7 समानुपातिक तर्कण-1

0875CH07

7.1 परिवर्तन में समानता का अवलोकन

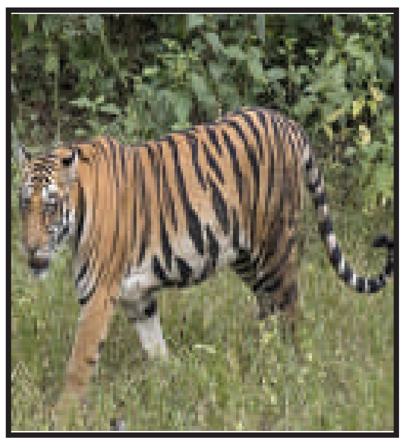
हम नीचे दिए गए सभी डिजिटल चित्रों से परिचित हैं। प्राय: हमारी आवश्यकताओं के अनुरूप हम इन चित्रों का आकार और अभिविन्यास परिवर्तित करते रहते हैं। नीचे दिए गए चित्रों के समूह का अवलोकन कीजिए—

चित्र (क)

चित्र (ख)

चित्र (ग)

चित्र (घ)



चित्र (ङ)

हम देख सकते हैं कि सभी चित्रों के आकार भिन्न-भिन्न हैं।

? आपको उपर्युक्त चित्रों में से कौन-से चित्र एक समान और कौन-से भिन्न दिखाई दे रहे हैं?

अवलोकन के उपरांत चित्र (क, ग और घ) एक समान प्रतीत होते हैं जबकि उनके आकार भिन्न हैं।

क्या चित्र 'ख' और 'ङ' अन्य तीन चित्रों के समान प्रतीत होते हैं?

नहीं, ये चित्र थोड़े विकृत हैं। चित्र 'ख' में बाघ लंबा दिखाई देता है और 'ङ' में संकुचित एवं मोटा!

ऐसा क्यों?

गणित चर्चा

आप देख सकते हैं कि चित्र 'क', 'ग' और 'घ' आयताकार हैं परंतु 'ङ' वर्गाकार है। संभवत: इसी कारण से 'ङ' भिन्न आकार का प्रतीत होता है किंतु 'ख' भी आयताकार है।

यह अन्य आयताकार चित्रों से भिन्न क्यों दिखाई देता है?

इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए क्या हम आयतों को मापकर कोई प्रतिरूप देख सकते हैं?

चित्र	चौड़ाई (मिमी. में)	ऊँचाई (मिमी. में)
चित्र 'क'	60	40
चित्र 'ख'	40	20
चित्र 'ग'	30	20
चित्र 'घ'	90	60
चित्र 'ङ'	60	60

चित्र 'क', 'ग' और 'घ' एक समान क्यों दिखाई देते हैं? साथ ही 'ख' और 'ङ' भिन्न क्यों दिखते हैं?

जब हम चित्र 'क' की तुलना चित्र 'ग' के साथ करते हैं तो हमें ज्ञात होता है कि 'ग' की चौड़ाई एवं ऊँचाई 'क' से आधी है। चौड़ाई और ऊँचाई दोनों में **परिवर्तन एक समान गणक द्वारा** हुआ है। इस स्थिति में यह $\frac{1}{2}$ है। चूँकि चौड़ाई और ऊँचाई में एक समान गणक से परिवर्तन हुआ है, अत: **चित्र एक समान** दिखाई देते हैं।

जब हम चित्र 'क' की तुलना चित्र 'ख' के साथ करते हैं तो हमें ज्ञात होता हैं कि चित्र 'ख' की चौड़ाई चित्र 'क' से 20 मिलीमीटर कम है। 'ख' की ऊँचाई भी A की ऊँचाई से 20 मिलीमीटर कम है। यद्यपि अंतर (घटाव द्वारा) समान ही है तब भी चित्र भिन्न दिखाई देते हैं। क्या चौड़ाई और ऊँचाई में समान गणक से परिवर्तन हुआ है? 'ख' की ऊँचाई 'क' की ऊँचाई से आधी है, परंतु 'ख' की चौड़ाई 'क' की चौड़ाई से आधी नहीं है। चूँकि चौड़ाई और ऊँचाई में समान गणक से परिवर्तन नहीं है, अत: चित्र भिन्न दिखाई देते हैं।

क्या आप बता सकते हैं कि चित्र 'घ' की चौड़ाई और ऊँचाई में चित्र 'क' की तुलना में किस गणक से परिवर्तन हुआ है? क्या गणक समान हैं?

चित्र 'क', 'ग' और 'घ' एक समान दिखाई देते हैं क्योंकि उनकी चौड़ाई और ऊँचाई में समान गणक से परिवर्तन है। अत: हम कह सकते हैं कि उनकी चौड़ाई और ऊँचाई में परिवर्तन **समानुपातिक** है।

not to be republished © NCERT

7.2 अनुपात

गणित में समानुपातिक संबंधों को दर्शाने के लिए हम **अनुपात** की धारणा का उपयोग करते हैं।

हम कह सकते हैं कि चित्र 'क' की चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात है— 60 : 40

संख्या 60 और 40 को इस अनुपात के **पद** कहते हैं।

चित्र 'ग' की चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात 30 : 20 है एवं चित्र 'घ' का अनुपात 90 : 60 है।

> यदि अनुपात $a : b$ के रूप में हो तो हम कह सकते हैं कि पहली मात्रा की प्रत्येक 'a' इकाई के लिए दूसरी मात्रा की 'b' इकाई होती हैं।

अत: चित्र 'क' में हम कह सकते हैं कि प्रत्येक 60 मिलीमीटर चौड़ाई के लिए 40 मिलीमीटर ऊँचाई होती है।

हम कह सकते हैं कि चित्र 'क', 'ग' और 'घ' की चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात समानुपाती है क्योंकि इन अनुपातों के पदों में समान गणक में परिवर्तन होता है। आइए, देखते हैं कैसे—

चित्र 'क' — 60 : 40

दोनों पदों को $\frac{1}{2}$ से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$60 \times \frac{1}{2} : 40 \times \frac{1}{2}$$

जो कि 30 : 20 है। यह चित्र 'ग' में चौड़ाई से ऊँचाई का अनुपात है।

? 90 : 60 (चित्र 'घ') प्राप्त करने के लिए हमें अनुपात 60 : 40 (चित्र 'क') को किस गणक से गुणा करना चाहिए?

कोई अनुपात समानुपात है या नहीं यह तुलना करने के लिए एक व्यवस्थित विधि यह है कि उन्हें **सरलतम रूप** में परिवर्तित किया जाए। इसके साथ ही यह भी देखिए कि क्या यह सरलतम रूप एक समान है।

7.3 अपने सरलतम रूप में अनुपात

हम अनुपात के पदों को उनके महत्तम समापवर्तक (म.स.प.) से भाग देकर सरलतम रूप में परिवर्तित कर सकते हैं।

चित्र 'क' में पद 60 और 40 हैं। पद 60 और 40 का म.स.प. क्या है? 60 और 40 का म.स.प. 20 है। चित्र 'क' में पदों को 20 से भाग देने पर हमें 3 : 2 अनुपात प्राप्त होता है वह एक सरलतम रूप में है।

चित्र 'घ' का अनुपात 90 : 60 है। दोनों पदों को 30 (90 और 60 का म.स.प.) से विभाजित करने पर हमें सरलतम रूप 3 : 2 प्राप्त होता है। अत: चित्र 'क' और 'घ' के अनुपात समानुपाती हैं।

चित्र 'ख' और 'ङ' के अनुपातों का सरलतम रूप क्या है?

चित्र 'ख' का अनुपात 40 : 20 है, इसका सरलतम रूप 2 : 1 है।

चित्र 'ङ' का अनुपात 60 : 60 है, इसका सरलतम रूप 1 : 1 है।

ये अनुपात 3 : 2 के समान नहीं है। अतः हम कह सकते हैं कि चित्र 'ख' और 'ङ' के चौड़ाई और ऊँचाई के अनुपात चित्र 'क', 'ग' और 'घ' के अनुपातों के समानुपाती नहीं हैं।

जब दो अनुपात उनके सरलतम रूप में समान होते हैं तब हम कह सकते हैं कि ये अनुपात **समानुपात** में हैं या अनुपात **समानुपातिक** हैं। यह अनुपात समानुपातिक हैं यह दर्शाने के लिए हम (::) चिह्न का प्रयोग करते हैं। अतः $a : b :: c : d$ दर्शाता है कि अनुपात $a : b$ और $c : d$ समानुपातिक हैं।

इस प्रकार

60 : 40 :: 30 : 20 और 60 : 40 :: 90 : 60

7.4 समानुपातिक तर्क के साथ समस्या समाधान

उदाहरण 1— क्या अनुपात 3 : 4 और 72 : 96 समानुपातिक हैं?

3 : 4 पहले से ही अपने सरलतम रूप में है।

72 : 96 का सरलतम रूप प्राप्त करने के लिए हमें दोनों पदों को उनके म.स.प. से भाग देने की आवश्यकता है।

72 और 96 का म.स.प. क्या है?

72 और 96 का म.स.प. 24 होता है। दोनों पदों को 24 से विभाजित करने पर हमें 3 : 4 प्राप्त होता है। चूँकि दोनों अनुपात उनके सरलतम रूप में एक समान हैं, अतः दिए गए अनुपात समानुपातिक हैं।

उदाहरण 2— केसांग एक उत्सव के लिए नींबू पानी बनाना चाहती थी। उसने एक पात्र में 6 गिलास नींबू पानी बनाया और उसमें 10 चम्मच चीनी मिला दी। उसके पिताजी को आशा थी कि उत्सव में और भी व्यक्ति उपस्थित हो सकते हैं। अतः पिताजी ने उसे 18 गिलास नींबू पानी और बनाने के लिए कहा।

केसांग को समान मिठास के नींबू पानी के घोल में कितनी चम्मच चीनी मिलानी चाहिए?

समान मिठास बनाए रखने के लिए नींबू पानी के गिलासों की संख्या तथा चीनी के चम्मचों की संख्या का अनुपात समानुपाती होना चाहिए। 6 गिलास नींबू पानी बनाने के लिए उसने 10 चम्मच चीनी ली थी। नींबू पानी के गिलासों और चीनी के चम्मचों का अनुपात 6 : 10 है। यदि उसे 18 गिलास और नींबू पानी बनाना है तो उसे कितने चम्मच चीनी का उपयोग करना चाहिए? इस समस्या को हम इस प्रकार लिख सकते हैं—

6 : 10 :: 18 : ?

हम जानते हैं कि अनुपात के समानुपातिक होने के लिए अनुपात में प्रत्येक पद को समान गणक से परिवर्तित करना होगा।

हम अनुपात में परिवर्तन का गणक कैसे ज्ञात कर सकते हैं?

प्रथम पद में 6 से 18 की वृद्धि हुई है। परिवर्तन का गणक ज्ञात करने के लिए हम 18 को 6 से भाग देते हैं जिससे 3 प्राप्त होता है।

© NCERT not to be republished

दूसरा पद भी उसी गणक से परिवर्तित होना चाहिए। जब 10 को गणक 3 से गुणा करके बढ़ाया जाता है तो यह 30 हो जाता है। इस प्रकार— 6 : 10 :: 18 : 30

अतः केसांग को पूर्व की भाँति समान मिठास वाले 18 गिलास नींबू पानी बनाने के लिए 30 चम्मच चीनी का उपयोग करना चाहिए।

? **उदाहरण 3**— नितिन और हरी अपने घर के परिसर की दीवार बना रहे थे। नितिन 60 फुट लंबाई वाली लंबी दीवार बना रहा था और हरी 40 फुट लंबाई वाली छोटी दीवार बना रहा था। नितिन ने 3 थैले सीमेंट का उपयोग किया किंतु हरी ने मात्र 2 थैले सीमेंट का उपयोग किया। नितिन चिंतित था कि हरी ने जो दीवार बनाई है वह उतनी सुदृढ़ नहीं होगी जितनी सुदृढ़ दीवार उसने बनाई है क्योंकि हरी ने कम सीमेंट का उपयोग किया था।

? क्या नितिन सही सोच रहा है?

इस स्थिति में हमें नितिन और हरी द्वारा बनाई दीवार की लंबाइयों और उनके द्वारा उपयोग किए गए सीमेंट के थैलों की संख्या के अनुपात की तुलना करनी चाहिए। इसके साथ ही समझना चाहिए कि क्या ये समानुपातिक हैं।

नितिन की स्थिति में अनुपात 60 : 3 अर्थात 20 : 1 (सरलतम रूप में)

हरी की स्थिति में अनुपात 40 : 2 अर्थात 20 : 1 (सरलतम रूप में)

चूँकि दोनों अनुपात समानुपातिक हैं अत: दोनों दीवारें समान रूप से सुदृढ़ हैं। नितिन को इस विषय में चिंता नहीं करनी चाहिए!

? **उदाहरण 4**— मेरे विद्यालय में 5 शिक्षक और 170 विद्यार्थी हैं। यहाँ शिक्षकों और विद्यार्थियों का अनुपात 5 : 170 है। अपने विद्यालय में शिक्षकों और विद्यार्थियों की संख्या की गणना कीजिए और बताइए कि विद्यालय में शिक्षकों और विद्यार्थियों का अनुपात क्या है? इसे निम्न रिक्त स्थान पर लिखिए।

________ : ________

? क्या आपके विद्यालय के शिक्षक व विद्यार्थी का अनुपात मेरे विद्यालय के अनुपात के समानुपाती है?

? **उदाहरण 5**— आपके कक्षा-कक्ष में श्यामपट्ट (ब्लेकबोर्ड) की चौड़ाई और ऊँचाई (निकटतम सेंटीमीटर तक) को मापिए। श्यामपट्ट की चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात क्या है?

________ : ________

? क्या आप अपनी अभ्यास पुस्तिका में एक आयत बना सकते हैं जिसकी चौड़ाई और ऊँचाई श्यामपट्ट के अनुपात के समानुपाती हो?

? आपके द्वारा बनाए गए आयत और आपके सहपाठियों द्वारा बनाए गए आयतों की परस्पर तुलना कीजिए। क्या ये सभी एक समान दिखाई देते हैं?

गणित चर्चा

शिक्षक हेतु टिप्पणी— इस प्रकार के कुछ और उदाहरण दीजिए जिनसे विद्यार्थी स्वयं को जोड़ सकें। साथ ही उनसे कारण बताने को कहिए कि उन्हें क्यों लगता है कि वे सही हैं। इन समस्याओं से जुड़ना और **समानुपातिक तर्क** की प्रक्रिया के माध्यम से हल ढूँढ़ना, सीखने की प्रक्रियाओं के साथ-साथ होना चाहिए।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 6 — जब नीलिमा की आयु 3 वर्ष थी तब उसकी माताजी की आयु उससे 10 गुना थी। नीलिमा और उसकी माताजी की आयु का अनुपात क्या था? जब नीलिमा की आयु 12 वर्ष होगी तब उनकी आयु का अनुपात क्या होगा? क्या यह अनुपात एक समान रहेगा?

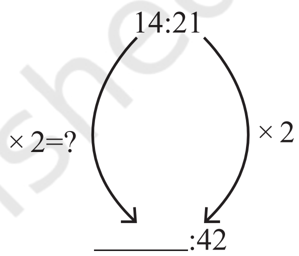
जब नीलिमा 3 वर्ष की है तब उसकी आयु और उसकी माताजी की आयु का अनुपात 3 : 30 (उसकी माताजी की आयु नीलिमा की आयु से 10 गुना) है। सरलतम रूप में यह 1:10 है।

जब नीलिमा 12 वर्ष की होगी (अर्थात 9 वर्ष के पश्चात) उनकी आयु का अनुपात 12 : 39 (9 वर्ष पश्चात उसकी माताजी 39 वर्ष की होगी) होगा। सरलतम रूप में यह अनुपात 4 : 13 है।

जब हम किसी अनुपात के पदों में समान संख्या जोड़ते (या घटाते) हैं तब अनुपात परिवर्तित हो जाता है। इसके साथ ही यह आवश्यक नहीं है कि वह मूल अनुपात के समानुपाती हो।

उदाहरण 7— निम्नलिखित अनुपातों के लिए लुप्त संख्याएँ लिखिए जो 14 : 21 के समानुपाती हों।

____ : 42,   6 : ____,   2 : _____



पहले अनुपात में हमें प्रथम पद ज्ञात नहीं है किंतु द्वितीय पद 42 है। यह अनुपात 14 : 21 के दूसरे पद का दोगुना है। अत: प्रथम पद भी 14 (प्रथम पद) का दुगुना होना चाहिए। अत: समानुपातिक अनुपात 28 : 42 है।

दूसरे अनुपात के लिए प्रथम पद 6 है। 14 को किस गणक से गुणा करना चाहिए कि हमें 6 प्राप्त हो जाए। क्या यह एक पूर्णांक हो सकता है या यह एक भिन्न होना चाहिए?

इसे हम इस प्रकार लिखे सकते हैं $14y = 6$, अत: $y = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

अत: हमें 21 (अनुपात 14 : 21 का दूसरा पद) को भी समान गणक $\frac{3}{7}$ से गुणा करने की आवश्यकता है।

$21 \times \frac{3}{7} = 9$ है। अत: अनुपात 6 : 9 है।

तीसरे अनुपात में प्रथम पद 2 है।

हम देख सकते हैं कि जब हम 14 (अनुपात 14 : 21 का प्रथम पद) को 7 (14 और 21 का म.स.प.) से विभाजित करते हैं तो हमें 2 प्राप्त होता है।

यदि हम 21 को भी 7 से विभाजित करते हैं तो हमें 3 प्राप्त होता है। अत: अनुपात 2 : 3 है।

फिल्टर कॉफी!

फिल्टर कॉफी एक पेय पदार्थ है जिसे कॉफी के घोल को दूध में मिलाकर इसे बनाया जाता है। मंजुनाथ सामान्यत: अपनी कॉफी की दुकान में एक कप फिल्टर कॉफी बनाने के लिए 15 मिलीलीटर कॉफी के घोल में 35 मिलीलीटर दूध मिलाकर मिश्रण तैयार करते हैं।

इस स्थिति में हम कह सकते हैं कि कॉफी के घोल और दूध का अनुपात 15 : 35 है।

यदि ग्राहक कड़क फिल्टर कॉफी पीना चाहता है तो मंजुनाथ 20 मिलीलीटर कॉफी के घोल में 30 मिलीलीटर दूध मिलाकर मिश्रण तैयार करता है। यह अनुपात 20 : 30 है।

© NCERT not to be republished

? यह कॉफी कड़क क्यों है?

गणित चर्चा

इसके साथ ही जब वे कम कड़क फिल्टर कॉफी पीना चाहते हैं तो वह 10 मिलीलीटर कॉफी और 40 मिलीलीटर दूध का मिश्रण तैयार करते हैं। यह अनुपात 10 : 40 है।

? यह कॉफी कम कड़क क्यों है?

गणित चर्चा

निम्नलिखित तालिका में मंजुनाथ द्वारा दूध के साथ कॉफी के घोल को मिलाने के विभिन्न अनुपात दर्शाए गए हैं। अंतिम स्तंभ में लिखिए कि कॉफी सामान्य कॉफी से अधिक कड़क है या कम कड़क।

कॉफी का घोल (मिली में)	दूध (मिली में)	सामान्य/कड़क/कम कड़क
300	600	
150	500	
200	400	
24	56	
100	300	

© NCERT not to be republished

? आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित समानुपात के सही कथनों पर गोला बनाइए।

   (i) 4 : 7 :: 12 : 21 (ii) 8 : 3 :: 24 : 6

   (iii) 7 : 12 :: 12 : 7 (iv) 21 : 6 :: 35 : 10

   (v) 12 : 18 :: 28 : 12 (vi) 24 : 8 :: 9 : 3

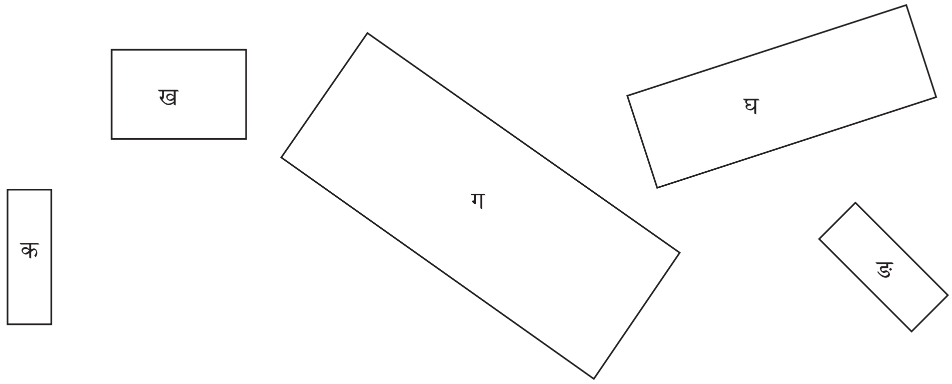
2. 4 : 9 के समानुपाती 3 अनुपात लिखिए।

   _______ : _______ _______ : _______ _______ : _______

3. दिए गए अनुपातों की लुप्त संख्याएँ लिखिए जो 18 : 24 के समानुपाती हैं।

   3 : ________ 12 : ______ 20 : _________ 27 : ________

4. दिए गए आयतों को देखिए। कौन-से आयत एक-दूसरे के समान हैं? आप एक पैमाने का उपयोग करके चौड़ाई और ऊँचाई को मापकर और उनके अनुपातों की तुलना करके इसे सत्यापित कर सकते हैं।



5. नीचे दिए गए आयत को देखिए। क्या आप अपनी अभ्यास पुस्तिका में समान चौड़ाई और ऊँचाई के अनुपात वाला एक छोटा आयत और एक बड़ा आयत बना सकते हैं? अपने आयतों की तुलना अपने सहपाठियों के चित्रों से कीजिए।

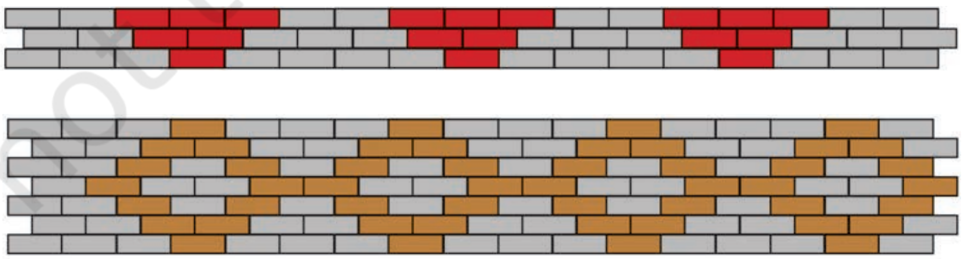
गणित चर्चा

क्या ये सभी समान हैं? यदि ये आपके चित्रों से भिन्न हैं तो आपके अनुसार ऐसा क्यों हैं? क्या वे त्रुटिपूर्ण हैं?

6. नीचे दी गई आकृति रंगीन ईंटों से बने प्रतिरूप वाली एक लंबी ईंट की दीवार के एक छोटे भाग को दर्शाती है। दीवार के प्रत्येक भाग में यह प्रतिरूप निरंतर बना रहता है। आप बताइए कि भूरी ईंटों और रंगीन ईंटों का अनुपात क्या है? इस अनुपात को सरलतम रूप में लाने का प्रयास कीजिए।

(क)

(ख)



7. आइए, कुछ मानव आकृतियाँ चित्रित करते हैं। आप अपने मित्र के शरीर की लंबाई मापिए, जैसे— उनके सिर, भुजाओं और पैरों की लंबाई। नीचे दिए गए अनुपातों को लिखिए।

सिर : धड़

______ : ______

धड़ : भुजा

______ : ______

धड़ : पैर

______ : ______

उपर्युक्त अनुपात के अनुसार सिर, धड़, भुजाओं और पैरों के साथ एक आकृति बनाइए।

? क्या अनुपात समानुपातिक होने पर चित्र अधिक वास्तविक प्रतीत होता है क्यों? क्यों नहीं?

गणित चर्चा

शिक्षक हेतु टिप्पणी— इन सभी गतिविधियों में विद्यार्थियों को यह तर्क देने के लिए प्रोत्साहित कीजिए कि चित्र समानुपातिक क्यों हैं?

त्रैरासिका— तीन का नियम

? **उदाहरण 8**— 120 विद्यार्थियों वाले एक विद्यालय में मध्याह्न भोजन के लिए रसोइया 15 किलोग्राम चावल बनाता है। एक दिन वर्षा के कारण मात्र 80 विद्यार्थी विद्यालय में उपस्थित रहे। रसोइए को कितने किलोग्राम चावल बनाने चाहिए कि भोजन व्यर्थ ना जाए?

विद्यार्थियों की संख्या और चावल की मात्रा का अनुपात समानुपाती होना चाहिए।

अत: 120 : 15 :: 80 : ?

? प्रथम पद में परिवर्तन का गणक क्या है?

इसे प्रथम पदों को भाग देकर प्राप्त कर सकते हैं $\frac{80}{120} = \frac{2}{3}$

अत: विद्यार्थियों की संख्या $\frac{2}{3}$ गणक द्वारा कम हो जाती है।

चावल के भार के समान गणक से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$15 \times \frac{2}{3} = 10$$

अत: रसोइए को उस दिन 10 किलोग्राम चावल बनाने चाहिए।

उपर्युक्त स्थिति किसी समस्या का हल खोजने के लिए समानुपातिक तर्क का उपयोग करने का एक विशिष्ट उदाहरण है। चार राशियाँ समानुपातिक रूप से संबंधित हैं इनमें से तीन ज्ञात हैं और चौथी अज्ञात राशि हमें ज्ञात करनी है।

© NCERT not to be republished

इस तरह की समस्याओं को हल करने के लिए हम दो समानुपातिक अनुपातों को बीजगणितीय रूप में निम्नानुसार लिख सकते हैं—

$$a : b :: c : d$$

हमें ज्ञात है कि दोनों अनुपातों के समानुपाती होने के लिए पद c पद a के एक गणक द्वारा गुणज होना चाहिए। माना कि गणक f है। इसी प्रकार पद d पद b का उसी गणक f द्वारा गुणज होना चाहिए। अत:,

$$c = fa \quad ...(1)$$

$$d = fb \quad ...(2)$$

(1) और (2) से हम कह सकते हैं कि

$$f = \frac{c}{a} \text{ और } f = \frac{d}{b}$$

$$\text{अत:, } \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

दोनों ओर ab से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है

$$ab \times \frac{c}{a} = ab \times \frac{d}{b}$$

$$\cancel{a}b \times \frac{c}{\cancel{a}} = a\cancel{b} \times \frac{d}{\cancel{b}}$$

$$bc = ad \text{ अथवा } ad = bc$$

इस प्रकार, जब $a : b :: c : d$, तब $ad = bc$ यह पदों का वज्र गुणन कहलाता है।

चूँकि $ad = bc$, अत: हम लिख सकते हैं

$$d = \frac{bc}{a}$$

> यदि वज्र गुणन करने पर पद समान होते हैं तो दो अनुपात समानुपाती होते हैं। इस प्रकार के वज्र गुणन से चौथी अज्ञात राशि प्राप्त की जा सकती है।

प्राचीन भारत में आर्यभट्ट (199 सामान्य संवत्) एवं अन्य ने आनुपातिकता की ऐसी समस्याओं को 'तीन का नियम' समस्याएँ कहा था। इसमें 3 संख्याएँ दी गई थीं— *प्रमाण* (यहाँ यह 'a' को इंगित करता है), *फल* (यहाँ यह 'b' को इंगित करता है) और *इच्छा* (यहाँ यह 'c' को इंगित करता है)। *इच्छाफल* (यहाँ यह 'd' को इंगित करता है) को ज्ञात करने के लिए आर्यभट्ट कहते हैं, "*फल* को *इच्छा* से गुणा करें और परिणामी गुणनफल को *प्रमाण* से भाग दें।"

दूसरे शब्दों में आर्यभट्ट कहते हैं,

"प्रमाण : फल :: इच्छा : इच्छाफल"

अत: प्रमाण × इच्छाफल = फल × इच्छा

इस प्रकार

$$\text{इच्छाफल} = \frac{\text{फल} \times \text{इच्छा}}{\text{प्रमाण}}$$

© NCERT not to be republished

आर्यभट्ट द्वारा प्रस्तावित वज्र गुणन विधि का उपयोग कर प्राचीन भारतीयों ने समानुपातिकता से संबंधित जटिल समस्याओं को हल किया है।

उदाहरण 9— एक कार 150 मिनट में 90 किलोमीटर दूरी तय करती है। यदि वह इसी गति से चलती रहे तो 4 घंटे में वह कितनी दूरी तय करेगी?

यदि यह समान गति से चलती रहे तो लिए गए समय का अनुपात तय की गई दूरी के अनुपात के समानुपाती होना चाहिए।

$$150 : 90 :: 4 : ?$$

क्या यह प्रश्न निर्माण की सही विधि है?

नहीं, क्योंकि संख्या 150 मिनट में है किंतु संख्या 4 घंटों में है। दूसरे अनुपात में समय के लिए प्रथम अनुपात के समान इकाई का उपयोग किया जाना चाहिए। चूँकि 4 घंटे, 240 मिनट के समान हैं। अत: सही रूप इस प्रकार है

$$150 : 90 :: 240 : ?$$

आप 240 मिनट में तय की गई दूरी कैसे ज्ञात कर सकते हैं?

अपने सहपाठियों के साथ चर्चा कीजिए और विभिन्न युक्तियों का उपयोग कर उत्तर ज्ञात कीजिए।

शिक्षक हेतु टिप्पणी — दूरी की समस्या को हल करने हेतु एक 'विधि' बताने के अतिरिक्त विद्यार्थियों को विभिन्न युक्तियों के माध्यम से उत्तर खोजने के लिए प्रोत्साहित कीजिए। विद्यार्थी समतुल्य भिन्नों और समतुल्य अनुपात की अपनी समझ का उपयोग उत्तर प्राप्त करने में कर सकते हैं।

उपर्युक्त समानुपात को हम इस रूप में लिख सकते हैं

$$150 : 90 :: 240 : x$$

वज्र गुणन से हमें प्राप्त होता है

$$150 \times x = 240 \times 90$$

$$x = \frac{240 \times 90}{150}$$

$$= \frac{\overset{48}{\cancel{240}} \times \overset{3}{\cancel{90}}}{\underset{1}{\cancel{\underset{\cancel{5}}{150}}}} = 144$$

अत: कार द्वारा 4 घंटे में तय की गई दूरी 144 किलोमीटर है।

उदाहरण 10— हिमाचल प्रदेश में एक किसान 200 ग्राम चाय पैकेट को ₹200 में बेचता है। मेघालय में एक बड़ा किसान 1 किलोग्राम चाय को ₹800 में बेचता है। क्या दोनों स्थानों के भार और मूल्य के अनुपात समानुपाती हैं? बताइए कौन-सी चाय अपेक्षाकृत मूल्यवान (महंगी) है?

© NCERT not to be republished

हिमाचल की चाय के भार और मूल्य का अनुपात 200 : 200

मेघालय की चाय के भार और मूल्य का अनुपात क्या है? क्या यह 1 : 800 है?

नहीं, यह उपयुक्त नहीं होगा क्योंकि हम हिमाचल की स्थिति में भार को ग्राम में मान रहे हैं। अत: मेघालय की स्थिति में चाय के भार को ग्राम में परिवर्तित करने के पश्चात भार और मूल्य का अनुपात 1000 : 800 होगा।

दिए गए अनुपात समानुपाती हैं या नहीं यह सत्यापित करने के लिए हमें यह देखने की आवश्यकता है कि क्या ये दोनों अनुपात उनके सरलतम रूप में एक समान हैं?

हिमाचल की चाय के भार और मूल्य का अनुपात सरलतम रूप में 1 : 1 है।

मेघालय की चाय के भार और मूल्य का अनुपात सरलतम रूप में 5 : 4 है।

अत: ये अनुपात समानुपाती नहीं है।

? बताइए कि दोनों में से कौन-सी चाय अधिक मूल्यवान है? क्यों?

शिक्षक हेतु टिप्पणी — कक्षा को अधिक मूल्यवान चाय पर चर्चा करने हेतु प्रोत्साहित कीजिए। विद्यार्थियों से पूछिए कि वे इस निष्कर्ष पर कैसे पहुँचे और उस चाय के अधिक मूल्यवान होने के क्या कारण हो सकते हैं?

कौन-सी चाय अधिक मूल्यवान है इसका उत्तर देने के लिए हमें दोनों स्थानों में समान भार के लिए चाय के मूल्य की परस्पर तुलना करनी चाहिए।

मेघालय में 1 किलोग्राम चाय का मूल्य क्या है? यह ₹ 800 है।

हिमाचल में यदि 200 ग्राम चाय का मूल्य ₹ 200 है तो 1 किलोग्राम चाय का मूल्य कितना होगा?

माना कि 1 किलोग्राम चाय का मूल्य x रूपये है। 200 ग्राम, 1 किलोग्राम का 1/5 है।

अत:
$$\frac{1}{5} \times x = 200$$

दोनों ओर 5 से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{1}{5} \times x \times 5 = 200 \times 5$$

$$\frac{1}{\cancel{5}} \times x \times \cancel{5} = 1000$$

$$x = 1000$$

अत: मेघालय में 1 किलोग्राम चाय का मूल्य ₹ 800 है और हिमाचल में यही मूल्य ₹ 1000 है। अत: हिमाचल की चाय अधिक मूल्यवान है।

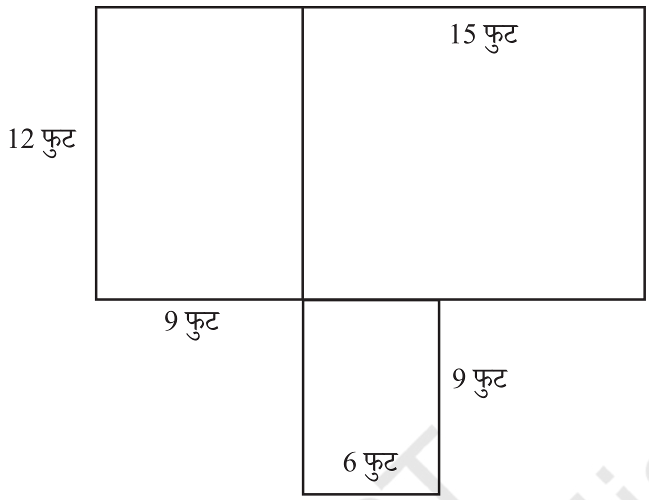
गतिविधि 1— अपनी रुचि के अनुसार किसी एक व्यंजन का चयन कीजिए। अपने परिवार हेतु यह व्यंजन बनाने के लिए इसकी सभी सामग्री और आवश्यक मात्रा ज्ञात कीजिए। मान लीजिए आप कोई उत्सव मना रहे हैं और आप 15 अतिथियों को आमंत्रित करना चाहते हैं। अतिथियों हेतु इसी व्यंजन को बनाने में उपयोग होने वाली सामग्री की मात्रा ज्ञात कीजिए।

? आइए, पता लगाएँ—

1. पृथ्वी 1 वर्ष में सूर्य के चारों ओर लगभग 940 मिलियन किलोमीटर की दूरी तय करती है। वह एक सप्ताह में कितने किलोमीटर की दूरी तय करेगी?

© NCERT not to be republished

2. एक राजमिस्त्री चित्र में दर्शाए गए आकार में एक घर बना रहा है। उसे ऐसी बाहरी और भीतरी दीवारों का निर्माण करना है, जो दो कक्षों को पृथक करती हैं। उसे एक 10 फुट की दीवार बनाने के लिए लगभग 1450 ईंटों की आवश्यकता है। बताइए कि उसे घर बनाने के लिए कुल कितनी ईंटों की आवश्यकता होगी? माना कि सभी दीवारें समान ऊँचाई और मोटाई की हैं।



पुनीत के पिताजी 50 किलोमीटर प्रति घंटा की गति से मोटरसाइकिल चलाकर दो घंटे में लखनऊ से कानपुर पहुँचते हैं। यदि वे 75 किलोमीटर प्रति घंटा की गति से मोटरसाइकिल चलाते हैं तो उन्हें कानपुर पहुँचने में कितना समय लगेगा? क्या हम इस समस्या को समानुपात के रूप में दर्शा सकते हैं—

गणित चर्चा

50 : 2 :: 75 : ___

पुनीत के पिताजी को कानपुर पहुँचने में अधिक समय लगेगा या कम? इस विषय पर ध्यान दीजिए।

यद्यपि यह समस्या पिछली समस्याओं की तरह ही प्रतीत होती है परंतु इसे तीन के नियम का उपयोग कर हल नहीं किया जा सकता है।

गति में वृद्धि होने के परिणामस्वरूप यात्रा का समय कम हो जाएगा। अतः इस समस्या को 50 : 2 :: 75 : ___ के रूप में नहीं दर्शाया जा सकता।

गतिविधि 2— बाजार जाकर एक ही शैंपू के भिन्न-भिन्न आकार के पात्र, जैसे— कोष्ठ (पाउच), छोटी बोतल, मध्यम बोतल, बड़ी बोतल के मूल्य की जानकारी एकत्रित कीजिए और नीचे दिए अनुसार एक तालिका बनाइए। पता लगाइए कि शैंपू का आयतन मूल्य के समानुपाती है या नहीं।

पात्र	आयतन	मूल्य
कोष्ठ (पाउच)	6 मिलीलीटर	₹ 2
छोटी बोतल	180 मिलीलीटर	₹ 154
मध्यम बोतल	340 मिलीलीटर	₹ 276
बड़ी बोतल	1000 मिलीलीटर	₹ 540

© NCERT not to be republished

आइए, इस प्रतिदर्श सारणी के अनुपातों की तुलना करते हैं।

शैंपू के कोष्ठ और छोटी बोतल के आयतन का अनुपात 6 : 180 है। उनके मूल्यों का अनुपात 2 : 154 है। क्या ये अनुपात समानुपाती हैं?

? आपके विचार से ऐसा क्यों है कि मूल्यों का अनुपात और आयतनों का अनुपात समानुपाती नहीं हैं?

कंपनी और ग्राहकों के लिए भिन्न-भिन्न आकार की बोतलों के लाभ और हानि पर चर्चा कीजिए। पारिस्थितिक पदचिह्न कम करने के लिए आप ग्राहक और कंपनी को क्या सुझाव देंगे? क्या अन्य उत्पादों के लिए भी यही बात लागू होती है?

बाजार में उपलब्ध अन्य उत्पादों के लिए भी ऐसी ही तालिका बनाइए जिसमें एक उत्पाद के विभिन्न मापों के लिए भिन्न-भिन्न मूल्य सम्मिलित हों, जैसे— चावल या आटा।

ऐसे उत्पादों का अवलोकन कीजिए जिनके मूल्य उनके विभिन्न मापों के समानुपातिक हैं।

कक्षा में एक ही उत्पाद के मापों और उनके लिए मूल्यों की समानुपातिकता पर चर्चा कीजिए।

शिक्षक हेतु टिप्पणी — विद्यार्थियों को एक परियोजना कार्य दीजिए। यह कार्य कक्षा को समूहों में विभाजित करके प्रारंभ कीजिए। प्रत्येक समूह एक दुकान पर किसी एक उत्पाद के विभिन्न मापों के मूल्य एकत्रित करेगा। उदाहरण के लिए उन्हें 500 ग्राम चावल, 1 किलोग्राम चावल तथा 10 किलोग्राम चावल के मूल्य अंकित करने चाहिए। विद्यार्थियों को मापों और मूल्यों की तालिका बनाकर कक्षा में अन्य सहपाठियों के सामने प्रस्तुत करना चाहिए। साथ ही विद्यार्थियों को इस बात पर भी चर्चा करनी चाहिए कि क्या मूल्य समानुपाती हैं या नहीं? और ऐसा क्यों?

7.5 साझा कीजिए परंतु समान रूप से नहीं!

? **गतिविधि 3**— एक युग्म बनाइए। गणना योग्य 12 वस्तुएँ या गणक लीजिए। ये काउंटर्स, ये सिक्के, बीज या कंकड़ भी हो सकते हैं। अब आप दोनों इन्हें आपस में भिन्न प्रकार से बाँट लीजिए।

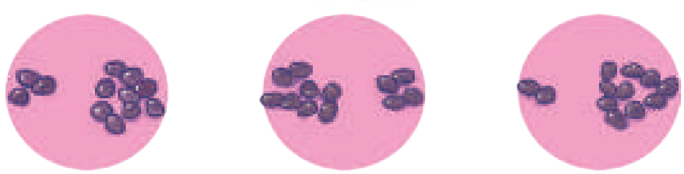
? यदि आप इन्हें समान रूप में बाँट लेते हैं तो आप में से प्रत्येक के पास उपलब्ध गणना योग्य वस्तुओं की संख्या का अनुपात क्या होगा?

आप में से प्रत्येक को 6 गणक प्राप्त होंगे। अत: अनुपात 6 : 6 या सरलतम रूप में 1 : 1 होगा।

आइए, हम समान रूप से साझा नहीं करते हैं।

? यदि आपके साथी को 5 गणक मिलते हैं तो आपको कितने गणक प्राप्त होंगे? बताइए कि गणक प्राप्ति का क्या अनुपात होगा?

आपके साथी का गणक अनुपात 5:7 है।



© NCERT not to be republished

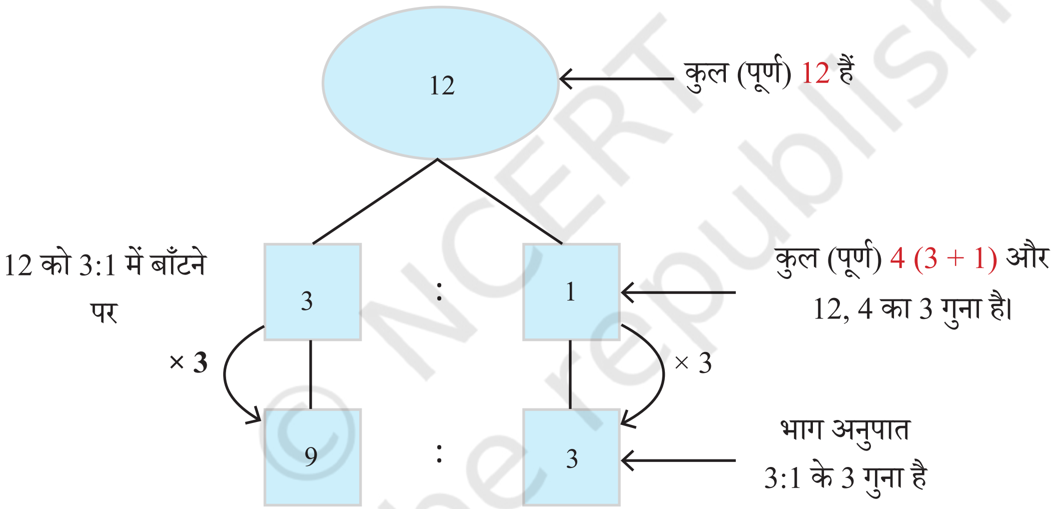
? अब यदि आप दोनों आपस में 3 : 1 के अनुपात में गणक बाँटना चाहते हैं तो आप में से प्रत्येक को कितने गणक प्राप्त होंगे?

विभिन्न प्रकार से गणकों को बाँटिए और देखिए कि कौन-सा युग्म 3 : 1 के अनुपात में है। गणकों को 3 : 1 में वितरण करने की एक विधि निम्नानुसार है—

1. आपका साथी 3 गणक लेता है और आप 1 गणक लेते हैं। तब 8 गणक शेष बचते हैं।
2. आपका साथी 3 और गणक लेता है और आप 1 और गणक लेते हैं। तब 4 गणक शेष बचते हैं।
3. आपका साथी 3 और गणक लेता है और आप 1 गणक लेते हैं। तब कोई गणक शेष नहीं रहता है।

अत: आपके साथी ने कुल 9 गणक प्राप्त किए और आपने 3 गणक प्राप्त किए हैं।

जब हम दो व्यक्तियों में 12 गणकों को 3 : 1 के अनुपात में बाँटते हैं तो पहला व्यक्ति 9 गणक प्राप्त करता है और दूसरा व्यक्ति 3 गणक प्राप्त करता है।



? अब यदि आप दोनों व्यक्तियों में 42 गणकों को 4 : 3 के अनुपात में बाँटना चाहते हैं तो आप इसे किस प्रकार बाँटेंगे?

उक्त प्रक्रिया का उपयोग करने पर अधिक समय व्यतीत होगा। एक निर्दिष्ट अनुपात में 'संपूर्ण को भागों' में बाँटने की एक सरलतम विधि उपलब्ध है।

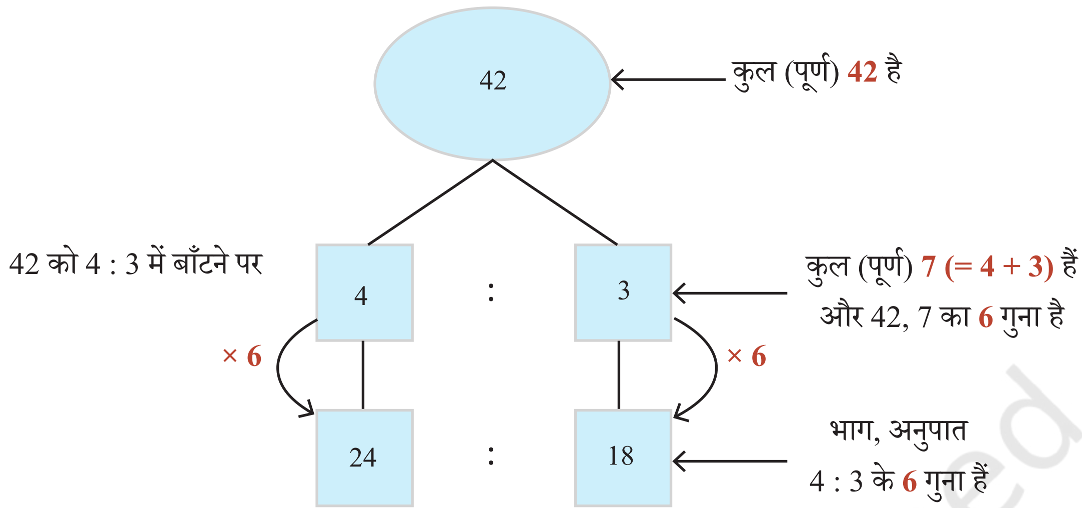
आपको 42 को समूहों में इस प्रकार बाँटना है कि आपके साथी को 4 समूह प्राप्त हों तथा आपको 3 समूह प्राप्त हों।

? प्रत्येक समूह का आकार क्या है?

यदि आपके साथी को 4 समूह प्राप्त होते हैं और आपको 3 समूह प्राप्त होते हैं तो इस प्रकार समूहों की कुल संख्या 7 है। अत: प्रत्येक समूह का आकार 42 ÷ 7 = 6 होगा।

© NCERT not to be republished

जब आप 42 गणकों को 4 : 3 के अनुपात में बाँटते हैं तब समूहों की संख्या को प्रत्येक समूह के आकार से गुणा करने पर आपके साथी को 24 गणक एवं आपको 18 गणक प्राप्त होते हैं।



सामान्यत: जब हम किसी राशि, मान लीजिए x को $m : n$ के अनुपात में बाँटना चाहते हैं तो हम निम्न प्रकार से कर सकते हैं—

1. हमें x को समूहों में बाँटने की आवश्यकता है जिससे इसे दो भागों में इस प्रकार बाँटा जा सके कि पहले भाग में m समूह हों और दूसरे भाग में n समूह हों।
2. परंतु प्रत्येक समूह का आकार क्या है? इसे x को समूहों की संख्या में भाग देकर ज्ञात किया जा सकता है। समूहों की संख्या $m + n$ है। अत: प्रत्येक समूह का आकार $\frac{x}{m+n}$ है।
3. अत: प्रथम भाग में $m \times \frac{x}{m+n}$ वस्तुएँ तथा दूसरे भाग में $n \times \frac{x}{m+n}$ वस्तुएँ हैं।

इस प्रकार यदि हम किसी एक राशि x को $m : n$ में बाँटना चाहते हैं तो उसके भाग $m \times \frac{x}{m+n}$ तथा $n \times \frac{x}{m+n}$ होंगे। हम देखते हैं कि

$$m \times \frac{x}{m+n} : n \times \frac{x}{m+n} :: m : n$$

उदाहरण 11— प्रशांति तथा भुवन ने अपने विद्यालय के समीप स्टेशनरी का व्यापार प्रारंभ किया। प्रशांति ने ₹ 75000 तथा भुवन ने ₹ 25000 का निवेश किया। पहले माह के अंत में उन्हें ₹ 4000 का लाभ हुआ। उन्होंने निर्णय लिया कि जिस अनुपात में निवेश किया है उसी अनुपात में हम लाभ को बाँट लेंगे। बताइए कि प्रत्येक व्यक्ति का लाभांश कितना है?

उनके निवेश का अनुपात 75000 : 25000 है।
इस अनुपात को सरलतम रूप में परिवर्तित करने पर हमें 3 : 1 प्राप्त होता है।
3+1 = 4 और ₹ 4000 लाभ को 4 से विभाजित करने पर ₹ 1000 प्राप्त होता है।
प्रशांति का भाग 3 × 1000 व भुवन का भाग 1 × 1000 है।
अत: प्रशांति ने लाभांश ₹ 3000 तथा भुवन ने ₹ 1000 प्राप्त किए।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 12— एक 40 किलोग्राम मिश्रण में रेत तथा सीमेंट का अनुपात 3 : 1 है। रेत और सीमेंट का अनुपात 5 : 2 करने के लिए मिश्रण में सीमेंट की कितनी और मात्रा का उपयोग करना चाहिए?

आइए, मूल मिश्रण में रेत और सीमेंट की मात्रा ज्ञात करें।
अनुपात 3 : 1 है और कुल भार 40 किलोग्राम है।

अत: रेत का भार $\frac{3}{(3+1)} \times 40 = 30$ किलोग्राम है।

सीमेंट का भार $\frac{1}{(3+1)} \times 40 = 10$ किलोग्राम है।

रेत का भार नए मिश्रण में भी पूर्व की भाँति 30 किलोग्राम ही रहता है परंतु अब रेत और सीमेंट का नया अनुपात 5 : 2 है तो प्रश्न यह है—

$$5 : 2 :: 30 : ?$$

यदि अनुपात 5 : 2 है तो दूसरा पद पहले पद का $\frac{2}{5}$ गुना होगा। चूँकि नया अनुपात 5 : 2 है इसलिए नए अनुपात में दूसरा पद भी 30 का $\frac{2}{5}$ गुना होना चाहिए।

$$\frac{2}{5} \times 30 = 12$$

यदि रेत और सीमेंट का अनुपात 5 : 2 है तो नए मिश्रण में 12 किलोग्राम सीमेंट होना चाहिए।

मिश्रण में 10 किलोग्राम सीमेंट पहले से ही है। हमें मूल मिश्रण में 2 किलोग्राम सीमेंट का और उपयोग करना चाहिए।

आइए, पता लगाएँ

1. ₹4,500 को 2 : 3 के अनुपात में दो भागों में विभाजित कीजिए।
2. एक विज्ञान की प्रयोगशाला में अम्ल और जल को 1 : 5 की मात्रा में मिलाकर एक विलयन तैयार किया जाता है। 240 मिलीलीटर विलयन वाले एक पात्र में अम्ल और जल की कितनी मात्रा होगी?
3. हरा रंग बनाने के लिए नीले और पीले रंग का 3 : 5 के अनुपात में एक मिश्रण तैयार किया गया है। 40 मिलीलीटर हरा रंग बनाने के लिए दोनों रंगों की कितनी मात्रा की आवश्यकता होगी? हरे रंग को कुछ हल्का बनाने के लिए मैंने मिश्रण में 20 मिलीलीटर पीला रंग मिलाया। बताइए कि इस रंग में नीले और पीले रंग का नया अनुपात क्या है?
4. नरम इडली बनाने के लिए आपको चावल और उड़द दाल को 2 : 1 में मिलाना होगा। यदि आपको कल सुबह इडली बनाने के लिए इस मिश्रण के 6 कप चाहिए तो आपको कितने कप चावल और उड़द दाल की आवश्यकता होगी?
5. मेरे पास एक नारंगी रंगलेप (पेंट) से भरी हुई बाल्टी है। इस रंगलेप को 3 : 5 की मात्रा से लाल और पीले रंग को मिलाकर बनाया गया है। मैंने इस मिश्रण में पीले रंगलेप की एक और बाल्टी मिला दी। इस मिश्रण में लाल रंगलेप और पीले रंगलेप की मात्रा का नया अनुपात क्या होगा?

7.6 इकाई रूपांतरण

हमने पहले देखा कि समानुपात से संबंधित समस्याओं को हल करने के लिए प्राय: हमें इकाइयों को

© NCERT not to be republished

एक प्रणाली से दूसरी प्रणाली में परिवर्तित करना होता है। आपके संदर्भ के लिए यहाँ कुछ इकाई रूपांतरण दिए गए हैं।

लंबाई

1 मीटर = 3.281 फुट

क्षेत्रफल

1 वर्ग मीटर = 10.764 वर्गफुट

1 एकड़ = 43,560 वर्गफुट

1 हेक्टेयर = 10,000 वर्गमीटर

1 हेक्टेयर = 2.471 एकड़

आयतन

1 मिलीलीटर = 1 घन सेंटीमीटर

1 लीटर = 1000 मिलीलीटर या 1000 घन सेंटीमीटर

तापमान

फारेनहाइट और सेल्सियस के मध्य तापमान रूपांतरण

0° सेल्सियस = 32° फारेनहाइट

और

$$\text{फारेनहाइट} = \frac{9}{5} \times \text{सेल्सियस} + 32$$

अथवा

$$\text{सेल्सियस} = \frac{5}{9} \times (\text{फारेनहाइट} - 32)$$

उदाहरण के लिए 25° सेल्सियस, 77° फारेनहाइट है।

? आइए, पता लगाएँ

1. अनघ 600 मिलीलीटर संतरे के रस को 900 मिलीलीटर सेब के रस के साथ मिलाकर फलों का रस तैयार करता है। संतरे के रस और सेब के रस का अनुपात सरलतम रूप में लिखिए।
2. विगत वर्ष हमने शैक्षिक भ्रमण हेतु 3 बसें किराए पर ली थी। उस भ्रमण पर कुल 162 विद्यार्थी और शिक्षक थे। बसों की सभी सीटें भरी हुई थी। इस वर्ष हमारे पास विद्यार्थियों की संख्या 204 हैं। हमें कितनी बसों की आवश्यकता होगी? क्या सभी बसें भरी होंगी?
3. दिल्ली का क्षेत्रफल 1484 वर्ग किलोमीटर और मुंबई का क्षेत्रफल 550 वर्ग किलोमीटर है। दिल्ली की जनसंख्या लगभग 3 करोड़ और मुंबई की 2 करोड़ है। कौन-सा शहर अधिक जनसंख्या वाला है? यह आपने कैसे ज्ञात किया?

4. 155 सेंटीमीटर ऊँचाई वाले एक सारस की गर्दन और शेष शरीर का अनुपात 4 : 6 है। आपकी ऊँचाई के लिए यदि आपकी गर्दन और शेष शरीर का अनुपात भी यही हो तो आपकी गर्दन कितनी लंबी होगी?

© NCERT not to be republished

5. आइए, *लीलावती* ग्रंथ की एक प्राचीन समस्या हल करें। प्राचीन समय में भार को *पलास* नामक इकाई में मापा जाता था और मुद्रा की इकाई *निष्कस* होती थी। "यदि $2\frac{1}{2}$ *पलास* केसर का मूल्य $\frac{3}{7}$ *निष्कस* हो तो अरे विद्वान व्यापारी! मुझे शीघ्रता से बताइए कि 9 *निष्कस* में केसर की कितनी मात्रा का विक्रय किया जा सकता है?"

6. हरमन एक बालिका है और उसकी आयु 1 वर्ष है। हरमन के बड़े भाई की आयु 5 वर्ष है। बताइए कि जब हरमन और उसके भाई की आयु का अनुपात 1 : 2 हो तब हरमन की आयु क्या होगी?

7. सोने और पानी के समान आयतन का द्रव्यमान 37 : 2 के अनुपात में है। यदि 1 लीटर पानी का द्रव्यमान 1 किलोग्राम है तो 1 लीटर सोने का द्रव्यमान कितना होगा?

8. एक एकड़ भूमि के लिए 10 टन गोबर की खाद का उपयोग करना एक अच्छी कृषि पद्धति मानी जाती है। एक कृषक 200 फुट लंबाई × 500 फुट चौड़ाई के आकार के एक भूखंड में टमाटर उगाने की योजना बना रहा है। उसे गोबर खाद की कितनी मात्रा आवश्यक होगी? (कृपया इस अध्याय के पूर्व खंड में वर्णित इकाई रूपांतरण वाले भाग को देखिए)।

9. एक नल एक मग पानी भरने में 15 सेकंड का समय लेता है। मग का आयतन 500 मिलीलीटर है। यदि बाल्टी की क्षमता 10 लीटर है तो वही नल एक बाल्टी पानी भरने में कितना समय लेगा?

10. एक एकड़ भूमि का मूल्य ₹ 15,00,000 है। बताइए कि उसी भूमि के 2400 वर्गफुट भूखंड का मूल्य क्या होगा?

11. एक खेत को एक ट्रैक्टर 1 जोड़ी बैलों की अपेक्षा तीव्र गति से जोत सकता है। एक कृषक अपने 20 एकड़ खेत की जुताई करना चाहता है। बैलों की एक जोड़ी को एक एकड़ जमीन जोतने में 6 घंटे का समय लगता है। यदि किसान बैलों की जोड़ी से खेत जोतता है तो बताइए कि उसे कितना समय लगेगा?

12. ₹ 10 का सिक्का ताँबे और निकल की एक मिश्रधातु 'क्यूप्रो-निकल' से निर्मित है। इस मिश्रधातु को ताँबे और निकल की 3 : 1 की मात्रा से मिलाकर प्राप्त किया जाता है। सिक्के का द्रव्यमान 7.74 ग्राम है। यदि ताँबे का मूल्य ₹ 906 प्रति किलोग्राम तथा निकल का मूल्य ₹ 1341 प्रति किलोग्राम है तो ₹ 10 के सिक्के में इन धातुओं का मूल्य क्या होगा?

प्रयास कीजिए

© NCERT not to be republished

सारांश

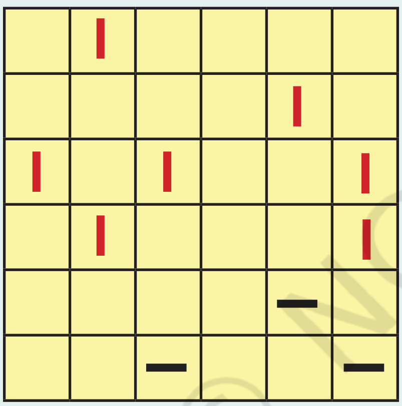
- $a : b$ के रूप में अनुपात यह दर्शाते हैं कि पहली राशि की प्रत्येक 'a' इकाई के लिए दूसरी मात्रा की 'b' इकाइयाँ हैं। 'a' और 'b' अनुपात में पद हैं।
- दो अनुपात — $a : b$ और $c : d$ — **समानुपातिक** होते हैं ($a : b :: c : d$ के रूप में लिखा जाता है) यदि उनके पदों में समान गणक से परिवर्तन होता है, अर्थात $ad = bc$
- यदि x को $m : n$ के अनुपात में दो भागों में विभाजित किया जाए तो पहले भाग की राशि होगी $m \times \frac{x}{m+n}$ तथा दूसरे भाग की $n \times \frac{x}{m+n}$ होगी।

पहेली का समय!

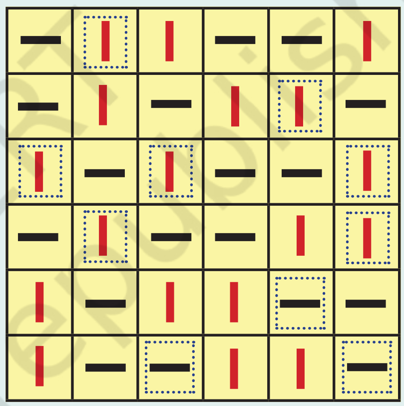
बिनौरो

बिनौरो सरल नियमों वाली एक तर्क पहेली है जिसे ताकुज़ू भी कहा जाता है। बिनौरो प्राय: एक वर्गाकार जाल पर खेला जाता है। इसका कोई विशेष आकार नहीं होता है। कुछ प्रकोष्ठ (बॉक्स) आरंभ में दो प्रतीकों से भरे हैं जो यहाँ क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाएँ हैं। शेष प्रकोष्ठ रिक्त हैं। प्रकोष्ठ इस प्रकार भरते हैं कि —

1. प्रत्येक पंक्ति और प्रत्येक स्तंभ में समान संख्या में क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाएँ होनी चाहिए।
2. दो से अधिक क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर रेखाएँ एक-दूसरे के समीप नहीं हो सकती।
3. प्रत्येक पंक्ति अद्वितीय हो तथा प्रत्येक स्तंभ अद्वितीय हो।

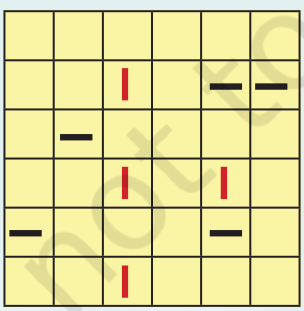


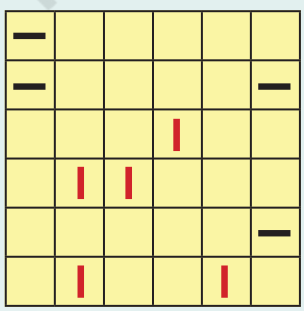
पहेली

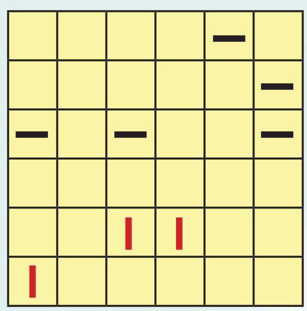


हल

निम्नलिखित बिनौरो पहेलियाँ हल कीजिए।







© NCERT not to be republished

बिंदु जाल

© NCERT
not to be republished

बिंदु जाल

© NCERT
not to be republished