतः $x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \times 2$

$= (x + 3)\ (x + 2)$

टिप्पणी : क्योंकि $a \times b$ धनात्मक है जो केवल तब ही संभव है जब a तथा b दोनों समान चिह्न के हों, अर्थात दोनों धनात्मक या दोनों ऋणात्मक हों। चूंकि $a + b$ धनात्मक है और $a \times b$ भी धनात्मक है अतः a और b भी धनात्मक होंगे।

उदाहरण 16. $z^2 - 9z + 8$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $z^2 - 9z + 8$ की तुलना $x^2 + (a + b)x + ab$ से करने पर $a + b = -9$ व $ab = 8$

अब $8 = 1 \times 8$ या $8 = 2 \times 4$ अतः 8 के दो गुणनखण्ड इस तरह लेवें जिनका योग –9 होवे जो कि स्पष्ट है –1 और –8 होंगे।

अतः $z^2 - 9z + 8 = z^2 + (-1 -8)\ z + 8$

$= (z - 1)\ (z - 8)$

(**टिप्पणी** : क्योंकि $a \times b$ धनात्मक है तथा $a + b =$ ऋणात्मक हैं। अतः a तथा b दोनों ऋणात्मक होना चाहिए।)

अतः a और b के मान –1 व –8 लेने से अभीष्ट गुणनखण्ड प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 17. $x^6 - y^6$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल :

प्रथम विधि : $x^6 - y^6$

$= (x^3)^2 - (y^3)^2\ \ [(x^m)^n = x^{mn}]$

$= (x^3 + y^3)\ (x^3 - y^3)\ \ [a^2 - b^2 = (a - b)\ (a + b)]$

($x^3 + y^3$ तथा $x^3 - y^3$ के गुणनखण्ड करने में, हम प्राप्त करते हैं)

$= (x + y)\ (x^2 - xy + y^2) \qquad (x - y)\ (x^2 + xy + y^2)$

दूसरी विधि : $x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3$

$= (x^2 - y^2)\ [(x^2)^2 + x^2y^2 + (y^2)^2]$

$[a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + ab + b^2)]$ में $a = x^2$ व $b = y^2$ प्रतिस्थापित करने पर)

$= (x + y)\ (x - y)\ (x^4 + x^2y^2 + y^4)$

$= (x + y)\ (x - y)\ (x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2)$

$= (x + y)\ (x - y)\ [(x^2 + y^2)^2 - (xy)^2]$

$= (x + y)\ (x - y)\ (x^2 + y^2 + xy)\ (x^2 + y^2 - xy)$

उदाहरण 18. व्यंजक $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : व्यंजक $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ में

पहले दो पद 2x और 3y के घन हैं। साथ ही शेष दो पदों का एक उभयनिष्ट गुणनखण्ड 3 है। अत: निम्न सर्वसमिका का उपयोग करने पर दिया गया व्यंजक

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

$= 8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$

$= (2x + 3y)^3$

प्रश्नावली 7.4

1. निम्नलिखित में से $x^2 + 2kx - 3k^2$ के गुणनखण्ड हैं

   (i) $(x - 3k)(x + k)$ (ii) $(x + 3k)(x - k)$

   (iii) $(x + 3k)(x + k)$ (iv) $(x - 3k)(x - k)$

2. $x^2 - 7x + 12$ के गुणनखण्ड हैं

   (i) $(x + 3)(x + 4)$ (ii) $(x - 3)(x + 4)$

   (iii) $(x + 3)(x - 4)$ (iv) $(x - 3)(x - 4)$

3. निम्नलिखित के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए

   (i) $x^2 + 9x + 20$ (ii) $x^2 - 6x + 8$

   (iii) $z^2 + z - 12$ (iv) $p^2 + 5pq - 36q^2$

   (v) $m^2 - 2m - 15$ (vi) $m^2 + 11mn + 18n^2$

4. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए

   (i) $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz$

   (ii) $4p^2 + 9q^2 + 4r^2 + 12pq + 12qr + 8pr$

   (iii) $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 6yz - 12zx$

   (iv) $p^2 + pq + \frac{q^2}{4} + 1 + 2p + q$

5. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए

   (i) $27x^3 - 8y^3 - 54x^2y + 36xy^2$

   (ii) $x^3 + 64y^3 + 12x^2y + 48xy^2$

6. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए

(i) $p^3 + 27$ (ii) $y^3 + 125$

(iii) $1 - 27z^3$ (iv) $8x^3y^3 + 27z^3$

7. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए

(i) $10xy^4 - 10x^4y$ (ii) $32p^3 + 108q^3$

(iii) $p^6 - 64q^6$

7.5 त्रिपदी के गुणनखण्ड ज्ञात करने की वैकल्पिक विधि

सूत्र आद्यम-आद्येन, अन्त्यम् अन्त्येन

अर्थात आदि को आदि से और अन्त को अन्त से। त्रिपदी बहुपद का एक गुणनखण्ड दिया है तब दूसरा गुणनखण्ड इस सूत्र से सरलतापूर्वक ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 19. $x^2 + 5x + 6$ का एक गुणनखण्ड $(x + 2)$ हो तो दूसरा गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र आद्यम-आद्येन, अन्त्यम् अन्त्येन। प्रथम को प्रथम से तथा अन्तिम को अन्तिम से भाग देने पर दूसरा गुणनखण्ड ज्ञात होता है।

$\frac{x^2}{x} = x$ तथा $\frac{+6}{+2} = +3$

अतः दूसरा गुणनफल $x + 3$ होगा।

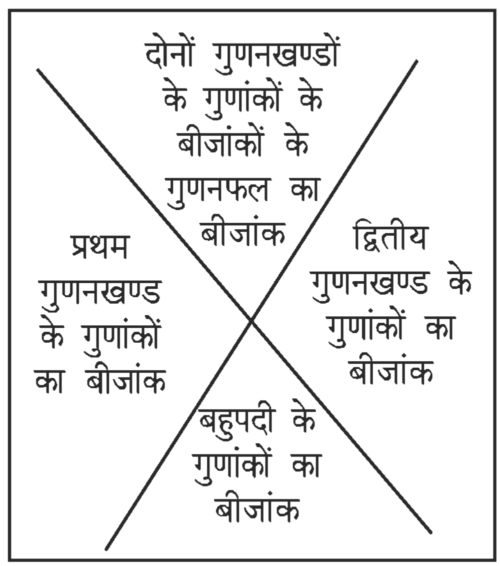
जाँच : **गुणित समुच्चयः समुच्चयः गणितः का प्रयोग करते हैं।**

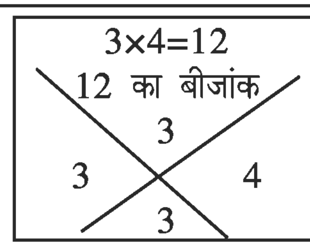
$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)\ (x + 3)$

त्रिपदी के गुणांकों का बीजांक

गुणनखण्डों के गुणांकों के बीजांकों के गुणनफल का बीजांक।

3 = 3 आया है अतः उत्तर सही है।





उदाहरण 20. $x^2 - 5x - 6$ का एक गुणनखण्ड $(x + 1)$ है तो दूसरा गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र आद्यम-आद्येन, अन्त्यम् अन्त्येन प्रथम को प्रथम तथा अंतिम को अंतिम से भाग देने पर दूसरा गुणनखण्ड ज्ञात होता है।

$x^2 - 5x - 6$ में सूत्रानुसार

$$\frac{x^2}{x} = x \text{ एवं } \frac{-6}{+1} = -6$$

अत: दूसरा गुणनखण्ड $(x - 6)$

प्रश्नावली 7.5

सूत्र आद्यम-आद्येन, अन्त्यम् अन्त्येन के प्रयोग से हल कीजिए

1. $x^2 - 5x + 6$ का एक गुणनखण्ड $(x - 2)$ है तब दूसरा गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।
2. $x^2 + 5x - 6$ का एक गुणनखण्ड $(x + 6)$ है तब दूसरा गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए (सूत्र द्वारा)

3. $x^2 + 7x + 12$ के जबकि उसका एक गुणनखण्ड $x + 3$ है।
4. $x^2 - 2x - 3$ के जबकि उसका एक गुणनखण्ड $x + 1$ है।
5. $2x^2 + 11x + 15$ के जबकि उसका एक गुणनखण्ड $x + 3$ है।
6. $6x^2 - 5x - 21$ के जबकि उसका एक गुणनखण्ड $2x + 3$ है।