पाठ 8
बहुपदों का विभाजन

आइए सीखें

- एक चरीय बहुपद के घात की अवधारणा को समझ कर उसकी घात बताना।
- एक चरीय बहुपद को एक पदीय एवं द्विपदीय बीजीय व्यंजक से विभाजन करना (जबकि बहुपद एक चरीय और चार घात से अधिक न हो)
- अवधारणा : "भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल" का सत्यापन करना।
- भाजक को भाज्य के गुणनखण्ड के रूप में समझ कर बताना।

8.1 बहुपद

हम जानते हैं कि किसी बीजीय व्यंजक में कई अक्षर संख्याएँ (x, y, z, p, q, r, m, n आदि) हो सकती हैं जिन्हें चर (variable) कहा जाता है। **किसी व्यंजक में चर के घातांक केवल धनात्मक (बिना ऋण वाले) पूर्णांक हों तो उसे बहुपद कहते हैं।**

निम्न व्यंजकों में बहुपद की पहचान दी गई है

स.क्र.	व्यंजक	चर/चरों के घातांक	निष्कर्ष
1.	$4x^2 + 3x^{3/2}$	$\frac{3}{2}$ पूर्णांक नहीं है,	बहुपद नहीं है।
2.	$2x^{-2} + 3x + 7$	ऋणात्मक है	बहुपद नहीं है
3.	$x^3 + 2x^2 + 5x$	धनात्मक पूर्णांक है।	बहुपद है।
4.	$x^2y + yx^2$	धनात्मक पूर्णांक है।	दो चरों वाला बहुपद है।

अत: $p(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + ... + a_n$

एक चर वाला बहुपद कहलाता है जहाँ a_o, a_1, a_2, a_3 .... a_n वास्तविक संख्याएँ व चर के घातांक धनात्मक पूर्णांक हैं।

बहुपद को सामान्यत: चर के घटते हुए घातांकों के क्रम में लिखते हैं, जिसे बहुपद का **मानक रूप** कहते हैं। **जिस बहुपद में एक चर हो उसे एक चरीय बहुपद व जिसमें दो चर (जैसे $3xy^2$) हों, उसे दो चरीय बहुपद कहते हैं।**

यहाँ बहुपद शब्द से हमारा अभिप्राय एक चरीय बहुपद से होगा। **बहुपद में चर की अधिकतम घातांक को बहुपद की घात** (degree of polynomial) कहते हैं।

स्पष्ट है $x^4 + 3x - 9$ बहुपद की घात 4 है।

यदि किसी बहुपद के चर एक से अधिक हों, तो हम प्रत्येक पद के चरों के घातांकों का योगफल पृथक-पृथक पदवार कर लेते हैं। इस प्रकार प्राप्त घातांकों के योगफलों में से सबसे बड़ा योगफल ही उस बहुपद की घात कहलाती है।

उदाहरण के लिए बहुपद $3x^3 - 3x^3y^2 + 3x^2y^2 + y^3$ में चरों के घातांकों के योगफल इस प्रकार हैं

$3x^3$ में	3
$3x^3y^2$ में	5
$3x^2y^2$ में	4
y^3 में	3

उपर्युक्त में घातांकों का सबसे बड़ा योगफल 5 है। अतः बहुपद की घात 5 है।

केवल एक पद वाले बहुपद को एकपदी (monomial) कहते हैं। केवल दो पदों वाले बहुपद को द्विपद (binomial) तथा केवल तीन पदों वाले बहुपद को त्रिपद (trinomial) कहा जाता है।

8.2 एकपदी का दूसरे एकपदी द्वारा विभाजन

हम एकपदी $10x^3y^2$ का यदि दूसरे एकपदी $5xy$ से भाग देना चाहते हैं तो निम्नलिखित दो विधियों से भागफल ज्ञात कर सकते हैं

प्रथम विधि

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2y \\ \hline 5xy & 10x^3y^2 \\ & -10x^3y^2 \\ \hline & 0 \\ \hline \end{array}$$

स्पष्ट है कि हम भाजक $5xy$ में $2x^2y$ का गुणा करें तो भाज्य $10x^3y^2$ प्राप्त होता है।

दूसरी विधि :

$$\frac{10x^3y^2}{5xy} = \frac{5x \times 2x^2 \times y \times y}{5xy}$$

$$= 2x^2y$$

(स्पष्ट है कि $10x^3y^2$ के गुणनखण्डों को हर के पद $5xy$ से भाग देने पर $2x^2y$ प्राप्त होता है)

8.3 एक बहुपद का एक एकपदी द्वारा विभाजन

यदि हम एक बहुपद $4x^2 + 6x^3 - 28x$ का विभाजन एक एकपदी $2x$ के द्वारा करना चाहते हैं तो इस विभाजन को निम्नलिखित प्रकार से करेंगे

प्रथम विधि : हम $4x^2 + 6x^3 - 28x$ को मानक रूप में लिखकर विभाजन करेंगे।

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 + 2x - 14 \\ \hline 2x & 6x^3 + 4x^2 - 28x \\ & -6x^3 \\ \hline & 0 + 4x^2 - 28x \\ & \pm 4x^2 \\ \hline & -28x \\ & \mp 28x \\ \hline & 0 \end{array}$$

दूसरी विधि :

प्रत्येक पद में 2 का भाग देने पर

$$\frac{4x^2 + 6x^3 - 28x}{2x}$$

$$= \frac{4x^2}{2x} + \frac{6x^3}{2x} - \frac{28x}{2x}$$

$$= 2x + 3x^2 - 14$$

$$= 3x^2 + 2x - 14$$

तीसरी विधि :

$$\frac{4x^2 + 6x^3 - 28x}{2x}$$

$$= \frac{2x(2x + 3x^2 - 14)}{2x}$$

$$= 2x + 3x^2 - 14$$

$$= 3x^2 + 2x - 14$$

उदाहरण 1. $\dfrac{\sqrt{7}\,x^2 + \dfrac{2}{\sqrt{2}}x + 8}{14}$ को हल कीजिए।

हल :

$$\frac{\sqrt{7}\,x^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x + 8}{14}$$

$$= \frac{\sqrt{7}x^2}{14} + \frac{2}{\sqrt{2}}.\frac{x}{14} + \frac{8}{14}$$

$$= \frac{\sqrt{7}\,x^2}{7\times 2} + \frac{2}{\sqrt{2}}.\frac{x}{14} + \frac{8}{14}$$

$$= \frac{1.x^2}{2.\sqrt{7}} + \frac{1.x}{7.\sqrt{2}} + \frac{4}{7}$$

उदाहरण 2. $\frac{25x^2 + 10x + 5}{\sqrt{5}}$ को हल कीजिए।

हल :

$$\frac{25x^2 + 10x + 5}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{25x^2}{\sqrt{5}} + \frac{10x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5\times 5x^2}{\sqrt{5}} + \frac{5\times 2x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}}, \quad (5 = \sqrt{5}\times\sqrt{5})$$

$$= 5\sqrt{5}\,x^2 + 2\sqrt{5}\,x + \sqrt{5}$$

प्रश्नावली 8.1

1. सही उत्तर छांटकर लिखिए

   $6x^2yz$ को $3xy$ से भाग देने पर प्राप्त भागफल होगा

   (a) $6xyz$, (b) $2xyz$, (c) $2xz$, (d) $18x^3y^2z$

2. निम्नलिखित में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए

   (a) $15m^2n \div 5m^2$ = ...

   (b) $\frac{2}{3}x^2 \div x$ = ...

(c) $2x^2 \div 2x =$ ....

(d) $-3x^3 \div x^2 =$ ....

3. $\sqrt{3}\, a^3$ को $2a$ से भाग दीजिए।

4. सरल कीजिए (a) $\dfrac{16m^3y^2}{4m^2y}$ (b) $\dfrac{-30mn^3z}{-6mnz}$

5. $\sqrt{5}\, x^4$ को $5x^3$ से भाग दीजिए।

6. $x + 2x^2 + 3x^3$ को $2x$ से भाग दीजिए।

7. $\sqrt{3}\, q^4 + 2\sqrt{3}\, q^3$ को q से भाग दीजिए।

8. सरल कीजिए $\dfrac{34x^3 - 17x^2 + 51x}{17x}$

9. सरल कीजिए $(-x^4 + x^2) \div \sqrt{2}\, x^2$

10. भाज्य $\dfrac{2}{3}x^2$ का भाजक ज्ञात कीजिए जिससे भागफल x प्राप्त हो जाये।

8.4 एक बहुपद का एक द्विपद द्वारा विभाजन

यदि एक बहुपद $12 - 14x^2 - 13x$ को एक द्विपद $3 + 2x$ से भाग देना हो, तो निम्नलिखित विधियों में से किसी भी विधि का उपयोग कर सकते हैं।

प्रथम विधि

चरण 1. भाज्य $12 - 14x^2 - 13x$ व भाजक $3 + 2x$ को मानक रूप (घटती घातों में) में लिखेंगे:

$$12 - 14x^2 - 13x = -14x^2 - 13x + 12$$

$$3 + 2x = 2x + 3$$

$$2x + 3 \overline{\big) -14x^2 - 13x + 12}$$

चरण 2. भाज्य के प्रथम पद $-14x^2$ में भाजक $2x$ का भाग देने पर प्राप्त $-7x$ को भागफल के स्थान पर रखेंगे।

$$\begin{array}{r} -7x \\ 2x + 3 \overline{\big) -14x^2 - 13x + 12} \end{array}$$

चरण 3. भागफल $-7x$ का भाज्य $2x + 3$ में गुणा कर भाज्य के नीचे लिखकर सजातीय पदों में से घटाएंगे।

$$
\begin{array}{r|l}
 & -7x \\
\cline{2-2}
2x+3 & -14x^2 - 13x + 12 \\
 & -14x^2 - 21x \\
 & + \quad\quad + \\
\cline{2-2}
 & \quad 0 \quad + 8x + 12
\end{array}
$$

चरण 4. शेषफल $8x + 12$ के प्रथम पद को भाज्य $2x + 3$ के प्रथम पद से भाग देंगे

$$
\begin{array}{r|l}
 & -7x + 4 \\
\cline{2-2}
2x+3 & -14x^2 - 13x + 12 \\
 & -14x^2 - 21x \\
 & + \quad\quad + \\
\cline{2-2}
 & \quad\quad\quad + 8x + 12 \\
 & \quad\quad\quad + 8x + 12 \\
 & \quad\quad\quad - \quad\; - \\
\cline{2-2}
 & \quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

इस प्रकार, पूरा भागफल $-7x + 4$ और शेष शून्य है। अत: हम कह सकते हैं कि

$-14x^2 - 13x + 12 = (2x + 3) \times (-7x + 4) + 0$

भाज्य = (भाजक × भागफल) + शेषफल

स्पष्ट है कि भागफल व भाजक दोनों, शेषफल शून्य होने के कारण, भाज्य के गुणनखण्ड हैं।

अर्थात् $-14x^2 - 13x + 12$ के गुणनखण्ड $(2x + 3)$ व $(-7x + 4)$ हैं।

ध्यान दीजिए कि संख्याओं वाले भाग के प्रश्नों में हम भाग तब तक करते चले जाते हैं जब तक कि शेषफल भाजक से कम न हो जाए। बहुपदों की स्थिति में हम भाग तब तक करते जाते हैं **जब तक कि हम ऐसा शेषफल प्राप्त न कर लें जिसकी घात भाजक की घात से कम हो।**

निम्न उदाहरण से यह स्पष्ट हो जायेगा।

उदाहरण 3. $9x^3 + 3x^2 + 7 - 5x$ को $3x - 1$ से भाग दीजिए।

भाग की प्रक्रिया को हम निम्नलिखित चरणों में हल करते हैं

1. भाज्य तथा भाजक की घातों को अवरोही क्रम में लिखते हैं।
2. भाज्य के प्रथम पद $9x^3$ को भाजक के प्रथम पद $3x$ से भाग देकर भागफल $3x^2$ प्राप्त करते हैं।

3. उपरोक्त भागफल $(3x^2)$ को भाजक $(3x-1)$ से गुणा कर गुणनफल $9x^3 - 3x^2$ को भाज्य के सजातीय पदों में से घटाते हैं। शेषफल $6x^2 - 5x + 7$ प्राप्त होता है।

4. शेषफल के प्रथम पद $6x^2$ में भाजक के प्रथम पद $3x$ का भाग देते हैं। भागफल $2x$ का भाजक $(3x - 1)$ में गुणा कर शेषफल में से घटाते हैं।

5. शेषफल $-3x+7$ के प्रथम पद में भाजक $3x-1$ के प्रथम पद का भाग देने से प्राप्त भागफल -1 का गुणा भाजक $3x - 1$ में करके पूर्व शेषफल में से घटाने पर 6 शेष बचता है। यहाँ 6 शून्य घात का बहुपद है, जो कि भाजक की 1 घात से कम घात वाला है। अत: अंतिम शेषफल 6 है।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 + 2x - 1 \\
3x - 1 & 9x^3 + 3x^2 - 5x + 7 \\
 & 9x^3 - 3x^2 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & 0 \quad 6x^2 - 5x + 7 \\
 & \quad 6x^2 - 2x \\
 & \quad - \quad + \\
\hline
 & \quad 0 \quad -3x + 7 \\
 & \quad\quad -3x + 1 \\
 & \quad\quad + \quad - \\
\hline
 & \quad\quad\quad + 6
\end{array}
$$

संख्याओं के विभाजन में हम जानते हैं कि

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

भागफल
भाजक) भाज्य (
......
शेषफल

इसे शेषफल प्रमेय भी कहते हैं। यह बहुपदों के विभाजन में भी सत्य है। हम अपने उत्तर की जाँच इस प्रमेय द्वारा कर सकते हैं।

हमने $9x^3 + 3x^2 - 5x + 7$ को $(3x - 1)$ से भाग देकर शेषफल 6 प्राप्त किया। अब हम इसकी जाँच करेंगे।

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

दायीं ओर मान रखने पर

$$(3x - 1) \times (3x^2 + 2x - 1) + 6$$
$$= 3x(3x^2 + 2x - 1) - 1(3x^2 + 2x - 1) + 6$$
$$= 9x^3 + 6x^2 - 3x - 3x^2 - 2x + 1 + 6$$
$$= 9x^3 + 3x^2 - 5x + 7$$

= भाज्य

अत: **उत्तर** सही है।

उदाहरण 4. $2 + 7x + 7x^2 + 2x^3$ को $1 + 2x$ से भाग दीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 3x + 2 \\ \hline 2x + 1 & 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 \\ & 2x^3 + x^2 \\ & - \quad - \\ \hline & \quad 6x^2 + 7x + 2 \\ & \quad 6x^2 + 3x \\ & \quad - \quad\; - \\ \hline & \qquad 4x + 2 \\ & \qquad 4x + 2 \\ & \qquad - \quad - \\ \hline & \qquad 0 \end{array}$$

प्रश्नावली 8.2

1. निम्नलिखित में से कौनसा व्यंजक बहुपद नहीं है।

   (i) $\sqrt{2}x^2 + 7x + \sqrt{8}$ (ii) $x^2 + \sqrt{7}\,x + \sqrt{8}$

   (iii) $x^2 + 7\sqrt{x} + 8$ (iv) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{7}x$

2. निम्नलिखित प्रत्येक बहुपद को उसके मानक रूप (घटती घातों) में लिखिए, प्रत्येक की घात भी लिखिए :

   (i) $y^2 + 6y + 9 + 4y^3$ (ii) $4q^2 - 12q^5 + 25q$

   (iii) $y^2 + y^3 - \frac{5}{7}y^{11}$ (iv) $\left(z+\frac{3}{4}\right)\left(z+\frac{4}{3}\right)$

   (v) $(x^2 + 3)\ (x^2 - 3)$

3. हल कीजिए :

   (i) $(x^2 + 6x + 8) \div (x + 4)$ (ii) $(y^2 - y - 12) \div (y - 4)$

   (iii) $(x^2 + 7x + 10) \div (x + 5)$ (iv) $(y^2 - 5y + 6) \div (y - 2)$

   (v) $(z^2 - 8z + 15) \div (z - 5)$

4. भाग द्वारा सिद्ध कीजिए $(2x + 3)$, $2x^2 + 5x + 3$ का एक गुणनखण्ड है। गुणनखण्ड भी ज्ञात कीजिए।

5. भाग द्वारा सिद्ध कीजिए $(2x + 1)$, $6x^2 + x - 1$ का एक गुणनखण्ड है। दूसरा गुणनखण्ड भी बताइए।

6. पहले बहुपद को दूसरे से भाग दीजिए, भागफल और शेषफल लिखिए:

(i) $3x^2 + 5x + 7$, $x + 2$

(ii) $10m^2 + 7m + 8$, $5m - 3$

(iii) $6p^3 + 5p^2 + 4$, $2p + 1$

(iv) $8q^3 + 6q^2 + 4q - 1$, $4q + 2$

(v) $z^4 + z^3 + z^2$, $z + 1$

7. प्रश्न क्रमांक 6 के सभी प्रश्नों के लिए, भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल का सत्यापन कीजिए।

8. $x^3 + 4x^2 - 3x - 7$ में $(x - 3)$ का भाग दीजिए।

9. बहुपद $5x(x^2 - x + 1) - (9 + 4x^4)$ को $4x - 1$ से भाग दीजिए।

10. बहुपद $3y^4 - y^3 + 12y^2 + 2$ को $3y^2 - 1$ से भाग दीजिए।

11. तीन घात के बहुपद में एक घात वाले बहुपद का भाग देने पर भागफल बहुपद की घात क्या होगी?

12. सरल कीजिए

(a) $\dfrac{16m^2 - 9n^2}{4m - 3n}$ (b) $\dfrac{9x^2 - 24xy + 16y^2}{3x - 4y}$

13. $27x^3 + y^3$ को $(3x + y)$ से भाग दीजिए।

14. संबद्ध शेष को शून्य दिखाकर सत्यापित कीजिए कि दिया गया द्विपद दिए गए बहुपद का एक गुणनखण्ड है :

(a) $3b-1$, $-3b^2+13b-4$, (b) p^2+3, $4p^4+7p^2-15$

भाग की एक अन्य विधि (परावर्त्य)

इस विधि से भाग के प्रश्न हल करने के लिए हम इसमें प्रयुक्त होने वाली शब्दावली तथा उदाहरण के माध्यम से प्रक्रिया को समझेंगे।

उदाहरण 5 : $7x^2 - 5x + 3$ को $x + 1$ से भाग दीजिए।

हल : (1) **भाज्य** $7x^2 - 5x + 3$ है।

(2) **भाजक** $x + 1$ है।

(3) **विचलन** : $x + 1$ में x के गुणांक को छोड़कर बचा $+1$ यह विचलन है।

(4) **संशोधित भाजक** : विचलन का चिह्न बदलकर प्राप्त करते हैं, जैसे यहां विचलन $+1$ है तो संशोधित भाजक $= -1$ होगा।

(5) **विभाजन रेखा:** संशोधित भाजक में जितने पद होते हैं भाज्य के इकाई की ओर से उतने पद छोड़ कर विभाजन रेखा खींची जाती है।

(6) भाज्य में चर के गुणांकों को घात के घटते क्रम में लिखते हैं।

(7) प्रश्न हल करने के लिए निम्नलिखित अनुसार लिखेंगे

भाजक	**भाज्य**	
संशोधित भाजक	भाज्य के गुणांक	चिन्ह सहित
	भागफल	शेषफल

← विभाजन रेखा

(8) भाग देने की प्रक्रिया निम्नलिखित अनुसार है।

$7x^2 - 5x + 3 \div x + 1$

भाजक $x + 1$	$7x^2 - 5x$	$+ 3$
संशोधित भाजक -1	$+7 \; -5$ -7	$+3$ $+12$
	$+7 - 12$	15

1. भाज्य का बायें से प्रथम अंक ही उत्तर का प्रथम अंक है। अत: प्रथम अंक +7 नीचे उत्तर में लिखेंगे।
2. संशोधित भाजक x प्रथम अंक $= (-1) \times 7 = -7$ को दायें हटते हुए अगले अंक -5 के नीचे लिखेंगे।
3. $-5 + (-7) = -12$ यह उत्तर का द्वितीय अंक है।
4. संशोधित भाजक $\times$ उत्तर का द्वितीय अंक $= (-1) \times (-12) = 12$ को अगले अंक $+3$ के नीचे लिखेंगे। शेषफल के खंड में प्रवेश कर लिया है अत: भाग देने की क्रिया समाप्त हुई।
5. $+3 + 12 = 15$ शेषफल।
6. भागफल $+7 - 12$ में -12 को x रहित पद तथा $+7$ में x लगा कर उत्तर लिखेंगे।

   अत: भागफल $7x - 12$

   शेषफल 15

उदाहरण 6. $2x^2 + 11x + 14$ को $2x + 3$ से भाग दीजिए?

हल :

भाजक	भाज्य	
$2x + 3$	$2x^2 + 11x$	$+14$
$x + \frac{3}{2}$	$+2 \; + 11$	$+14$
$-\frac{3}{2}$	$- \; 3$	-12
	$+2 \; + \; 8$	$+ \; 2$

1. भाजक $2x + 3$ में x का गुणांक 2 है। भाजक के चर के अधिकतम घात का गुणांक 1 होना चाहिए तब हम विचलन ज्ञात कर संशोधित भाजक प्राप्त करते हैं, अत: भाजक में 2 का भाग देंगे। $x + \frac{3}{2}$ प्राप्त हुआ, विचलन $+\frac{3}{2}$ है। इसका चिह्न बदल कर संशोधित भाजक -3/2 प्राप्त किया।
2. भाग देने की प्रक्रिया पूर्ववत है।
   भाज्य का प्रथम अंक उतारेंगे। यह उत्तर का प्रथम अंक है। उत्तर में प्राप्त अंक का संशोधित भाजक से गुणा कर गुणनफल को अगले अंक के नीचे क्रमश: लिखते हुए क्रिया करेंगे। शेषफल के खंड में प्रवेश करने तक यही क्रिया जारी रखेंगे।
3. $-\frac{3}{2} \times 2 = -3$ को $+11$ के नीचे लिखेंगे।
4. $+11 + (-3) = +8$ उत्तर का द्वितीय अंक है।
5. $-\frac{3}{2} \times 8 = -12$ को शेषफल के खंड में 14 के नीचे लिखेंगे। शेषफल $14 + (-12) = 2$.
6. भागफल +2+8 में 2 का भाग देंगे क्योंकि भाजक में 2 से भाग दिया है। (परन्तु शेष में भाग नहीं देना है।) अतः भागफल $= +1 + 4$ अर्थात् $x + 4$ तथा शेषफल 2

उदाहरण 7. $x^4 + 1 \div x + 1$

हल : भाज्य $x^4 + 1$ घात के घटते क्रम में लिखेंगे।

$x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \div x + 1$

भाजक $x + 1$	भाज्य $x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x$	$+1$
संशोधित भाजक -1	$+1 \; +0 \; +0 \; +0$	$+1$
	$-1 \; +1 \; -1$	$+1$
	$+1 \; -1 \; +1 \; -1$	$+2$
	भागफल $x^3 - x^2 + x - 1$	शेषफल 2

प्रश्नावली 8.3

परावर्त्य सूत्र के प्रयोग से भाग दीजिए

1. $x^2 + 4x + 4$ को $x + 2$ से
2. $2x^2 - 3x + 5$ को $x - 1$ से
3. $4x^3 + 3x^2 + 2x + 4$ को $x - 2$ से
4. $y^3 + 2y^2 + y - 2$ को $y + 1$ से