1 स्वयं को प्रवृत्त करना— निर्देशांकों का उपयोग

0920CH01

1.1 भूमिका

निर्देशांकों की पद्धति एक सुसंगठित रूपरेखा है (जैसे कि एक मानचित्र अथवा आलेख पत्रक पर जाल रेखाएँ) जो हमें वस्तुओं अथवा बिंदुओं की वास्तविक भौतिक स्थितियों की व्याख्या हेतु संख्याओं के उपयोग के लिए सक्षम बनाती है।

'जाल आधारित चिंतन' और समष्टि (स्पेस) में बिंदुओं की स्थितियों को परिभाषित करने हेतु ज्यामिति की अवधारणा की गहरी जड़ें भारत में निहित हैं। जाल का प्रथम सुव्यवस्थित उपयोग हजारों वर्ष पूर्व सिंधु-सरस्वती सभ्यता में व्यापक नगरीय स्तर पर अस्तित्व में आया था, जहाँ नगर की गलियाँ समान रूप से लगभग 10 मीटर की दूरी पर उत्तर-दक्षिण और पूर्व-पश्चिम दिशा में अद्भुत सटीकता के साथ निर्मित की गई थीं। वस्तुतः यह एक व्यावहारिक निर्देशांक पद्धति थी— कोई व्यापारी नगर के केंद्र से उत्तर-दक्षिण और पूर्व-पश्चिम दिशाओं में दूरी की इकाइयों की गणना करके किसी दुकान अथवा गोदाम की स्थिति का पता लगा सकता था। जैसा कि हमने देखा है, बौधायन (लगभग 800 सामान्य संवत) ने कालांतर में उत्तर-दक्षिण और पूर्व-पश्चिम रेखाओं का उपयोग अपनी गहन ज्यामितीय संरचनाओं के लिए और बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय को विकसित करने में किया और इस प्रकार निर्देशांक ज्यामिति की आधारशिला रखी गई।

पृथ्वी की सतह पर निर्देशांकों को सुनिश्चित करना कालांतर में नौचालन (नौ-गमन) के लिए महत्वपूर्ण हो गया। उज्जयिनी का उल्लेख प्राचीन विश्व में कम-से-कम चौथी शताब्दी सामान्य संवत पूर्व के प्रारंभिक सिद्धांतों में स्थितियों को निर्धारित करने वाली केंद्रीय देशांतर मध्याह्न रेखा के रूप में मिलता है जिसके सापेक्ष अन्य सभी भौगोलिक स्थितियाँ मापी जाती थीं। ग्रीक गणितज्ञ टॉलेमी (लगभग 150 सामान्य संवत पूर्व) ने हिप्पार्कस सहित अन्य पूर्ववर्तियों के कार्यों की आधारशिला पर आगे चलकर हजारों स्थितियों के अक्षांशों और देशांतरों का वर्णन किया, जिसमें 'ओजीन' (उज्जयिनी) भी सम्मिलित था। आर्यभट्ट (लगभग 499 सामान्य संवत) ने ग्रीक 'कॉड्र्स' के स्थान पर ज्या (sines) का उपयोग किया, जिससे एक नगर अथवा एक तारे के निर्देशांकों की गणना अपेक्षाकृत सरल हो गई। उन्होंने खगोलीय निर्देशांकों का उपयोग करके आकाश के मानचित्र की रूपरेखा खींची, जिसमें निर्देशांकीय दूरियाँ क्रांतिवृत्त (सूर्यपथ) से मापीं।

ब्रह्मगुप्त (लगभग 628 सामान्य संवत) ने शून्य और ऋणात्मक संख्याओं की संकल्पना तथा उनके उपयोग को बीजगणितीय इकाइयों के रूप में प्रस्तुत किया; आधुनिक निर्देशांकीय प्रणाली में 'मूलबिंदु' शून्य होता है और 'ऋणात्मक अक्ष' शून्य से कम मानों को प्रदर्शित करता है। ब्रह्मगुप्त के इन योगदानों के बिना चार-चतुर्थांशी कार्तीय तल का अध्ययन जिसे हम इस अध्याय में पढ़ेंगे, असंभव होता।

© NCERT not to be republished

ब्रह्मगुप्त की कृतियों का अनुवाद अरबी (सिंधहिंद के रूप में) में किया गया था और इस प्रकार उज्जयिनी मध्याह्न रेखा का प्रवेश अरबी भूगोल में हुआ, जहाँ उसे 'अरिन' के नाम से संबोधित किया गया और इसने प्रारंभिक अरबी मानचित्रों के लिए शून्य देशांतर संदर्भ के रूप में कार्य किया। तब इन मानचित्रों में ऋणात्मक संख्याओं का उपयोग भी होता था। प्रभावशाली अरब विद्वान अल-बिरुनी (लगभग 1000 सामान्य संवत) ने भारत की यात्रा की और सिद्धांतों का अध्ययन किया और समस्त एशिया में स्थित विभिन्न नगरों की निर्देशांकीय स्थितियों की गणना करने के लिए भारतीय त्रिकोणमितीय विधियों का उपयोग किया। अल-बिरुनी ने कालांतर में एक हस्त संचालित उपकरण 'तारा स्थिति दर्शक' (ऐस्ट्रोलेब) के विकास में भी योगदान दिया, जिसकी सहायता से नाविक तारों के माध्यम से अपनी निर्देशांकीय स्थिति का पता लगाते थे। उमर खय्याम (लगभग 1100 सामान्य संवत), जो भारतीय दशमलव प्रणाली और औपचारिक बीजगणितीय पद्धति के विशेषज्ञ थे, वे ऐसे प्रथम गणितज्ञ थे, जिन्होंने बीजगणितीय समस्याओं के समाधान के लिए ज्यामिति का उपयोग किया, जिसमें उन्होंने इन समस्याओं की व्याख्या समतल पर निर्देशांकों के पदों में की।

अंतत: ये संकल्पनाएँ बारहवीं शताब्दी में यूरोप पहुँची। इसमें अंतत: व्यापक प्रगति तब देखी गई जब फर्मेट (1636 सामान्य संवत) के कार्यों का अनुसरण करते हुए रेने देकार्त (1637 सामान्य संवत) ने इस तथ्य को विधिवत रूप से प्रस्तुत किया कि एक द्वि-विमीय तल में किसी बिंदु को सरल रूप में दो संख्याओं के माध्यम से परिभाषित किया जा सकता है, जो दो लंबवत अक्षों से बिंदु की दूरियों को प्रदर्शित करती हैं। बिंदुओं को और अधिक जटिल ज्यामितीय आकृतियों को बीजगणित और समीकरणों का उपयोग करके सटीक रूप से वर्णित किया जा सकता था। इस प्रकार ज्यामिति और बीजगणित के क्षेत्र को और भी अधिक निकट लाया गया।

कक्षा 9 और 10 में आपको इस अद्भुत निर्देशांक प्रणाली के अध्ययन का अवसर प्राप्त होगा, जिसका मानवीय वैचारिक प्रक्रिया और प्रयासों में समृद्धशाली इतिहास रहा है। आप वस्तुओं की स्थिति का अत्यंत सटीकता से पता लगाने में सक्षम हो सकेंगे। आप यह भी देख सकेंगे कि कैसे निर्देशांकों का उपयोग हमें बीजगणितीय समीकरणों को ज्यामितीय आकृतियों और विलोमतः ज्यामितीय आकृतियों को बीजगणितीय समीकरणों में परिकल्पित करने में समर्थ बनाता है।

हम निर्देशांकों के अध्ययन का आरंभ एक कहानी से करेंगे, जो आपको इन पारिभाषिक शब्दावलियों को अपेक्षाकृत व्यवस्थित और सुसंगत विधि से समझने में सहायता करेगी।

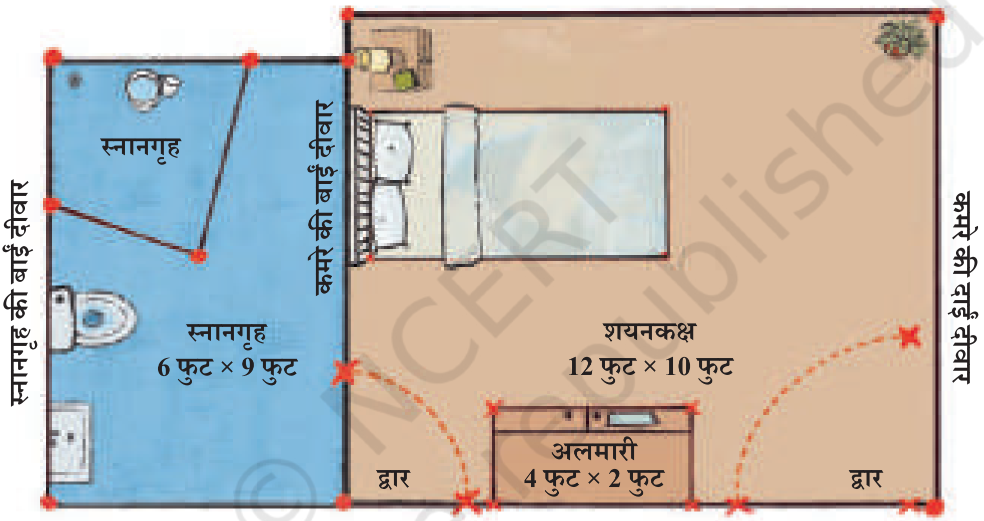
1.2 विषय प्रवेश

यह अकादमिक वर्ष का शुभारंभ है और रियान रोमांचित और असहज अनुभव कर रहा है। उसका परिवार अभी-अभी एक नए शहर में स्थानांतरित हुआ है। वह और उसकी बहन शालिनी एक नए विद्यालय जाएँगे। आज शालिनी उसे एक नए वातावरण में समायोजित होने में सहायता करेगी। यदि कोई दृष्टिबाधित है तो यह निश्चित रूप से उसके लिए एक बड़ी चुनौती होगी, किंतु माँ की स्थानांतरणीय नौकरी के कारण ये भाई-बहन प्राय: ऐसा करते रहे हैं और प्रत्येक स्थानांतरण के साथ यह समायोजन अपेक्षाकृत अधिक सरल होता गया है।

© NCERT not to be republished

शालिनी ने अभी-अभी कक्षा 9 उत्तीर्ण की है और इस बार उसने रियान के मार्गदर्शन के लिए निर्देशांक ज्यामिति को व्यवहार में लाने का निर्णय लिया है, जिसका अध्ययन उसने अपनी गणित की कक्षा में किया था।

शालिनी यह चाहती थी कि रियान दिशाओं का अनुभव करे, इसके लिए उसने एक आयताकार जाल का उपयोग किया, जिस पर उसने कुछ पिन और धागों को व्यवस्थित किया। यह व्यवस्था कमरे के तल को प्रदर्शित करती थी। रेखाचित्र में बिंदुओं को अंकित करने के लिए पिनों का उपयोग किया गया था। शालिनी 1 सेंटीमीटर : 1 फुट के पैमाने को उपयोग में ला रही थी। उसने कमरे के विभिन्न प्रमुख बिंदुओं को चिह्नित करने के लिए पिन का उपयोग किया। वस्तुओं के कोनों को प्रदर्शित कर रहे बिंदु मोटे ऊन से जुड़े हुए थे, जिससे रियान अपनी अँगुलियों से उनकी स्थितियों का अनुभव कर सके।



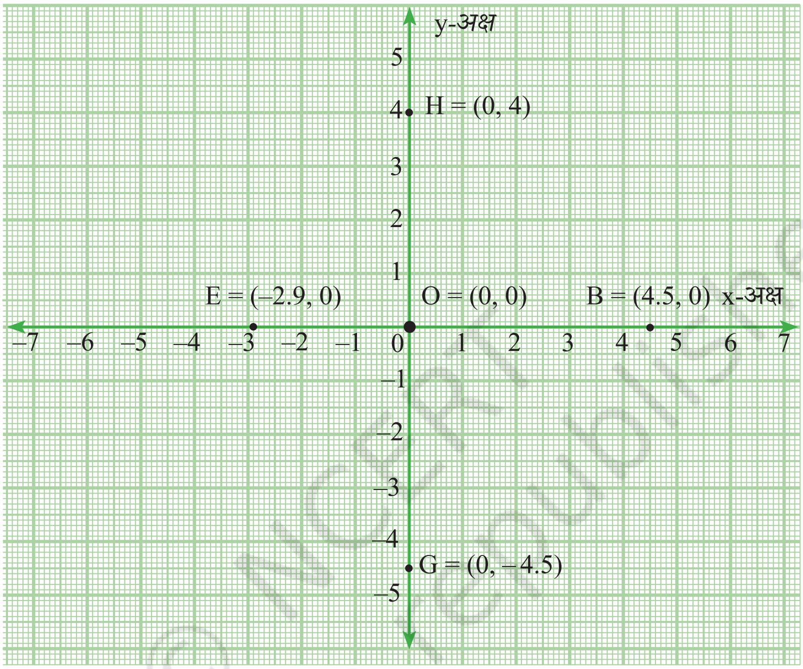
चित्र 1.1 — रियान के कमरे का रेखाचित्र

आइए हम रियान के कमरे का अभिन्यास (लेआउट) समझने के लिए चित्र 1.1 का परीक्षण करें। ध्यान दीजिए, यह केवल तल के मानचित्र को प्रदर्शित करता है। क्या आपने देखा कि क्यों मानचित्र में खिड़कियों की स्थितियों को चिह्नित नहीं किया जा सकता है?

1.3 द्वि-विमीय कार्तीय निर्देशांक पद्धति

विगत कक्षाओं में पूर्णांकों, परिमेय संख्याओं और दशमलवों के अध्यायों में आपने एक-विमीय संख्या रेखा का अध्ययन किया था। द्वि-विमीय निर्देशांक पद्धति में दो लंबवत रेखाओं का उपयोग, द्वि-विमीय समष्टि में बिंदुओं को चिह्नित करने के लिए किया जाता है, जिसे संक्षेप में 2-D समष्टि कहा जाता है। सुविधानुसार, इसमें से एक रेखा को हम क्षैतिज मानते हैं, इसे x-अक्ष कहा जाता है। दूसरी रेखा ऊर्ध्व होती है, इसे y-अक्ष कहा जाता है। जिस बिंदु पर x-अक्ष और y-अक्ष एक-दूसरे को प्रतिच्छेद

करते हैं, वह बिंदु मूलबिंदु O कहलाता है; इसके निर्देशांक (0, 0) होते हैं। निर्देशांक अक्ष हमें किसी बिंदु के निर्देशांकों का उपयोग कर द्वि-विमीय तल में उस बिंदु की स्थिति ज्ञात करने में सहायता करते हैं। दोनों अक्षों पर O से दूरियों को समान इकाइयों में चिह्नित किया जाता है। O के दाहिनी ओर तथा O से ऊपर की ओर दूरियों को धनात्मक माना जाता है और O के बाईं ओर तथा O से नीचे की ओर दूरियों को ऋणात्मक माना जाता है (चित्र 1.2)।



चित्र 1.2 — निर्देशांक तल की संरचना

बिंदु B, x-अक्ष पर स्थित है और O के दाईं ओर 4.5 इकाई दूरी पर है, इसके निर्देशांक (4.5, 0) हैं। इस तथ्य को B = (4.5, 0) लिखा जाता है। बिंदु G, y-अक्ष पर स्थित है और मूलबिंदु O से नीचे की ओर 4.5 इकाई की दूरी पर है, इसके निर्देशांक (0, –4.5) हैं अर्थात G = (0, –4.5) है। बिंदु H भी y-अक्ष पर स्थित है किंतु O से ऊपर की ओर 4 इकाई की दूरी पर है, इसके निर्देशांक (0, 4) हैं अर्थात H = (0 ,4) है।

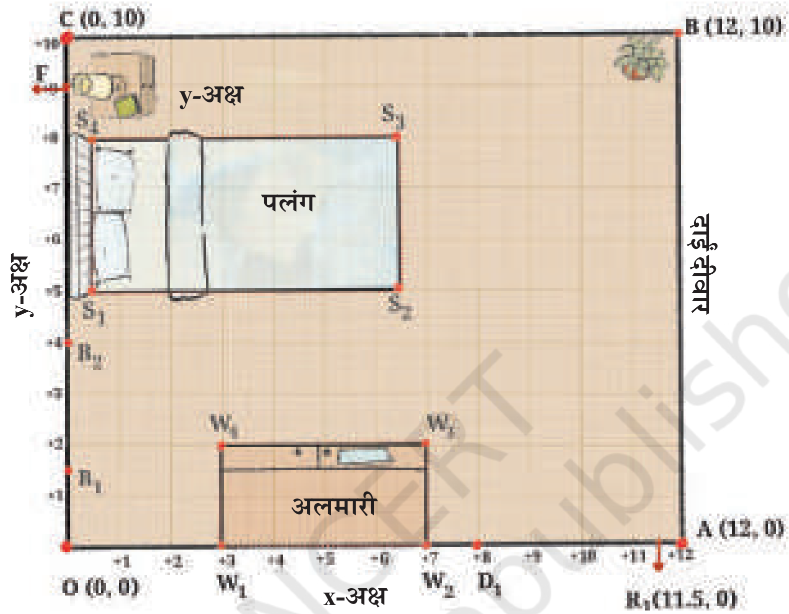
कोई बिंदु P = $(x, 0)$, x-अक्ष पर स्थित होता है। यदि x धनात्मक है तो P, O के दाईं ओर स्थित होगा। यदि x ऋणात्मक है तो P, O के बाईं ओर स्थित होगा। कोई बिंदु P = $(0, y)$, y-अक्ष पर स्थित होता है। यदि y धनात्मक है तो P, O के ऊपर की ओर स्थित होगा; यदि y ऋणात्मक है तो P, O के नीचे की ओर स्थित होगा।

किसी बिंदु के निर्देशांक लिखते समय '=' चिह्न का उपयोग किए बिना P = (x, y) को सरल रूप में P(x, y) लिखना अपेक्षाकृत सुविधाजनक होता है।

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 1.1

चित्र 1.3 में रियान का कमरा दिखाया गया है, इसके कोनों को बिंदुओं OABC द्वारा चिह्नित किया गया है। चित्र में x-अक्ष और y-अक्ष को चिह्नित किया गया है। बिंदु O मूलबिंदु है।



चित्र 1.3

चित्र 1.3 के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

(i) यदि D_1R_1 रियान के कमरे के द्वार को प्रदर्शित करता है तो यह द्वार कमरे की बाईं दीवार (y-अक्ष) से कितनी दूरी पर स्थित है? द्वार x-अक्ष से कितनी दूरी पर स्थित है?

(ii) D_1 के निर्देशांक क्या हैं?

(iii) यदि R_1 बिंदु (11.5, 0) है तो द्वार की चौड़ाई क्या है? क्या आपको लगता है कि कमरे के द्वार के लिए यह चौड़ाई उपयुक्त है? यदि कोई व्यक्ति पहिएदार कुर्सी (व्हीलचेयर) पर बैठकर कमरे में प्रवेश करना चाहता है तो क्या वह सरलतापूर्वक ऐसा कर पाएगा?

(iv) यदि B_1 (0, 1.5) और B_2 (0, 4) स्नानगृह के द्वार की सीमा के अंतिम बिंदुओं को प्रदर्शित करते हैं तो क्या स्नानगृह का द्वार कमरे के द्वार की तुलना में संकीर्ण है या अधिक चौड़ा है?

सोचिए और विचार कीजिए

1. किसी कमरे के द्वार के लिए मानक चौड़ाई क्या है? अपने घर और विद्यालय के परिवेश में देखिए।
2. क्या आपके विद्यालय के द्वार व्हीलचेयर पर बैठे व्यक्तियों के लिए उपयुक्त हैं?

© NCERT not to be republished

अभी तक हमने केवल दो निर्देशांक वाले अक्षों पर निरूपित बिंदुओं पर विचार किया है। आप उन बिंदुओं के निर्देशांकों के विषय में क्या कहना चाहेंगे, जो इनमें से किसी भी अक्ष पर निरूपित नहीं हैं? तल जिसमें दोनों अक्ष स्थित हैं, उन्हें **कार्तीय तल**, **निर्देशांक तल** अथवा **xy-तल** कहते हैं। अक्ष, तल को चार भागों में विभाजित करते हैं, जिन्हें **चतुर्थांश** कहा जाता है। चतुर्थांशों का क्रमांकन चित्र 1.4 में दर्शाए अनुसार किया जाता है।

पूर्व में बताई गई परिपाटी के अनुसार हम कह सकते हैं—

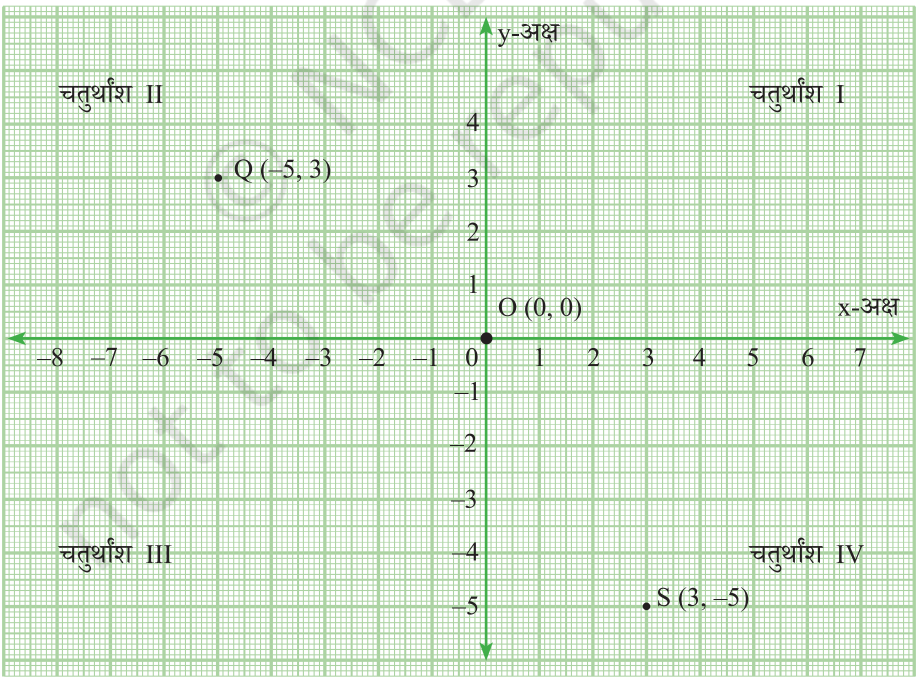
(i) प्रथम चतुर्थांश में स्थित बिंदुओं के x और y दोनों निर्देशांक धनात्मक होते हैं।

(ii) द्वितीय चतुर्थांश में स्थित बिंदुओं के x-निर्देशांक ऋणात्मक और y-निर्देशांक धनात्मक होते हैं।

(iii) तृतीय चतुर्थांश में स्थित बिंदुओं के x और y दोनों निर्देशांक ऋणात्मक होते हैं।

(iv) चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित बिंदुओं के x-निर्देशांक धनात्मक और y-निर्देशांक ऋणात्मक होते हैं।

क्या आप अब द्वि-विमीय तल में किसी बिंदु के निर्देशांकों का अभिप्राय समझ सकते हैं? सामान्य रूप से एक द्वि-विमीय तल में किसी बिंदु P के निर्देशांकों को (x, y) के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है। यहाँ x, y-अक्ष से P की लंबवत दूरी को प्रदर्शित करता है, जिसे x-अक्ष के अनुदिश मापा गया है और y, x-अक्ष से P की लंबवत दूरी को अभिव्यक्त करता है, जिसे y-अक्ष के अनुदिश मापा गया है। x और y, बिंदु (x, y) के क्रमशः x-निर्देशांक और y-निर्देशांक हैं।



चित्र 1.4

© NCERT not to be republished

उदाहरण के लिए, चित्र 1.4 में बिंदु S (3, –5) चतुर्थ चतुर्थांश में है, x-निर्देशांक 3 इकाई है और y-निर्देशांक –5 इकाई है। बिंदु Q (–5, 3) के लिए क्या कहा जा सकता है? यह बिंदु x-निर्देशांक –5 और y-निर्देशांक 3 के साथ द्वितीय चतुर्थांश में है। चित्र 1.4 को अपनी अभ्यास पुस्तिका में बनाते हुए अपने आरेख में S और Q का अंकन कीजिए। प्रथम चतुर्थांश में किसी बिंदु P और तृतीय चतुर्थांश में किसी बिंदु R को अंकित कीजिए और उनके निर्देशांक लिखिए।

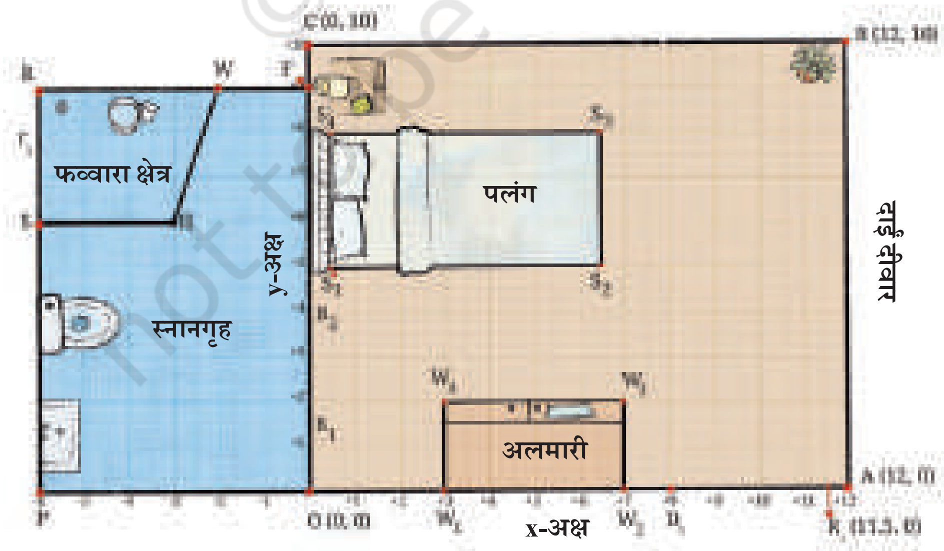
सोचिए और विचार कीजिए

1. y-अक्ष पर किसी बिंदु का x-निर्देशांक क्या है?
2. क्या x-अक्ष पर किसी बिंदु के लिए समान व्यापकीकरण किया जा सकता है?
3. क्या बिंदु Q (y, x) कभी भी बिंदु P (x, y) के संपाती होता है? अपने उत्तर को प्रमाणित कीजिए।
4. यदि $x \neq y$ है तो $(x, y) \neq (y, x)$ होगा और $(x, y) = (y, x)$ केवल तभी होगा, यदि $x = y$ हो। क्या यह सत्य है?

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 1.2

एक आलेख पत्रक पर x-अक्ष, y-अक्ष और मूलबिंदु O को अंकित कीजिए। x-अक्ष पर (–7, 0) से लेकर (13, 0) तक और y-अक्ष पर (0, –15) से लेकर (0, 12) तक बिंदुओं का अंकन कीजिए (1 से.मी. = 1 इकाई का पैमाना उपयोग कीजिए)। चित्र 1.5 का उपयोग करते हुए अगले पृष्ठ पर दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए—



चित्र 1.5

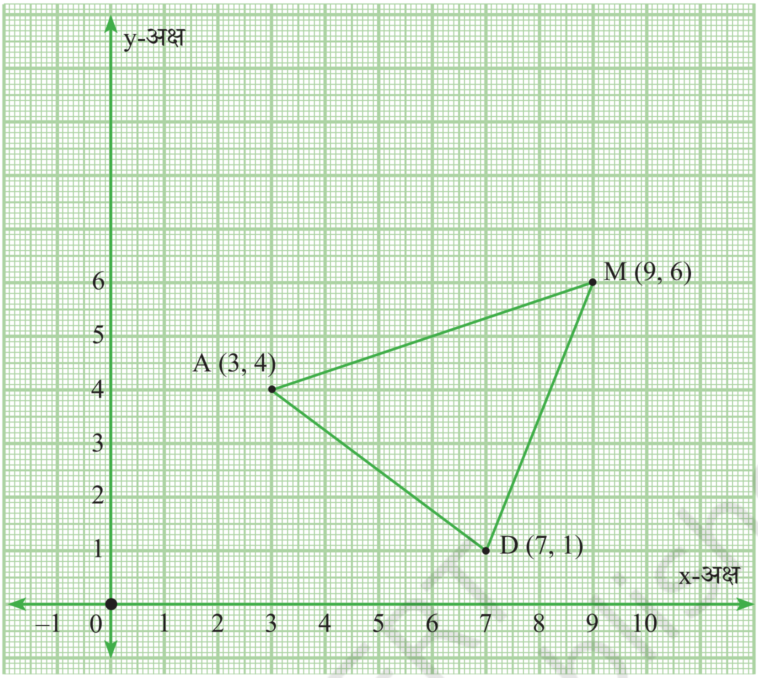
1. रियान की आयाताकार अध्ययन मेज को इस प्रकार रखिए कि उसके तीन पाये बिंदुओं (8, 9), (11, 9) और (11, 7) पर स्थित हों।
   (i) मेज का चौथा पाया कहाँ होगा?
   (ii) क्या मेज के लिए यह एक सही स्थान है?
   (iii) मेज की चौड़ाई क्या है? इसकी लंबाई क्या है? क्या आप मेज की ऊँचाई बता सकते हैं?
2. यदि एक स्नानगृह के द्वार का कब्जा B_1 पर है और यह शयनकक्ष की ओर खुलता है तो क्या यह अलमारी से टकराएगा? यदि द्वार अपेक्षाकृत अधिक चौड़ाई का बनाया जाए तो इस संदर्भ में क्या आप कुछ परिवर्तनों का सुझाव देंगे?
3. रियान के स्नानगृह की ओर देखिए—
   (i) स्नानगृह के चार कोनों O, F, R और P के निर्देशांक क्या हैं?
   (ii) रियान के स्नानगृह में फव्वारा क्षेत्र का आकार क्या है? इसके चारों कोनों के निर्देशांक लिखिए।
   (iii) प्रक्षालन पात्र (वॉश बेसिन) के लिए 3 फुट × 2 फुट और प्रसाधन (शौचालय) के लिए 2 फुट × 3 फुट का स्थान चिह्नित कीजिए। इन स्थानों के कोनों के निर्देशांक लिखिए।
4. घर में अन्य कमरे—
   (i) रियान कमरे के प्रवेशद्वार तक भोजनकक्ष से होकर जाता है जिसकी लंबाई 18 फुट और चौड़ाई 15 फुट है। भोजनकक्ष की लंबाई बिंदु P से लेकर बिंदु A तक है। भोजनकक्ष का रेखाचित्र खींचिए और इसके कोनों के निर्देशांकों को अंकित कीजिए।
   (ii) भोजनकक्ष के ठीक मध्य में एक 5 फुट × 3 फुट क्षेत्रफल की आयताकार भोजन-मेज (डाइनिंग टेबल) रखिए। मेज के पायों के निर्देशांकों को लिखिए।

1.4 द्वि-विमीय तल में दो बिंदुओं के मध्य दूरी

हम दो बिंदुओं के मध्य दूरी का आकलन करने की विधि से अवगत हैं, यदि वे बिंदु अक्षों पर स्थित हैं अथवा अक्षों के समानांतर एक रेखाखंड का निर्माण करते हैं। उदाहरण के लिए, चित्र 1.5 में हम $W_1 W_2$ और $S_1 S_2$ दूरियों का पता लगा सकते हैं। हमें क्या करना चाहिए, यदि बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड किसी भी अक्ष के समानांतर नहीं हो? इस संदर्भ में हम बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग कर सकते हैं, जिसका अध्ययन आपने कक्षा 8 में किया है। हम इस परिणाम का उपयोग xy-तल में स्थित किन्हीं दो बिंदुओं के मध्य की दूरी का पता लगाने के लिए कर सकते हैं।

चित्र 1.6 में त्रिभुज ADM को देखिए।

© NCERT not to be republished



चित्र 1.6

त्रिभुज ADM प्रथम चतुर्थांश में एक न्यूनकोण त्रिभुज है। हम इसकी भुजाओं AD, DM और MA की लंबाई कैसे ज्ञात करेंगे?

सोचिए और विचार कीजिए

1. A (3, 4) से D (7, 1) तक पहुँचने में, x-अक्ष के अनुदिश कितनी दूरी तय की गई है? इन्हीं बिंदुओं के लिए y-अक्ष के अनुदिश कितनी दूरी तय की गई है?
2. क्या ये दूरियाँ आपको AD दूरी ज्ञात करने में सहायता कर सकती हैं?

चित्र 1.7 हमारे समक्ष एक संकेत प्रस्तुत करता है। x-अक्ष के अनुदिश तय की गई दूरी को CD द्वारा दर्शाया गया है।

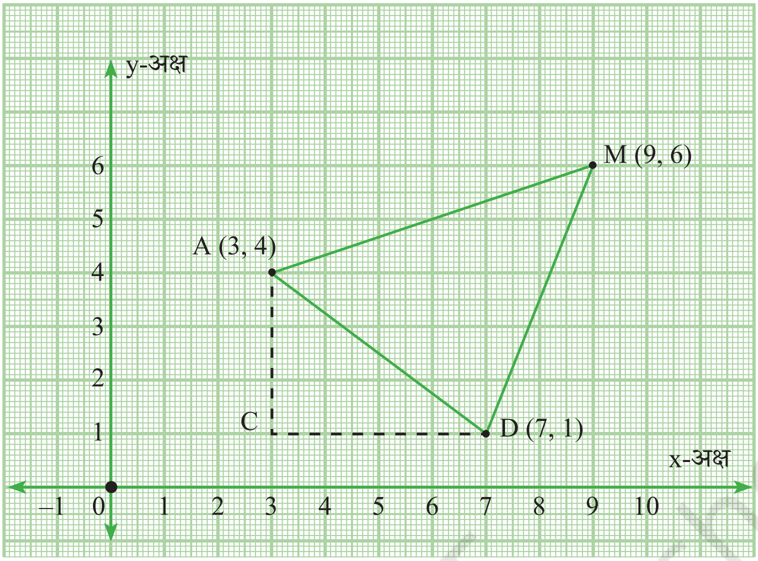
CD = D का x-निर्देशांक – A का x-निर्देशांक = 7 – 3 = 4

y-अक्ष के अनुदिश तय की गई दूरी AC द्वारा दर्शाई गई है।

AC = A का y-निर्देशांक –D का y-निर्देशांक = 4 – 1 = 3

बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग कर हम अभीष्ट दूरी ज्ञात कर सकते हैं—

$$AD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ इकाई}$$



चित्र 1.7

इसी प्रकार, हम DM और MA दूरियों को ज्ञात कर सकते हैं—

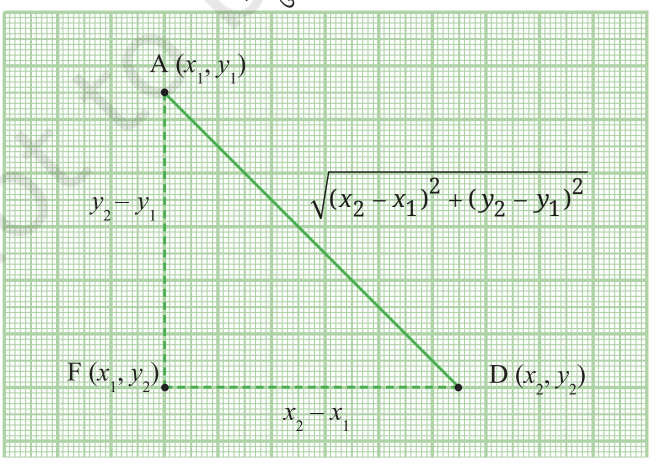
$$DM = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \text{ इकाई}$$

$$MA = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} \text{ इकाई}$$

व्यापक रूप से बिंदुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) के मध्य की दूरी निम्नलिखित सूत्र द्वारा दी जाती है—

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

और इसकी गणना चित्र 1.8 में दर्शाए अनुसार की जाती है।

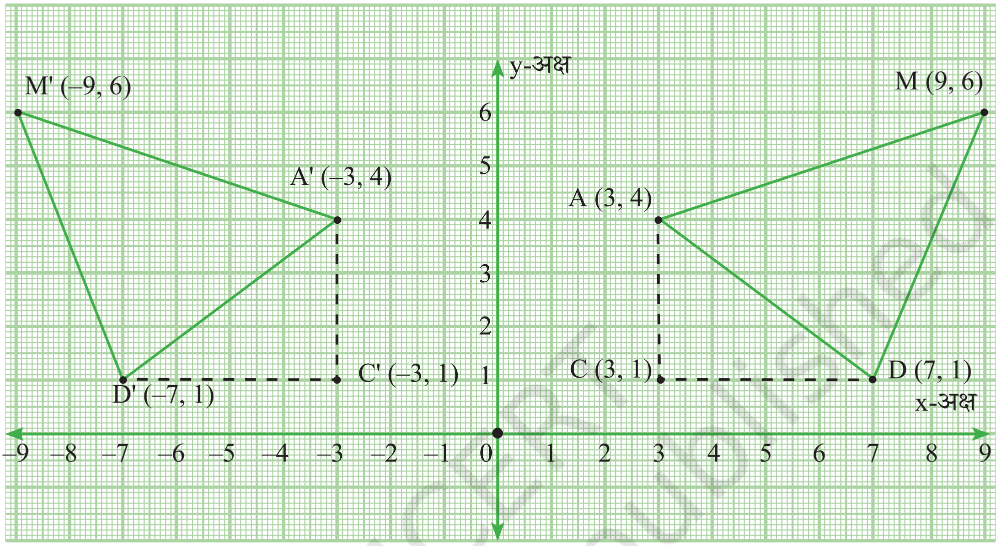


चित्र 1.8

© NCERT not to be republished

इससे कोई अंतर नहीं पड़ता है कि $(x_2 - x_1)$ और $(y_2 - y_1)$ धनात्मक है या ऋणात्मक, क्योंकि हम दोनों अक्षों के अनुदिश होने वाले परिवर्तनों को माप रहे हैं।

क्या होगा, यदि x_1, x_2, y_1, y_2 के मान ऋणात्मक हों? चित्र 1.9 में, त्रिभुज AMD, y-अक्ष में परावर्तित हो रहा है। बिंदुओं A, M और D के प्रतिबिंबों के निर्देशांक क्या हैं?



चित्र 1.9

C'D' = A' का x-निर्देशांक – D' का x-निर्देशांक = – 3 – (–7) = 4

A'C' = A' का y-निर्देशांक – D' का y-निर्देशांक = 4 – 1 = 3

बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करने पर हमें AD = $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ इकाई प्राप्त होती है।

इसी प्रकार आप D'M' और M'A' की गणना कर सकते हैं—

$$D'M' = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29} \text{ इकाई}$$

$$M'A' = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{40} \text{ इकाई}$$

हम देखते हैं कि परावर्तन भी त्रिभुज की भुजाओं की लंबाईं को संरक्षित रखता है।

सोचिए और विचार कीजिए

1. ऊपर दिए गए परावर्तन में कौन-से मान समान बने रहे और कौन-से मान परिवर्तित हुए?
2. क्या ये अवलोकन समान बने रहेंगे, यदि ΔADM का परावर्तन (y-अक्ष के स्थान पर) x-अक्ष में हो रहा हो?

© NCERT not to be republished

अंतिम प्रश्नावली

1. दोनों अक्षों के प्रतिच्छेद बिंदु के x-निर्देशांक और y-निर्देशांक क्या होंगे?
2. बिंदु W का x-निर्देशांक –5 है। क्या आप उस बिंदु H के निर्देशांकों को ज्ञात कर सकते हैं जो W से होकर जाती हुई y-अक्ष के सामानांतर रेखा पर स्थित हो? बिंदु H किन चतुर्थांशों में स्थित हो सकता है?
3. बिंदु R (3, 0), A(0, –2), M (–5, –2) तथा P (–5, 2) पर विचार कीजिए। यदि वे इसी क्रम में मिलाए गए हैं तो अनुमान लगाइए—
   (i) RAMP की दो भुजाएँ जो परस्पर लंबवत हैं।
   (ii) RAMP की वह भुजा जो किसी एक अक्ष के समानांतर है।
   (iii) दो बिंदु जो एक अक्ष में एक-दूसरे के दर्पण प्रतिबिंब हैं। यह अक्ष कौन-सा होगा?
   अब बिंदुओं को अंकित कीजिए और अपने अनुमान को सत्यापित कीजिए।
4. कार्तीय तल पर बिंदु Z (5, –6) का अंकन कीजिए। एक समकोण त्रिभुज IZN की रचना कीजिए और तीनों भुजाओं की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए।
   (**टिप्पणी**— आपके उत्तरों में अंतर हो सकता है।)
5. यदि ऋणात्मक संख्याएँ नहीं होतीं तो निर्देशांक पद्धति कैसी होती? क्या इस पद्धति से द्वि-विमीय तल में सभी बिंदुओं को अंकित किया जा सकता था?

*6. क्या बिंदु M (–3, –4), A (0, 0) और G (6, 8) एक ही सरल रेखा पर हैं? बिंदुओं के अंकन के बिना और बिंदुओं को जोड़े बिना एक विधि बताइए, जिसके माध्यम से हम इसका परीक्षण कर सकें।

*7. अपनी विधि (प्रश्न 6 से) का उपयोग करते हुए यह परीक्षण कीजिए कि क्या बिंदु R (–5, –1), B (–2, –5) और C (4, –12) एक ही सरल रेखा पर हैं। अब बिंदुओं के दोनों समूहों को अंकित कीजिए और अपने उत्तरों की जाँच कीजिए।

*8. मूलबिंदु को एक शीर्ष के रूप में उपयोग करते हुए, निम्नलिखित के शीर्षों को अंकित कीजिए—
   (i) एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज
   (ii) एक ऐसा समद्विबाहु त्रिभुज जिसका एक शीर्ष तृतीय चतुर्थांश में और अन्य शीर्ष चतुर्थ चतुर्थांश में हो।

*9. दी गई सारणी, बिंदुओं S, M और T के निर्देशांकों को प्रदर्शित करती है। प्रत्येक स्थिति में बताइए कि क्या M, रेखाखंड ST का मध्यबिंदु है। अपने उत्तर को सत्यापित कीजिए।

© NCERT not to be republished

S	M	T	क्या M, ST का मध्यबिंदु है? हाँ या नहीं।	आपके उत्तर का कारण
(–3, 0)	(0, 0)	(3, 0)		
(2, 3)	(3, 4)	(4, 5)		
(0, 0)	(0, 5)	(0, –10)		
(–8, 7)	(0, –2)	(6, –3)		

जब M, ST का मध्यबिंदु हो तो क्या आप M, S और T के निर्देशांकों के मध्य किसी संबंध का पता लगा सकते हैं?

*10. आपने जो संबंध ज्ञात किया है, उसका उपयोग करते हुए B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, यदि M (–7, 1), A (3, –4) और B (x, y) के मध्यबिंदु के रूप में दिया गया है।

*11. मान लीजिए रेखाखंड AB के त्रिविभाजन बिंदु P और Q हैं, जहाँ P, A के निकट है, जबकि Q, B के निकट है। किसी रेखाखंड के मध्यबिंदु के निर्देशांकों को ज्ञात करने के अपने ज्ञान का उपयोग करते हुए P और Q के निर्देशांकों को आप कैसे ज्ञात करेंगे? इस विधि को उपयोग कीजिए, जब बिंदु A (4, 7) और B (16, –2) हैं।

*12. (i) दिए गए बिंदुओं A (1, –8), B (–4, 7) और C (–7, –4) के लिए प्रदर्शित कीजिए कि वे एक वृत्त K पर स्थित हैं जिसका केंद्र मूलबिंदु O (0, 0) है। वृत्त K की त्रिज्या क्या होगी?

(ii) दिए गए बिंदुओं D (–5, 6) और E (0, 9) के लिए जाँच कीजिए कि क्या वे वृत्त K के भीतर स्थित हैं, वृत्त पर स्थित हैं या वृत्त के बाहर स्थित हैं।

*13. त्रिभुज ABC की भुजाओं के मध्यबिंदु D, E और F हैं। D, E और F के निर्देशांक क्रमशः (5, 1), (6, 5) और (0, 3) दिए गए हैं, A, B और C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

14. एक शहर की दो मुख्य सड़कें हैं जो एक-दूसरे को शहर के केंद्र पर प्रतिच्छेद करती हैं। ये दो सड़कें उत्तर-दक्षिण और पूर्व-पश्चिम दिशा के अनुदिश हैं। शहर की अन्य सभी गलियाँ इन्हीं सड़कों के समानांतर हैं और एक-दूसरे से 200 मी. की दूरी पर स्थित हैं। प्रत्येक दिशा में 10 गलियाँ हैं।

(i) 1 से.मी. = 200 मी. पैमाने का उपयोग करते हुए, अपनी अभ्यास-पुस्तिका में शहर का एक प्रतिरूप बनाइए। सड़कों को एकल रेखाओं द्वारा प्रस्तुत कीजिए।

(ii) प्रदर्श में गलियों के प्रतिच्छेदन हैं। प्रत्येक गली प्रतिच्छेदन दो गलियों द्वारा बना है जिसमें एक गली उत्तर-दक्षिण दिशा और दूसरी गली पूर्व-पश्चिम दिशा की ओर जा रही है। प्रत्येक गली प्रतिच्छेदन की व्याख्या निम्नलिखित रूप में की गई है—

© NCERT not to be republished

यदि उत्तर-दक्षिण दिशा में जाने वाली दूसरी गली और पूर्व-पश्चिम दिशा में जाने वाली पाँचवीं गली किसी स्थान पर प्रतिच्छेद करती हैं तो हम इस गली प्रतिच्छेदन को (2, 5) कहेंगे। इस पद्धति का उपयोग करते हुए ज्ञात कीजिए—

(a) गलियों के कितने प्रतिच्छेदनों को (4, 3) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है?

(b) गलियों के कितने प्रतिच्छेदनों को (3, 4) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है?

15. एक कंप्यूटर ग्राफिक्स (चित्रांकन) कार्यक्रम में एक आयताकार दृश्यपटल (स्क्रीन) पर छवियों को प्रदर्शित किया जाता है जिसकी निर्देशांक पद्धति का मूलबिंदु नीचे बाएँ कोने में है। दृश्यपटल की चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 800 पिक्सेल और 600 पिक्सेल है। 80 पिक्सेल त्रिज्या वाला एक वृत्ताकार प्रतीक (आइकन), बिंदु A (100, 150) को केंद्रित करके बनाया गया है। 100 पिक्सेल त्रिज्या वाला एक अन्य वृत्ताकार प्रतीक बिंदु B (250, 230) को केंद्रित करके बनाया गया है। पता लगाइए—

(i) क्या किसी भी वृत्त का कोई भाग दृश्यपटल (स्क्रीन) से बाहर स्थित है?

(ii) क्या दोनों वृत्त एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं?

16. कार्तीय तल पर बिंदु A(2, 1), B(–1, 2), C(–2, –1) और D(1, –2) का अंकन कीजिए। क्या ABCD एक वर्ग है? क्या आप व्याख्या कर सकते हैं कि ऐसा क्यों है? इस वर्ग का क्षेत्रफल क्या है?

सारांश

- किसी बिंदु या वस्तु की स्थिति को एक समतल में निर्धारित करने के लिए हमें दो लंबवत रेखाओं की आवश्यकता होती है। उनमें से एक ऊर्ध्व और अन्य क्षैतिज होती है।
- समतल को **कार्तीय तल**, **निर्देशांक तल** अथवा **xy-तल** कहते हैं और रेखाएँ निर्देशांक अक्ष कहलाती हैं।
- क्षैतिज रेखा **x-अक्ष** और ऊर्ध्व रेखा **y-अक्ष** कहलाती हैं।
- निर्देशांक-अक्ष, तल को चार भागों में विभाजित करते हैं, जिन्हें **चतुर्थांश** कहा जाता है।
- अक्षों का प्रतिच्छेद बिंदु **मूलबिंदु** कहलाता है।
- y-अक्ष से किसी बिंदु की दूरी इसका **x-निर्देशांक** है और x-अक्ष से बिंदु की दूरी इसका **y-निर्देशांक** है। यदि किसी बिंदु का x-निर्देशांक x है और **y-निर्देशांक** y है तो (x, y) बिंदु के **निर्देशांक** कहलाते हैं।

© NCERT not to be republished

- x-अक्ष पर किसी भी बिंदु के निर्देशांक $(x, 0)$ के रूप में होते हैं और y-अक्ष पर बिंदु $(0, y)$ के रूप में होते हैं।
- मूलबिंदु के निर्देशांक (0, 0) होते हैं।
- किसी बिंदु के निर्देशांक प्रथम चतुर्थांश में (+, +), द्वितीय चतुर्थांश में (–, +), तृतीय चतुर्थांश में (–, –) और चतुर्थ चतुर्थांश में (+, –) के रूप में होते हैं।
- यदि $x = y$ हो तो $(x, y) = (y, x)$ होगा। यदि $x \neq y$ हो तब $(x, y) \neq (y, x)$ होगा।
- बिंदुओं (x_1, y) और (x_2, y) के मध्य की दूरी, x_1 व x_2 के मध्य अंतर का निरपेक्ष मान $|x_2 - x_1|$ होती है।
- बिंदुओं (x, y_1) और (x, y_2) के मध्य की दूरी, y_1 व y_2 के मध्य अंतर का निरपेक्ष मान $|y_2 - y_1|$ होती है।
- बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार, बिंदुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) के मध्य की दूरी $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ है।

© NCERT not to be republished