2 रैखिक बहुपदों का परिचय

0820CH02

2.1 भूमिका

हम विगत कक्षाओं में बीजीय व्यंजकों के विषय में पढ़ चुके हैं। इस अध्याय में, हम बीजीय व्यंजकों के एक विशेष प्रकार के बारे में पढ़ेंगे, जिन्हें **रैखिक बहुपद** कहते हैं। आइए, सर्वप्रथम हम बीजीय व्यंजकों के कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं।

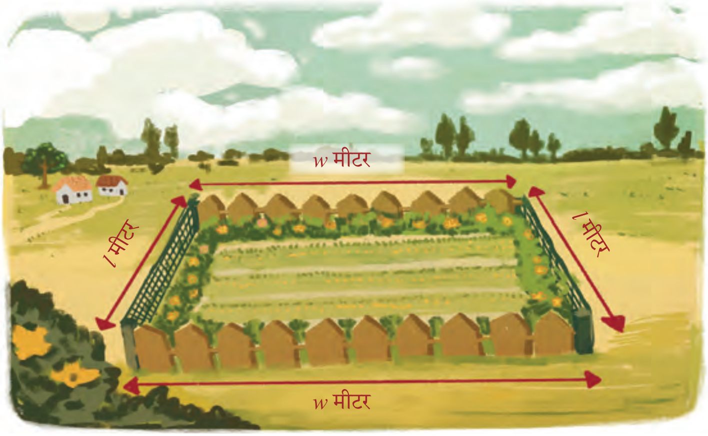
उदाहरण 1 — राजू एक दुकान पर गया, जहाँ विभिन्न रंगों के सीलबंद बक्से विक्रय के लिए रखे हुए थे। दुकानदार ने राजू से कहा कि प्रत्येक लाल बक्से में 4 पेन रखे हैं और प्रत्येक नीले बक्से में 5 पेंसिलें रखी हैं। अब यदि राजू x लाल बक्से और y नीले बक्से क्रय करता है तो वह पेन व पेंसिलों की कुल संख्या को शीघ्रता से कैसे ज्ञात कर सकता है? इसके अतिरिक्त, यदि वह 3 अतिरिक्त पेन नि:शुल्क प्राप्त करता है तो उसके पास कुल कितने पेन और पेंसिलें होंगी?

चित्र 2.1

ध्यान दीजिए कि x लाल बक्सों में $4x$ पेन होंगे और y नीले बक्सों में $5y$ पेंसिलें होंगी। इसके अतिरिक्त उसने 3 पेन नि:शुल्क प्राप्त किए। इस प्रकार पेन और पेंसिल की कुल संख्या को बीजीय व्यंजक $4x + 5y + 3$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। इस उदाहरण में $4x$, $5y$ और 3 व्यंजक के **पद** हैं, x और y अक्षर-संख्याएँ हैं, संख्याएँ 4 व 5 क्रमश: x और y के **गुणांक** हैं तथा 3 एक **अचर** है। अब से हम अक्षर-संख्याओं के लिए व्यापक रूप से उपयोग में लाए जाने वाले वैकल्पिक शब्द **चर** का उपयोग करेंगे। इस प्रकार, $4x + 5y + 3$ व्यंजक में उपयोग हुए चर x और y हैं।

उदाहरण 2 — l मीटर लंबाई और w मीटर चौड़ाई वाले आयताकार उद्यान की बाड़ लगाई जानी है और उसकी सजावट की जानी है। इसमें तार की बाड़, लंबाई के अनुदिश ₹100 प्रति मीटर की दर से लगाई जानी है और लकड़ी की बाड़, चौड़ाई के अनुदिश ₹80 प्रति मीटर की दर से लगाई जानी है। संपूर्ण उद्यान में विशेष बीज भी बोए जाने हैं, जिसमें ₹50 प्रति वर्ग मीटर की दर से व्यय होगा।

© NCERT not to be republished



चित्र 2.2

इस कार्य की कुल लागत क्या होगी?

उद्यान की लंबाई के अनुदिश तार की बाड़ लगाने की लागत = $2l \times 100$ = ₹$200l$

उद्यान की चौड़ाई के अनुदिश लकड़ी की बाड़ लगाने की लागत = $2w \times 80$ = ₹$160w$

संपूर्ण उद्यान में बीज बोने की लागत (क्षेत्रफल पर आधारित) = $50 \times l \times w$ = ₹$50lw$

कुल लागत = ₹($200l + 160w + 50lw$)

इस प्रकार, कुल लागत के लिए बीजीय व्यंजक $200l + 160w + 50lw$ है।

सोचिए और विचार कीजिए

1. क्या आप ऊपर दिए गए बीजीय व्यंजक में पदों, चरों और गुणांकों की पहचान कर सकते हैं?
2. उदाहरण 1 में दिए गए बीजीय व्यंजक से यह किस प्रकार भिन्न हैं?

उदाहरण 3 — 20 सेंटीमीटर लंबे तार को आयत बनाने के लिए विभिन्न प्रकार से मोड़ा गया है। उदाहरण के लिए, हम 7 सेंटीमीटर लंबा और 3 सेंटीमीटर चौड़ा आयत बना सकते हैं। हम 5.5 सेंटीमीटर लंबा और 4.5 सेंटीमीटर चौड़ा आयत भी बना सकते हैं (इस प्रकार के आयत बनाने की कुछ अन्य विधियों पर विचार कीजिए)। क्या आप ऐसे आयतों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए व्यंजक लिख सकते हैं?

यदि किसी आयत की लंबाई x सेंटीमीटर है तो चौड़ाई $(10 - x)$ सेंटीमीटर होगी। इन आयतों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए व्यंजक $x(10 - x)$ अथवा $10x - x^2$ है।

सोचिए और विचार कीजिए

1. क्या आप ऊपर दिए गए बीजीय व्यंजक में पदों, चरों और गुणांकों की पहचान कर सकते हैं?
2. क्या आप उदाहरण 1 और 3 के मध्य समानता या असमानता बता सकते हैं?

© NCERT not to be republished

ध्यान दीजिए कि उदाहरण 1 और उदाहरण 2 के बीजीय व्यंजकों में दो चर हैं, जबकि उदाहरण 3 के बीजीय व्यंजक में केवल एक चर है।

व्यंजक जैसे $4x$, $x^2 + 1$, $2y - 5$, $5y^3 + y^2 + 2y - 1$, $3z + 7$ ऐसे बीजीय व्यंजक हैं जिनमें केवल एक चर (x, y या z) है। इस अध्याय में हम अपनी चर्चा को केवल एक चर वाले बीजीय व्यंजकों तक ही सीमित रखेंगे। आपने ध्यान दिया होगा कि व्यंजक में चर की घातें भी विद्यमान होती हैं। उदाहरण के लिए व्यंजक $x^2 + 5x + 1$ में x की अधिकतम घात 2 है। व्यंजक $5y^3 + y^2 - 8$ में चर y की अधिकतम घात 3 है। साथ ही व्यंजक $5y^3 + y^2 + 2y - 1$ में y^3 का गुणांक 5 है, y^2 का गुणांक 1 है, y का गुणांक 2 है और अचर पद –1 है। ऐसे बीजीय व्यंजक जिनमें केवल एक चर और उसकी घातें होती हैं, उन्हें **एक चर बहुपद**, **एकचरीय बहुपद** या संदर्भ स्पष्ट हो तो केवल **बहुपद** भी कहते हैं। किसी बहुपद में चर का अधिकतम घातांक, उसकी **घात** कहलाती है।

इस प्रकार—

(i) $5y^3 + y^2 + 2y - 1$, घात 3 का बहुपद है। ऐसे बहुपद **त्रिघाती बहुपद** कहलाते हैं।

(ii) $x^2 + 5x + 1$, घात 2 का बहुपद है। ऐसे बहुपद **द्विघाती बहुपद** कहलाते हैं।

(iii) $3z + 7$, घात 1 का बहुपद है। ऐसे बहुपद **रैखिक बहुपद** कहलाते हैं।

(iv) अचर 8, घात 0 का बहुपद है, क्योंकि इसे $8x^0$ के रूप में लिखा जा सकता है जिसमें चर x की घात 0 है। ऐसे बहुपद **अचर बहुपद** कहलाते हैं।

प्रश्नावली 2.1

1. नीचे दिए गए बहुपदों की घातें ज्ञात कीजिए—

   (i) $2x^2 - 5x + 3$

   (ii) $y^3 + 2y - 1$

   (iii) -9

   (iv) $4z - 3$

2. घात 1, 2 और 3 के बहुपद लिखिए।

3. बहुपद $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 2x + 7$ में x^2 और x^3 के गुणांक क्या हैं?

4. बहुपद $4z^3 + 5z^2 - 11$ में z का गुणांक क्या है?

5. बहुपद $9x^3 + 5x^2 - 8x - 10$ में अचर पद क्या है?

© NCERT not to be republished

स्मरण कीजिए कि घात 1 वाले बहुपद **रैखिक बहुपद** कहलाते हैं। इस अध्याय में हम **रैखिक बहुपदों** का अध्ययन करेंगे।

2.2 रैखिक बहुपद

हम रैखिक बहुपदों वाले कुछ उदाहरणों के साथ प्रारंभ करते हैं।

उदाहरण 4 — भुजा x वाले एक वर्ग का परिमाप $4x$ है जो चर x का एक रैखिक बहुपद है।

सोचिए और विचार कीजिए

1 सेंटीमीटर, 1.5 सेंटीमीटर, 2 सेंटीमीटर, 2.5 सेंटीमीटर और 3 सेंटीमीटर भुजाओं वाले वर्गों के परिमाप ज्ञात कीजिए। यदि भुजाओं की लंबाई 0.5 सेंटीमीटर बढ़ा दी जाए तो परिमाप पर इसका क्या प्रभाव होगा?

उदाहरण 5 — एक शतरंज क्लब प्रत्येक मैच के लिए ₹200 प्रवेश शुल्क और खेले गए प्रत्येक मैच के लिए ₹50 का शुल्क लेता है। नीचे दी गई तालिका में खेले गए मैचों की संख्याओं के साथ खिलाड़ी द्वारा दिए गए शुल्क को प्रदर्शित किया गया है —

खेले गए मैचों की संख्या	1	2	3	4	5	...	m
भुगतान की गई राशि (₹)	250	300	350	400	450	...	200 + 50m

इस प्रकार, यदि m खेले गए मैचों की संख्या हो तो कुल राशि ₹$(200 + 50m)$ होगी। ध्यान दीजिए कि चर m का एक रैखिक बहुपद $200 + 50m$ है। प्रत्येक अतिरिक्त खेले गए मैच के लिए इस राशि का अचर मान ₹50 से बढ़ता जाता है।

सोचिए और विचार कीजिए

यदि किसी खिलाड़ी ने ₹750 दिए हों तो उसने कितने मैच खेले होंगे?

ऊपर दिए गए उदाहरणों में रैखिक बहुपदों का एक विशेष गुण ज्ञात होता है कि पूर्णांकों के दो क्रमिक मानों का अंतर अचर है। उदाहरण 4 में, प्रत्येक बार वर्ग की भुजा की लंबाई में 0.5 सेंटीमीटर की वृद्धि होने पर परिमाप में 2 सेंटीमीटर की वृद्धि होती है। इसी प्रकार, उदाहरण 5 में प्रत्येक अतिरिक्त मैच खेलने के लिए खिलाड़ी के शुल्क में ₹50 की वृद्धि होती है। ऐसे प्रतिरूप **रैखिक प्रतिरूप** कहलाते हैं।

जब हम एक चर में किसी रैखिक बहुपद को एक अचर के समीकृत करते हैं तो **रैखिक समीकरण** प्राप्त होता है।

© NCERT not to be republished

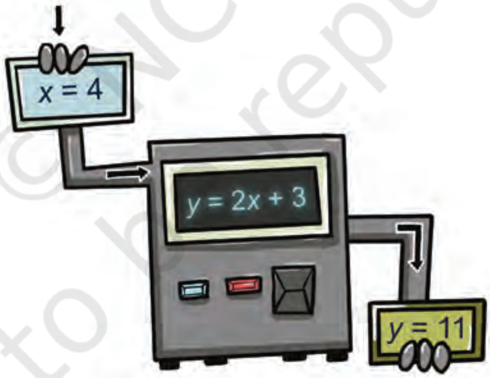
उदाहरण 6 — दो संख्याओं का योगफल 64 है। उनमें से एक संख्या दूसरी संख्या से 10 अधिक है। दोनों संख्याएँ क्या हैं?

मान लीजिए कि दोनों संख्याओं में से छोटी संख्या x है। तब अवश्य ही बड़ी संख्या $x + 10$ होगी। चूँकि दोनों संख्याओं का योगफल 64 है, अत: रैखिक समीकरण $x + (x + 10) = 64$ होगा। इस प्रकार $2x + 10 = 64$ होगा। ध्यान दीजिए कि $2x + 10$ एक रैखिक बहुपद है। इसे 64 के समीकृत करने पर हमें रैखिक समीकरण $2x + 10 = 64$ प्राप्त होता है जिसे हल करने पर $2x = 54$ अथवा $x = 27$ प्राप्त होता है। अत: संख्याएँ 27 और 37 होंगी।

बहुपदों पर आगत-निर्गत (इनपुट-आउटपुट) विधियों से भी विचार किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, रैखिक बहुपद $2x + 3$ पर विचार कीजिए। x के प्रत्येक मान के लिए बहुपद $2x + 3$ का एक संगत मान है। उदाहरण के लिए यदि $x = 4$ हो तो व्यंजक में x को 4 से प्रतिस्थापित करने पर हमें $2 \times 4 + 3 = 11$ प्राप्त होता है।

यदि $x = -6$ हो तो व्यंजक में x को -6 से प्रतिस्थापित करने पर $2 \times (-6) + 3 = -9$ प्राप्त होता है।

चित्र 2.3 में इस प्रक्रिया को आगत-निर्गत (इनपुट-आउटपुट) मशीन के रूप में दर्शाया गया है जहाँ x का मान आगत अर्थात इनपुट है और $2x + 3$ का मान निर्गत अर्थात आउटपुट है। इस विधि को **फलन** (फंक्शन) कहा जा सकता है जहाँ व्यंजक $2x + 3$, चर x का एक फलन है। आप फलन के विषय में और अधिक अध्ययन आगामी कक्षाओं में करेंगे।



चित्र 2.3 — आगत-निर्गत विधि के रूप में रैखिक व्यंजक

सोचिए और विचार कीजिए

हम सीख चुके हैं कि किसी बीजीय व्यंजक का मान ज्ञात करने के लिए दिए गए व्यंजक में चर का कोई मान प्रतिस्थापित करते हैं। उदाहरण 3 पर विचार कीजिए, जिसमें तार को मोड़कर एक आयत बनाया गया है। यहाँ आयत का क्षेत्रफल $10x - x^2$, x का एक फलन है। क्या आप इसकी व्याख्या एक आगत-निर्गत विधि के रूप में कर सकते हैं? यदि $x = 6$ सेंटीमीटर हो तो व्यंजक का मान क्या होगा?

ध्यान दीजिए कि $2x + 3$ एक रैखिक फलन है जबकि $10x + x^2$ एक द्विघाती फलन है।

प्रश्नावली 2.2

1. रैखिक बहुपद $5x - 3$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि—

   (i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. द्विघाती बहुपद $7s^2 - 4s + 6$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि—

   (i) $s = 0$ (ii) $s = -3$ (iii) $s = 4$

3. सलिल की माँ की वर्तमान आयु सलिल की वर्तमान आयु से तीन गुना है। 5 वर्ष के पश्चात दोनों की आयु का योगफल 70 वर्ष होगा। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

4. दो धनात्मक पूर्णांकों का अंतर 63 है। दोनों पूर्णांकों का अनुपात 2:5 है। दोनों पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

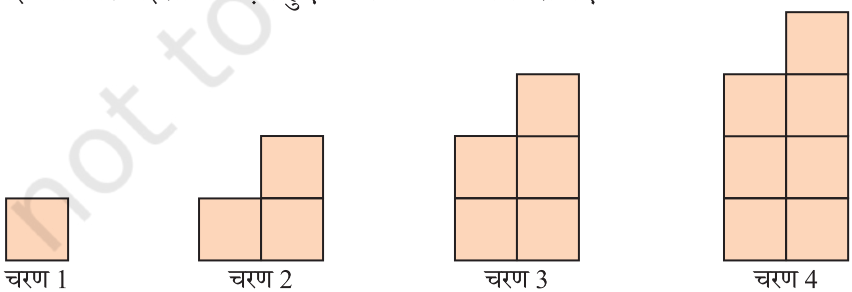
5. रूबी के पास दो रुपये के सिक्कों की संख्या, पाँच रुपये के सिक्कों की संख्या से तीन गुना है। यदि उसके पास कुल ₹88 हैं तो दोनों प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए।

6. एक किसान 300 फुट लंबी बाड़ को भिन्न-भिन्न आकार के दो टुकड़ों में काटता है। लंबा टुकड़ा छोटे टुकड़े से चार गुना लंबा है। दोनों टुकड़ों की लंबाई क्या होगी?

7. यदि एक आयत की लंबाई उसकी चौड़ाई के दुगुने से तीन अधिक हो और उसका परिमाप 24 सेंटीमीटर हो तो आयत की विमाएँ (लंबाई और चौड़ाई) क्या होंगी?

2.3 रैखिक प्रतिरूपों का अन्वेषण

नीचे दी गई वर्गाकार टाइलों के बढ़ते हुए प्रतिरूप को ध्यान से देखिए—



चित्र 2.4— वर्गाकार टाइलों का बढ़ता हुआ प्रतिरूप

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

प्रतिरूप के अगले तीन चरणों में वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगाइए और प्रतिरूप के सातवें चरण तक वर्गों की संख्या का अनुक्रम लिखिए।

प्रत्येक चरण, पिछले चरण में दो टाइलों को जोड़कर प्राप्त किया गया है। नीचे दी गई तालिका आरंभिक सात चरणों तक टाइलों की संख्या दर्शाती है—

चरण	1	2	3	4	5	6	7
वर्गाकार टाइलों की संख्या	1	3	5	7	9	11	13

इस प्रतिरूप का व्यापकीकरण करने पर हम देखते हैं कि प्रत्येक चरण में वर्गों की संख्या, चरण की संख्या के दोगुनी से एक कम है। उदाहरण के लिए, चरण 2 में वर्गों की संख्या $2 \times 2 - 1 = 3$ है। चरण 5 में वर्गों की संख्या $2 \times 5 - 1 = 9$ है और आगे भी वर्गों की संख्या इसी प्रकार है।

इससे हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि nवें चरण में वर्गों की संख्या $2n - 1$ से प्रदर्शित की जा सकती है। बहुपद $2n - 1$ की घात 1 है। अत: यह एक रैखिक बहुपद का उदाहरण है। इसके अतिरिक्त, वर्गों की संख्याओं के अनुक्रम 1, 3, 5, 7, 9, … में क्रमानुगत पदों में अंतर, अचर मान 2 है। इस प्रकार, प्रत्येक चरण के साथ वर्गों की संख्या में 2 की वृद्धि होती है। चरण-संख्या और वर्गाकार टाइलों की संख्या के मध्य संबंध एक **रैखिक संबंध** है।

सोचिए और विचार कीजिए

व्यंजक $2n - 1$ का उपयोग करके क्या आप बता सकते हैं कि प्रतिरूप के 15वें चरण और 26वें चरण में टाइलों की संख्या कितनी होगी? साथ ही यह भी बताइए कि किस चरण में टाइलों की संख्या 21 और 47 होगी?

उदाहरण 7— बेला के पास जेब खर्च के लिए ₹100 हैं। वह प्रतिदिन ₹5 खर्च करती है। कितने दिनों के पश्चात उसके पास ₹40 शेष बचेंगे?

दिन की संख्या	0	1	2	3	4
शेष राशि (₹)	100	$100 - 1 \times 5 = 95$	$100 - 2 \times 5 = 90$	$100 - 3 \times 5 = 85$	$100 - 4 \times 5 = 80$

© NCERT not to be republished

ध्यान दीजिए कि nवें दिन शेष राशि ₹$(100 - 5n)$ होगी। अत: 12वें दिन शेष राशि ₹ $(100 - 12 \times 5) =$ ₹40 होगी।

सोचिए और विचार कीजिए

बेला के पास 15वें दिन कितनी राशि शेष बचेगी? संपूर्ण राशि खर्च होने में कितने दिन लगेंगे?

उदाहरण 8 — एक ऑटो-रिक्शा का किराया ₹25 से प्रारंभ होता है और प्रारंभिक दो किलोमीटर के लिए यही किराया रहता है। उसके पश्चात इस किराए में ₹15 प्रति किलोमीटर की वृद्धि होती है। 10 किलोमीटर की यात्रा के लिए कितना किराया होगा?

प्रारंभिक दो किलोमीटर के लिए किराया ₹25 है। उसके पश्चात प्रति किलोमीटर के लिए किराए में ₹15 की वृद्धि होती है। इस प्रकार 10 किलोमीटर की यात्रा के लिए कुल किराया ₹$25 + 15 \times 8 =$ ₹145 होगा।

तय की गई दूरी (किलोमीटर में)	1	2	3	4	5	6
किराया (₹)	25	25	$25 + 1 \times 15 = 40$	$25 + 2 \times 15 = 55$	$25 + 3 \times 15 = 70$	$25 + 4 \times 15 = 85$

ध्यान दीजिए कि n किलोमीटर की यात्रा के लिए कुल किराया ₹$25 + 15 \times (n - 2) = 15n - 5$ है, जब $n \geq 2$, हो। यहाँ तय की गई किसी दूरी के लिए किराया, दूरी n किलोमीटर का फलन है।

सोचिए और विचार कीजिए

कितने किलोमीटर यात्रा के लिए ₹ 130 किराया होगा?

ध्यान दीजिए कि ऊपर दिए गए सभी उदाहरणों में nवाँ पद, चर n में एक रैखिक व्यंजक है। एक **रैखिक प्रतिरूप** संख्याओं का एक अनुक्रम है जहाँ दो क्रमागत पदों के मध्य अंतर अचर है। अनुक्रमों और श्रेढ़ियों के अध्याय में हम रैखिक प्रतिरूपों के विषय में और अधिक अध्ययन करेंगे।

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 2.3

नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए—

1. एक विद्यार्थी के बचत बैंक खाते में ₹500 हैं। उसे ₹150 प्रतिमाह जेब खर्च के रूप में मिलते हैं। दूसरे महीने से लेकर प्रत्येक महीने के अंत में उसके खाते में कितनी धनराशि होगी? n वें महीने में उसके खाते में जमा धनराशि को दर्शाने के लिए रैखिक व्यंजक ज्ञात कीजिए।

2. एक रैली 120 सदस्यों के साथ प्रारंभ होती है। प्रत्येक घंटे के पश्चात 9 सदस्य समूह से बाहर हो जाते हैं। 1, 2, 3, … घंटे के पश्चात कितने सदस्य रैली में बने रहेंगे? nवें घंटे के अंत में शेष सदस्यों की संख्या ज्ञात करने के लिए रैखिक व्यंजक ज्ञात कीजिए।
3. मान लीजिए कि एक आयत की लंबाई 13 सेंटीमीटर है। आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि उसकी चौड़ाई— (i) 12 सेंटीमीटर (ii) 10 सेंटीमीटर (iii) 8 सेंटीमीटर हो। आयत के क्षेत्रफल को दर्शाने वाले रैखिक प्रतिरूप को भी ज्ञात कीजिए।
4. मान लीजिए कि एक आयताकार बक्से की लंबाई 7 सेंटीमीटर है और उसकी चौड़ाई 11 सेंटीमीटर है। बक्से का आयतन ज्ञात कीजिए, यदि उसकी ऊँचाई— (i) 5 सेंटीमीटर (ii) 9 सेंटीमीटर (iii) 13 सेंटीमीटर हो। आयताकार बक्से के आयतन को दर्शाने वाले रैखिक प्रतिरूप को ज्ञात कीजिए।
5. सरिता 500 पृष्ठों वाली एक पुस्तक पढ़ रही है। वह प्रतिदिन 20 पृष्ठ पढ़ती है। 15 दिनों के पश्चात कितने पृष्ठ पढ़ने शेष रह जाएँगे। इसे एक रैखिक प्रतिरूप के माध्यम से दर्शाइए।

2.4 रैखिक वृद्धि और रैखिक ह्रास

रैखिक व्यंजक उन परिस्थितियों या परिघटनाओं को प्रदर्शित करने में सहायता करते हैं जहाँ वृद्धि या ह्रास होता है। नीचे दिए गए उदाहरणों पर विचार कीजिए—

उदाहरण 9 — किसी यात्रा का व्यय रैखिक फलन $C(d) = 100 + 60d$ द्वारा दर्शाया गया है। जहाँ C कुल व्यय (रुपयों में) दर्शाता है और d तय की गई दूरी किलोमीटर में दर्शाता है। आइए d के 0 से 10 किलोमीटर तक मानों के लिए एक तालिका बनाकर दर्शाएँ कि प्रत्येक किलोमीटर के लिए व्यय में किस प्रकार वृद्धि होती है—

तय की गई दूरी, d (किलोमीटर)	0	1	2	3	4	5
व्यय (₹)	100	160	220	280	340	400

इस उदाहरण में d के मान में एक किलोमीटर की वृद्धि होने पर व्यय फलन C के मान में एक निश्चित धनराशि ₹60 की वृद्धि होती है। यह **रैखिक वृद्धि** का एक उदाहरण है।

सोचिए और विचार कीजिए

15 किलोमीटर दूरी की यात्रा का व्यय कितना होगा? कितने किलोमीटर दूरी की यात्रा का व्यय ₹700 होगा?

उदाहरण 10 — ग्रीष्म ऋतु के प्रारंभ में एक बेलनाकार टंकी में पानी की ऊँचाई 3 मीटर है। t महीनों के अंत में पानी की ऊँचाई h मीटर को रैखिक फलन $h(t) = 3 - 0.5t$ द्वारा दर्शाया जाता है।

© NCERT not to be republished

महीना (t)	0	1	2	3	4
ऊँचाई, h (मी.)	3	2.5	2	1.5	1

उपर्युक्त उदाहरण में चूँकि t के मान में एक निश्चित संख्या (एक महीना) की वृद्धि होती है, अत: ऊँचाई h के मान में एक निश्चित संख्या (0.5) का ह्रास होता है। इस प्रकार, यह उदाहरण **रैखिक ह्रास** को दर्शाता है।

सोचिए और विचार कीजिए

5 माह के अंत में टंकी में पानी की ऊँचाई क्या होगी?

रैखिक वृद्धि उस रैखिक प्रतिरूप को दर्शाती है जिसमें कोई राशि समान अंतरालों के साथ अचर मान से बढ़ती है। इसी प्रकार, रैखिक ह्रास उस रैखिक प्रतिरूप को दर्शाता है जिसमें कोई राशि समान अंतरालों के साथ अचर मान से घटती है।

प्रश्नावली 2.4

1. मान लीजिए कि एक पौधे की ऊँचाई 1.75 फुट है और इसमें प्रतिमाह 0.5 फुट की वृद्धि होती है।
   - (i) 7 महीनों के पश्चात पौधे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
   - (ii) t के 0 से 10 महीनों तक के परिवर्ती मानों के लिए एक तालिका बनाइए और दर्शाइए कि कैसे ऊँचाई h के मान में प्रतिमाह वृद्धि होती है।
   - (iii) एक व्यंजक ज्ञात कीजिए जो h और t में संबंध व्यक्त करता है और यह भी समझाइए कि यह व्यंजक रैखिक वृद्धि को क्यों व्यक्त करता है।
2. एक मोबाइल फोन ₹10,000 में क्रय किया गया। इसके मूल्य में प्रतिवर्ष ₹800 का ह्रास होता है।
   - (i) 3 वर्षों के पश्चात फोन का मूल्य ज्ञात कीजिए।
   - (ii) t के 0 से 8 वर्षों तक के परिवर्ती मानों के लिए एक तालिका बनाइए और दर्शाइए कि किस प्रकार फोन का मूल्य समय के साथ कम होता है।
   - (iii) एक व्यंजक ज्ञात कीजिए, जो v और t में संबंध व्यक्त करता है और यह भी समझाइए कि यह रैखिक ह्रास को क्यों व्यक्त करता है।
3. एक गाँव की प्रारंभिक जनसंख्या 750 है। प्रतिवर्ष 50 व्यक्ति समीपस्थ शहर से गाँव में विस्थापित होते हैं।
   - (i) 6 वर्षों के पश्चात गाँव की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।
   - (ii) t के 0 से 10 वर्षों तक के परिवर्ती मानों के लिए एक तालिका बनाइए और दर्शाइए कि कैसे जनसंख्या P के मान में प्रतिवर्ष वृद्धि होती है।

© NCERT not to be republished

(iii) एक व्यंजक ज्ञात कीजिए जो P और t में संबंध व्यक्त करता है और यह भी समझाइए कि यह व्यंजक रैखिक वृद्धि को क्यों व्यक्त करता है।

4. एक दूरभाष कंपनी किसी विशेष रिचार्ज योजना के लिए ₹600 शुल्क लेती है। रिचार्ज के पश्चात अग्रिम जमा राशि में से प्रतिदिन ₹15 कम होते हैं।

   (i) एक समीकरण लिखिए, जो x दिनों तक योजना का उपयोग करने के पश्चात शेष धनराशि $b(x)$ को दर्शाता है।

   (ii) कितने दिनों के पश्चात यह शेष धनराशि (बैलेंस) समाप्त हो जाएगी?

   (iii) x के 1 से 10 दिनों के परिवर्ती मानों के लिए एक तालिका बनाइए और दर्शाइए कि कैसे शेष राशि $b(x)$ समय के साथ कम होती जाती है।

2.5 रैखिक संबंध

एक रैखिक संबंध, दो चरों x और y के मध्य संबंध दर्शाता है और इसे $y = ax + b$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

आइए, चित्र 2.4 में वर्गाकर टाइलों के बढ़ते प्रतिरूप पर पुनः विचार करें। यदि x पद की संख्या को व्यक्त करता है और y वर्गाकार टाइलों की संख्या को दर्शाता है तो x व y के मध्य रैखिक संबंध को $y = 2x - 1$ के रूप में दर्शाया जाता है।

कभी-कभी हमें दो राशियों के मध्य रैखिक संबंध को ज्ञात करने की आवश्यकता हो सकती है।

उदाहरण 11— एक टेलीकॉम कंपनी एक निश्चित मासिक शुल्क लेती है और इंटरनेट डेटा का उपयोग करने के लिए प्रति गीगा बाइट (जी.बी.) के लिए अतिरिक्त शुल्क लेती है। एक विद्यार्थी देखता है कि जब उसने 10 जी.बी. इंटरनेट डेटा का उपयोग किया तो उसका बिल ₹350 था और जब उसने 20 जी.बी. इंटरनेट डेटा का उपयोग किया तो उसका बिल ₹550 था। यदि मासिक बिल y, उपयोग किए गए डेटा की मात्रा x (जी.बी. में) पर निर्भर करता है तो संबंध $y = ax + b$ के अनुसार a और b के मान ज्ञात कीजिए।

ध्यान दीजिए कि x = जी.बी. में उपयोग किए गए इंटरनेट डेटा की मात्रा है और y = रुपये में कुल मासिक शुल्क है।

रैखिक संबंध $y = ax + b$ को ज्ञात करने के लिए हम देखते हैं कि जब $x = 10$ है तो $y = 350$ है। साथ ही जब $x = 20$ है तो $y = 550$ है। इन मानों को $y = ax + b$ में प्रतिस्थापित करने पर हमें नीचे दिए गए समीकरण प्राप्त होते हैं—

$$350 = 10a + b \text{ और } 550 = 20a + b$$

हम इन समीकरणों को इस प्रकार हल करते हैं— मान लीजिए $b = 350 - 10a$ (पहले समीकरण द्वारा)। इसे दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है—

$$550 = 20a + (350 - 10a)$$

इस प्रकार, $550 = 10a + 350$ या $10a = 200$ है। अत: $a = 20$ है। इससे हमें $b = 350 - 10a = 350 - 200 = 150$ प्राप्त होता है।

a और b के मानों को समीकरण $y = ax + b$ में प्रतिस्थापित करने पर हमें $y = 20x + 150$ प्राप्त होता है।

© NCERT not to be republished

इस प्रकार $y = 20x + 150$ उस रैखिक संबंध को दर्शाता है जहाँ y बिल की राशि (रुपयों में) और x उपयोग किए गए इंटरनेट डेटा की मात्रा (जी.बी. में) है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि समीकरण $y = 20x + 150$ में संख्याएँ 20 और 150 क्या दर्शाती हैं?

प्रश्नावली 2.5

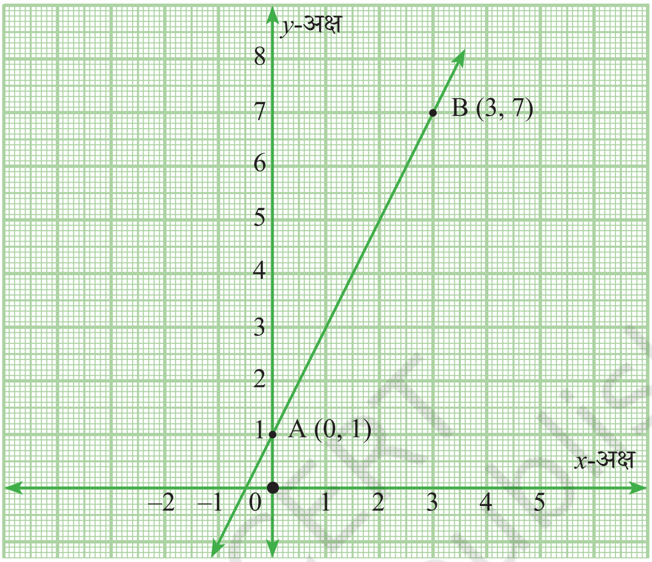
1. एक अधिगम मंच (लर्निंग प्लेटफार्म) एक निश्चित मासिक शुल्क लेता है और साथ ही प्रति डिजिटल अधिगम मॉड्यूल के लिए अतिरिक्त शुल्क लेता है। एक विद्यार्थी ध्यान देती है कि जब उसने 10 मॉड्यूल्स प्राप्त किए तो उसका बिल ₹400 था और जब उसने 14 मॉड्यूल प्राप्त किए तो उसका बिल ₹500 था। यदि मासिक बिल y, प्राप्त किए गए मॉड्यूल की संख्या x पर निर्भर करता है तो संबंध $y = ax + b$ के अनुसार a और b के मान ज्ञात कीजिए।
2. एक व्यायामशाला (जिम) एक निश्चित मासिक शुल्क और प्रति घंटा बैंडमिंटन कोर्ट का उपयोग करने के लिए अतिरिक्त शुल्क लेती है। जिम जाने वाली एक विद्यार्थी ध्यान देती है कि जब उसने 10 घंटे के लिए बैडमिंटन कोर्ट का उपयोग किया तो उसका बिल ₹800 था और जब उसने बैडमिंटन कोर्ट का उपयोग 15 घंटे के लिए किया तो उसका बिल ₹1100 था। यदि मासिक बिल y, बैडमिंटन कोर्ट उपयोग करने के घंटों x पर निर्भर करता है तो संबंध $y = ax + b$ के अनुसार a और b के मान ज्ञात कीजिए।
3. डिग्री सेल्सियस (°C) और डिग्री फॉरेनहाइट (°F) में मापे गए तापमान के मध्य संबंध पर $°C = a°F + b$ के अनुसार विचार कीजिए। दिया गया है कि बर्फ 0 डिग्री सेल्सियस और 32 डिग्री फॉरेनहाइट पर पिघलती है और पानी 100 डिग्री सेल्सियस और 212 डिग्री फॉरेनहाइट पर उबलता है तो a व b के मान ज्ञात कीजिए।
   (**संकेत** — जब $°C = 0$ तो $°F = 32$ और जब $°C=100$ तो $°F = 212$ है। इस जानकारी का उपयोग करके a व b के मान तथा °C व °F के मध्य रैखिक संबंध ज्ञात कीजिए।)

2.6 रैखिक संबंधों का दृश्यांकन

जैसा कि हम इस अध्याय के कई उदाहरणों में देख चुके हैं कि एक रैखिक प्रतिरूप या रैखिक संबंध को समीकरण $y = ax + b$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। अब हम ऐसे समीकरण को एक सरल रेखा के रूप में प्रदर्शित करना सीखेंगे।

आलेख पत्रक पर रैखिक समीकरण प्राप्त करने के लिए हमें रेखा पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं को पहचानने की आवश्यकता है। उदाहरण के लिए $y = 2x + 1$ को प्रदर्शित करने के लिए हम किन्हीं दो बिंदुओं का पता लगा सकते हैं—

जब $x = 0$ तो $y = 1$ होगा अतः (0, 1) रेखा पर स्थित एक बिंदु है। इसे हम बिंदु A कह सकते हैं। बिंदु A का x-निर्देशांक 0 है और y - निर्देशांक 1 है। साथ ही, जब $x = 3$ है तो $y = 7$ होगा। इस प्रकार B (3, 7) रेखा पर स्थित एक अन्य बिंदु है। हम इन बिंदुओं को निर्देशांक तल पर प्रदर्शित करते हैं, उन्हें मिलाते हैं और चित्र 2.5 में दर्शाए अनुसार रेखा का दोनों ओर विस्तार करते हैं।



चित्र 2.5 — सरल रेखा $y = 2x + 1$

सोचिए और विचार कीजिए

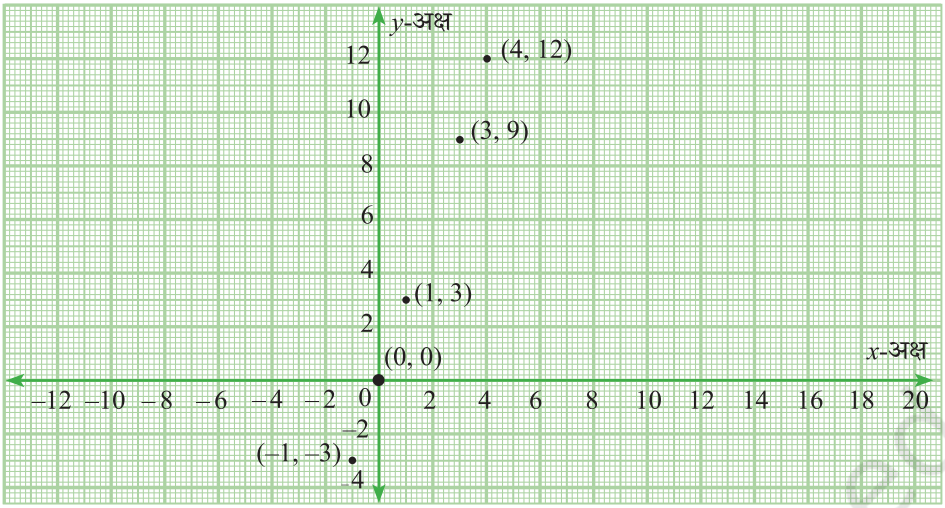
नीचे दी गई तालिका को पूर्ण करते हुए रेखा पर अन्य बिंदुओं का पता लगाइए।

x	1	2	5	7	9	12	20
y	3			15			

ध्यान दीजिए कि बिंदु (1, 3) और (7, 15) भी रेखा $y = 2x + 1$ पर स्थित हैं। इन बिंदुओं को रेखा पर प्रदर्शित कीजिए। इस कार्य के लिए आप एक आलेख-पत्रक (ग्राफ पेपर) का उपयोग कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि यदि कोई बिंदु किसी रेखा पर स्थित है तो इसके निर्देशांक रेखा के समीकरण को अवश्य ही संतुष्ट करेंगे। इस प्रकार $x = 7$ और $y = 15$ को समीकरण में प्रतिस्थापित करके हम जाँच सकते हैं कि बिंदु (7, 15), रेखा $y = 2x + 1$ पर स्थित है।

उदाहरण 12 — आइए, चित्र 2.6 में दर्शाए अनुसार एक आलेख-पत्रक पर निर्देशांक तल में बिंदुओं (–1, –3), (0, 0), (1, 3), (3, 9), (4, 12) को प्रदर्शित करते हैं। मापक (रूलर) का उपयोग करके बिंदुओं (–1, –3) और (4, 12) को मिलाइए। ऐसा करते समय ध्यान दीजिए कि सभी पाँच बिंदु एक सरल रेखा पर स्थित हैं। प्रत्येक बिंदु के x और y-निर्देशांकों के मध्य संबंध को देखकर क्या आप इस रेखा के समीकरण का अनुमान लगा सकते हैं?

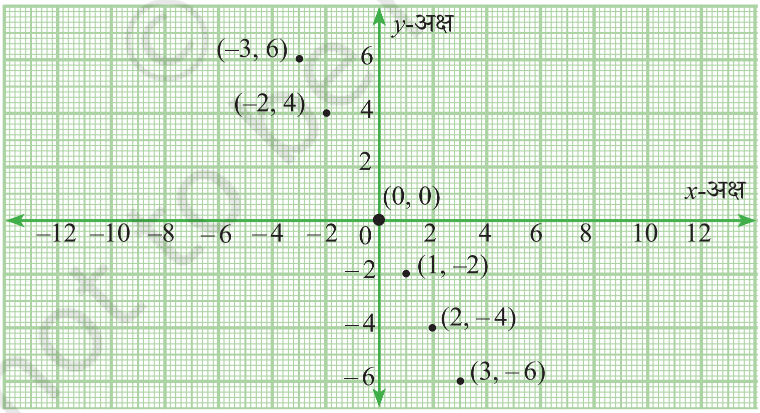
© NCERT not to be republished



चित्र 2.6

प्रत्येक बिंदु के लिए y-निर्देशांक का मान, x-निर्देशांक के मान का तीन गुना है। अतः हम कह सकते हैं कि समीकरण $y = 3x$ है।

उदाहरण 13 — आइए, चित्र 2.7 में दर्शाए अनुसार एक आलेख पत्रक पर निर्देशांक तल में बिंदुओं (–3, 6), (–2, 4), (0, 0), (1, –2), (2, –4), (3, –6) को प्रदर्शित करते हैं। मापक का उपयोग करके बिंदुओं (–3, 6) और (3, –6) को मिलाइए। ऐसा करते समय ध्यान दीजिए कि सभी पाँच बिंदु एक सरल रेखा पर स्थित हैं। प्रत्येक बिंदु के x और y-निर्देशांकों के मध्य संबंध को देखकर क्या आप इस रेखा के समीकरण का अनुमान लगा सकते हैं?

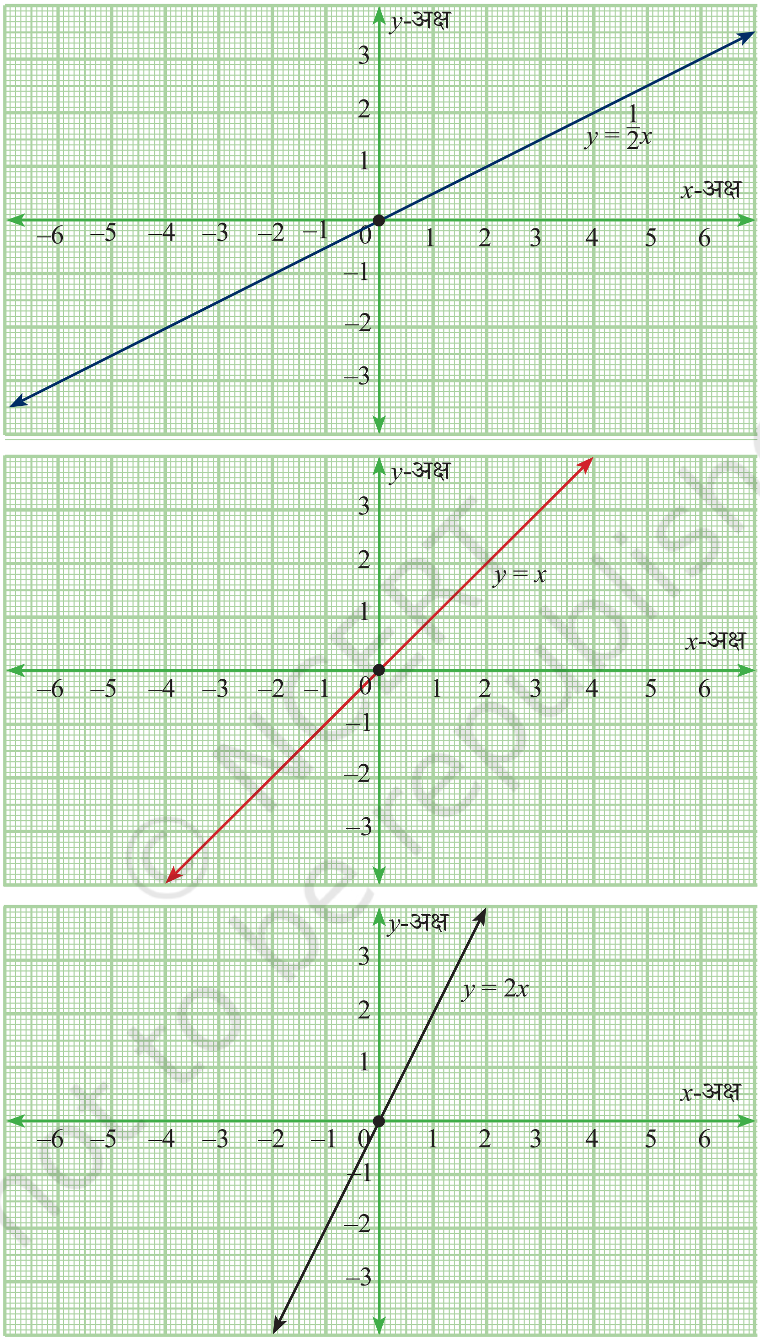


चित्र 2.7

उदाहरण 14 — रेखाओं पर उचित बिंदुओं का चयन करते हुए $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, $y = 2x$ का आलेख बनाइए।

(**संकेत** — $y = \frac{1}{2}x$ का आलेख बनाने के लिए हम बिंदु (0, 0) और (4, 2) ले सकते हैं। क्या आप जाँच सकते हैं कि ये बिंदु आलेख की रेखा पर स्थित हैं?)

चित्र 2.8 में बिंदुओं को दर्शाए बिना इन रैखिक समीकरणों के आलेख दर्शाए गए हैं।

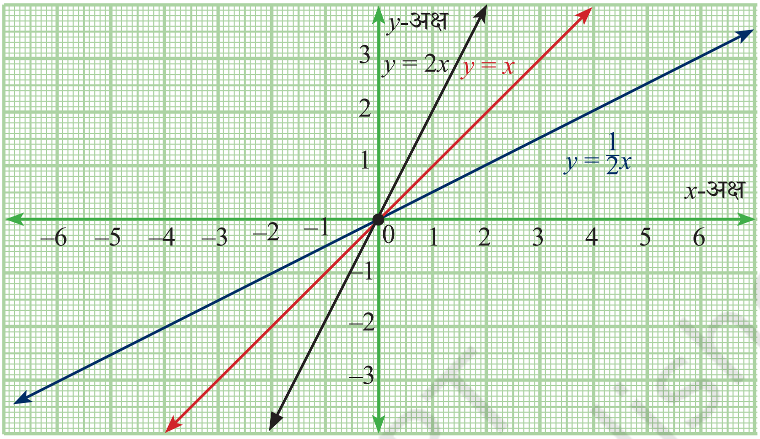


चित्र 2.8

© NCERT not to be republished

चित्र 2.9 में तीनों आलेख समान अक्ष पर दर्शाए गए हैं। क्या इससे आपको रैखिक समीकरण $y = ax$, जहाँ a का मान बदलने के साथ $a > 0$ है, के विषय में कोई निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है? क्या होता है जब $a > 1$ और जब $a < 1$ होता है?

(**संकेत** — आप समान अक्षों पर समीकरणों $y = 3x$ और $y = \frac{1}{3}x$ को प्रदर्शित कर सकते हैं।)



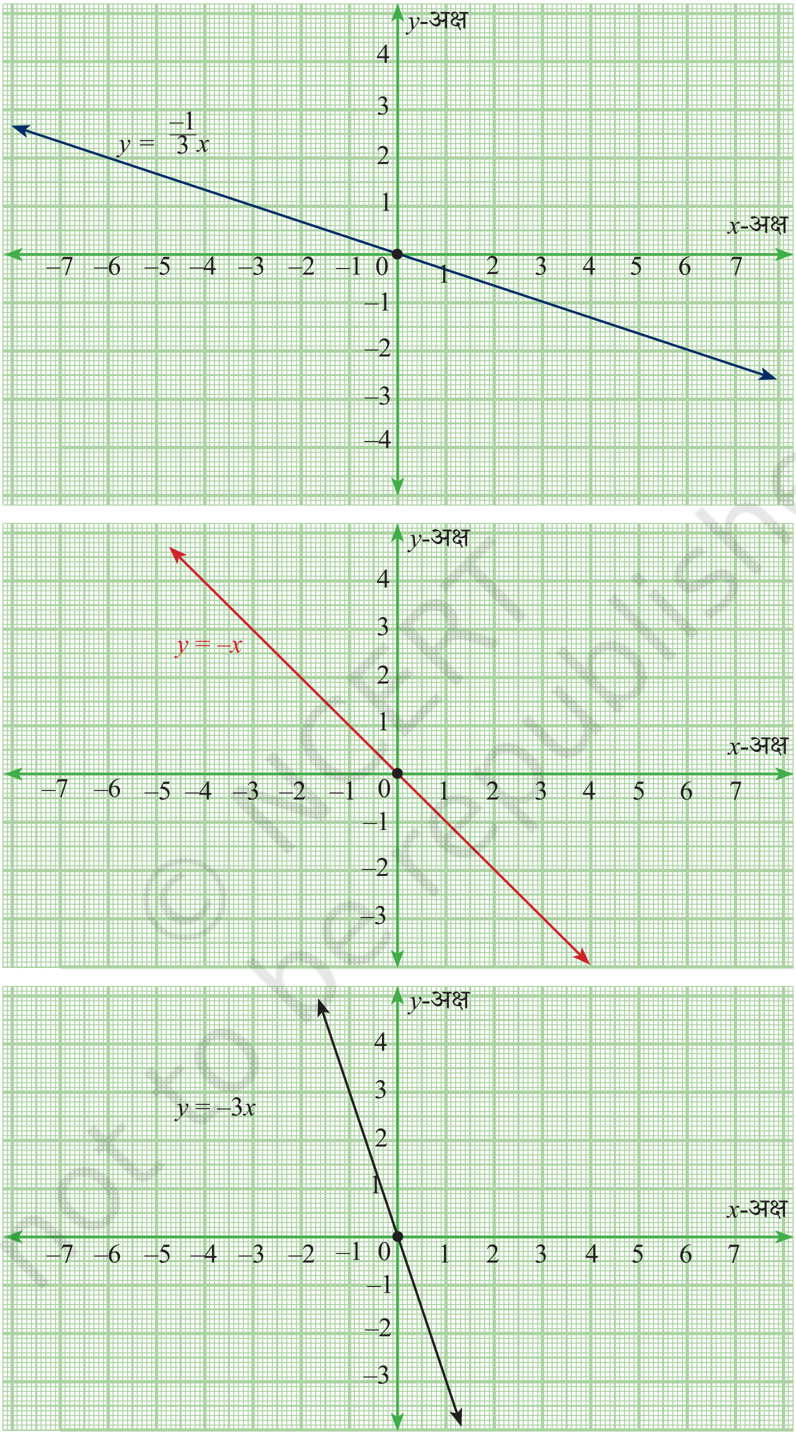
चित्र 2.9

सर्वप्रथम हम देखते हैं कि जो सरल रेखाएँ $y = ax$ के रूप में समीकरण को प्रदर्शित करती हैं, वे सदैव मूलबिंदु (0, 0) से होकर जाती हैं। इसके अतिरिक्त जब $a > 1$ है तब रेखा, $y = x$ रेखा की अपेक्षा अधिक ढलान वाली है जो दोनों अक्षों पर समान रूप से झुकी हुई है। यद्यपि जब $a < 1$ है तब रेखा, $y = x$ रेखा की अपेक्षा कम ढलान वाली है। वास्तव में a को रेखा $y = ax$ के ढलान के रूप में संदर्भित किया गया है। ढलान की अवधारणा के विषय में हम और अधिक अध्ययन रैखिक समीकरण के अध्याय में करेंगे।

अभी हम यहाँ अन्य महत्त्वपूर्ण अवलोकनों पर ध्यान देंगे। रैखिक वृद्धि को धनात्मक ढलान के साथ सरल रेखा से व्यक्त किया जाता है जबकि रैखिक ह्रास को ऋणात्मक ढलान के साथ सरल रेखा से दर्शाया जाता है। ध्यान दीजिए कि चित्र 2.4 में प्रतिरूप में वर्गाकार टाइलों की संख्या से हमें अनुक्रम 1, 3, 5, 7, … प्राप्त होता है जिसमें क्रमिक पदों के मध्य अंतर अचर मान 2 है। रेखा $y = 2x - 1$ का ढलान, जो पद-संख्या और वर्गाकार टाइलों की संख्या के मध्य रैखिक संबंध व्यक्त करता है, 2 है। अतः ढलान, क्रमागत पदों के मध्य अचर अंतर को दर्शाता है।

उदाहरण 15 — आइए, अब समीकरणों $y = \frac{-1}{3}x$, $y = -x$, $y = -3x$ के आलेख खींचते हैं जिसके लिए इन रेखाओं पर स्थित उचित बिंदुओं का चयन करना है। चित्र 2.10 में इन रैखिक समीकरणों के आलेख दिए गए हैं जिन पर किसी भी बिंदु को दर्शाया नहीं गया है।

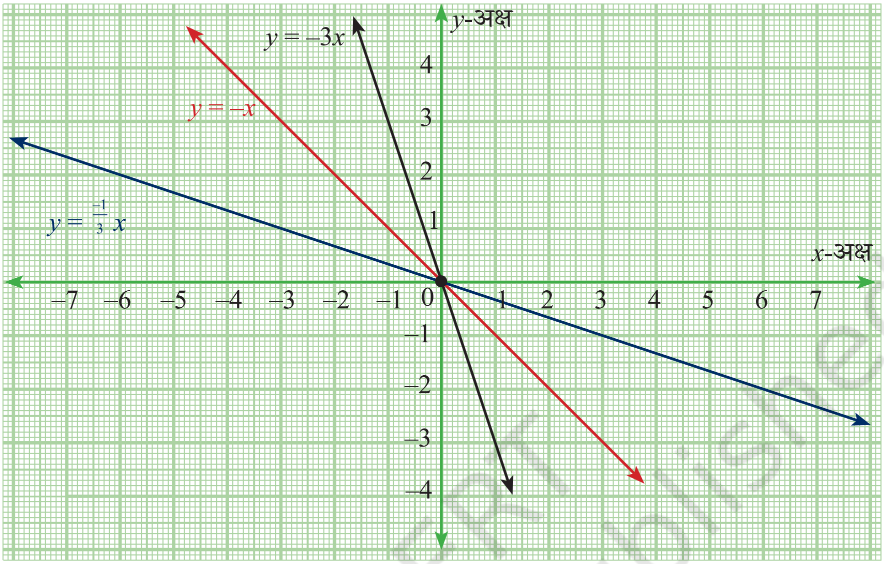
© NCERT not to be republished



चित्र 2.10

© NCERT not to be republished

चित्र 2.11 में तीनों आलेखों को समान अक्ष पर दर्शाया गया है। क्या इससे आपको रैखिक समीकरण $y = -ax$ (जहाँ a का मान बदलने के साथ $a > 0$ है), के विषय में कोई निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है? क्या होता है यदि $a > 1$ है और यदि $a < 1$ है?

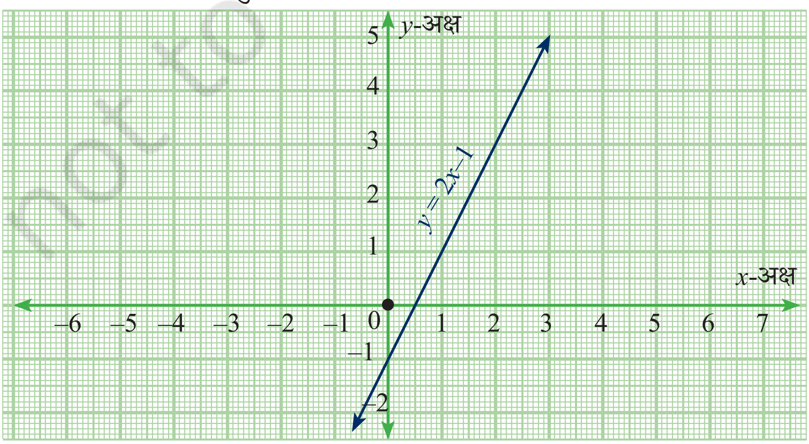


चित्र 2.11

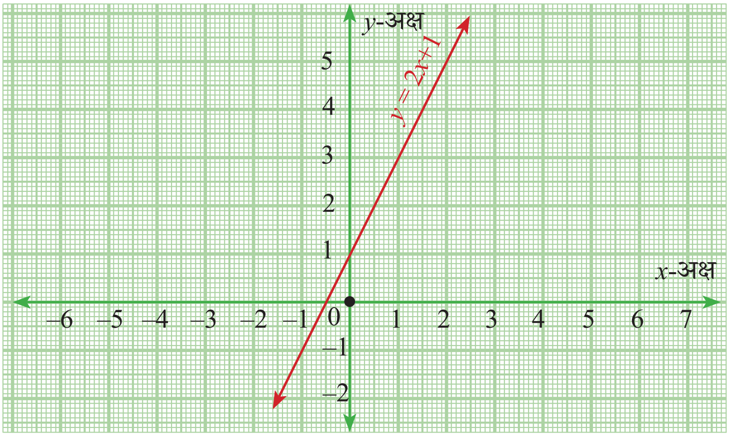
सोचिए और विचार कीजिए

समीकरण $y = 3x + 1$ और $y = -3x + 1$ के आलेखों के मध्य अंतर स्पष्ट कीजिए।

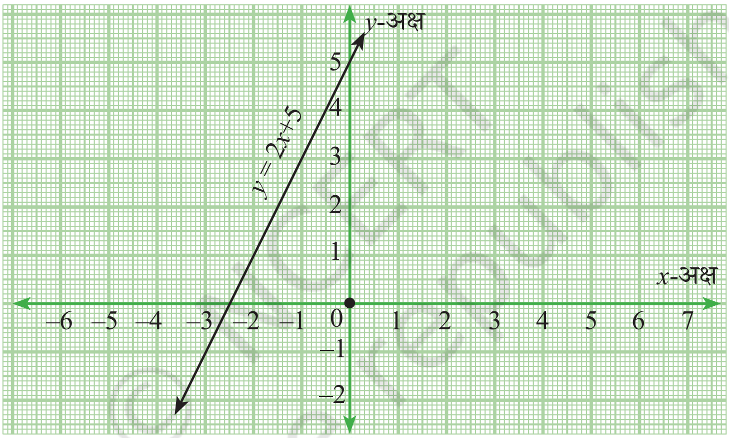
उदाहरण 16 — आइए, अब $y = 2x - 1$, $y = 2x + 1$, $y = 2x + 5$ के आलेख बनाते हैं। पहले ये आलेख अलग-अलग आलेख-पत्रकों पर (चित्र 2.12 में दर्शाए अनुसार) और तत्पश्चात समान अक्ष पर (चित्र 2.13 में दर्शाए अनुसार) बनाएँगे।



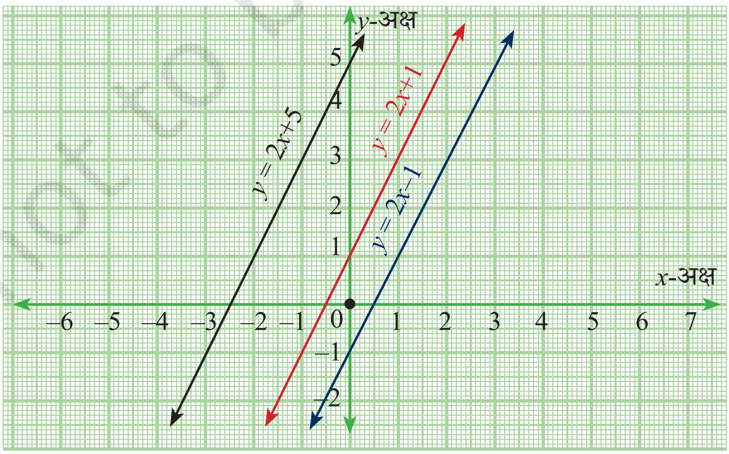
चित्र 2.12 (क)



चित्र 2.12 (ख)



चित्र 2.12 (ग)



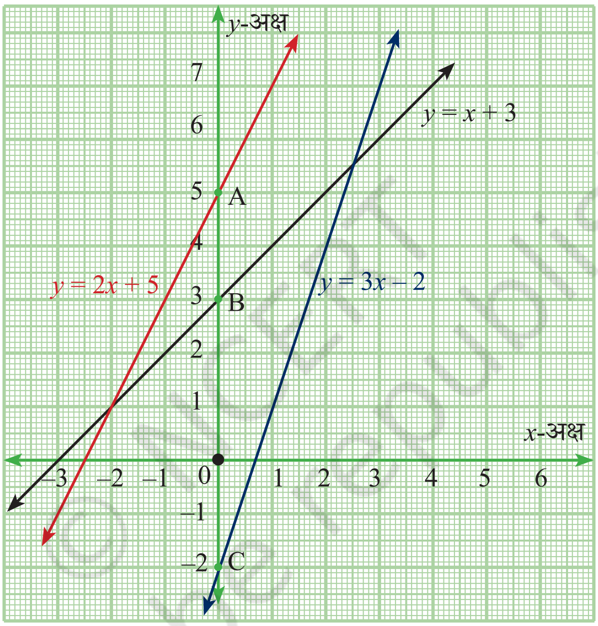
चित्र 2.13

सोचिए और विचार कीजिए

क्या चित्र 2.13 में दिए गए आलेख में आपको रैखिक समीकरण $y = ax + b$ के विषय में कोई निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है, जब a का मान निश्चित है और b का मान परिवर्तित होता रहता है?

(**संकेत** — उदाहरण 16 में दिए गए समीकरणों में $a = 2$ है और b का मान क्रमश: −1, 1 और 5 हैं।)

आइए, अब समीकरणों $y = x + 3$, $y = 2x + 5$ और $y = 3x - 2$ के आलेख बनाते हैं। चित्र 2.14 को देखिए और ध्यान दीजिए कि ये रेखाएँ y-अक्ष को किस बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं।



चित्र 2.14

हम देखते हैं कि —

$y = 2x + 5$, y-अक्ष को A (0, 5) पर प्रतिच्छेद करती है,

$y = x + 3$, y-अक्ष को B (0, 3) पर प्रतिच्छेद करती है, तथा

$y = 3x - 2$, y-अक्ष को C (0, −2) पर प्रतिच्छेद करती है।

हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $y = ax + b$ के रूप में लिखी कोई भी सरल रेखा y-अक्ष को बिंदु $(0, b)$ पर प्रतिच्छेद करती है। लंबाई b को रेखा का y-अंत:खंड कहा जाता है। इस प्रकार रेखा $y = x + 3$ का y-अंत:खंड 3 है। इसका अर्थ है कि यह रेखा y-अक्ष को मूलबिंदु से धनात्मक दिशा में

3 इकाई की दूरी पर प्रतिच्छेद करती है। इसी प्रकार रेखा $y = 3x - 2$ का y-अंतःखंड -2 है। इसका अर्थ है कि यह रेखा y-अक्ष को मूलबिंदु से ऋणात्मक दिशा में 2 इकाई दूरी पर प्रतिच्छेद करती है।

चित्र 2.8 से चित्र 2.14 तक के आलेखों का अवलोकन करने के पश्चात हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं—

(i) समीकरण $y = ax + b$ में a रेखा की ढलान को प्रदर्शित करता है और b रेखा के y-अंतःखंड को प्रदर्शित करता है।

(ii) यदि हम b के मान को नियत रखते हुए a के मान में परिवर्तन करते हैं तो रेखा का ढलान परिवर्तित होता है जबकि रेखा का y-अंतःखंड नियत रहता है।

(iii) यदि हम a के मान को नियत रखते हुए b के मानों में परिवर्तन करते हैं तो रेखाओं के स्थान में परिवर्तन हो जाता है, किंतु ये रेखाएँ मूल रेखा के समानांतर रहती हैं। इस प्रकार, वे रेखाएँ जिनके ढलान समान हों किंतु y-अंतःखंड भिन्न हों, वे परस्पर समानांतर होती हैं।

प्रश्नावली 2.6

1. नीचे दिए गए रेखा समूहों के आलेख बनाइए। प्रत्येक स्थिति में 'a' और 'b' की भूमिका को व्यक्त कीजिए—

   (i) $y = 4x, y = 2x, y = x$

   (ii) $y = -6x, y = -3x, y = -x$

   (iii) $y = 5x, y = -5x$

   (iv) $y = 3x - 1, y = 3x, y = 3x + 1$

   (v) $y = -2x - 3, y = -2x, y = 2x + 3$

अंतिम प्रश्नावली

1. एक बहुपद लिखिए जिसमें चर x हो, घात 3 हो और x^2 पद का गुणांक -7 हो।
2. चरों के दिए गए मानों से नीचे दिए गए बहुपदों के मान ज्ञात कीजिए—

   (i) $5x^2 - 3x + 7$ यदि $x = 1$ हो।

   (ii) $4t^3 - t^2 + 6$ यदि $t = a$ हो।

© NCERT not to be republished

3. यदि हम किसी संख्या को $\frac{5}{2}$ से गुणा करते हैं और उसके गुणनफल में $\frac{2}{3}$ का योग करते हैं तो हमें $\frac{-7}{12}$ प्राप्त होता है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

4. कोई धनात्मक संख्या किसी अन्य संख्या की 5 गुना है। यदि दोनों संख्याओं में 21 जोड़ दिया जाए तो प्राप्त दोनों संख्याओं में से एक संख्या दूसरी संख्या की दोगुनी है। दोनों मूल संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

5. यदि आपके पास ₹800 हैं और आप प्रतिमाह ₹250 की बचत करते हैं तो वह धनराशि ज्ञात कीजिए, जो आपके पास होगी — (i) 6 महीनों के पश्चात (ii) 2 वर्षों के पश्चात। इसे रैखिक प्रतिरूप के रूप में व्यक्त कीजिए।

*6. एक दो-अंकीय संख्या के अंकों के मध्य का अंतर 3 है। यदि संख्या के दोनों अंकों को परस्पर परिवर्तित कर दिया जाए और प्राप्त संख्या को मूल संख्या में जोड़ दिया जाए तो हमें योगफल 143 प्राप्त होता है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

*7. नीचे दिए गए समीकरणों के आलेख बनाइए और उनके ढलानों व y-अंतःखंडों की पहचान कीजिए। साथ ही उन बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ ये रेखाएँ y-अक्ष को प्रतिच्छेद करती हैं।

(i) $y = -3x + 4$

(ii) $2y = 4x + 7$

(iii) $5y = 6x - 10$

(iv) $3y = 6x - 11$

क्या इनमें से कोई भी रेखा परस्पर समानांतर है?

*8. यदि किसी द्रव के तापमान को केल्विन इकाई में x K के रूप में और फ़ॉरेनहाइट इकाई में y °F के रूप में मापा जाता है तो तापमान मापन की दोनों प्रणालियों के मध्य संबंध, रैखिक समीकरण $y = \frac{9}{5}(x - 273) + 32$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

(i) यदि द्रव का तापमान 313 K हो तो फ़ॉरेनहाइट इकाई में द्रव का तापमान ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि द्रव का तापमान 158 °F हो तो केल्विन इकाई में द्रव का तापमान ज्ञात कीजिए।

*9. किसी वस्तु पर नियत बल लगाने पर वस्तु द्वारा किया जाने वाला कार्य, नियत बल व बल की दिशा में वस्तु द्वारा तय की गई दूरी के गुणनफल के समान होता है। इसे दो चरों

© NCERT not to be republished

(कार्य w और दूरी d) में एक रैखिक समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए। नियत बल को 3 इकाई लेते हुए आलेख बनाइए। यदि वस्तु द्वारा तय की गई दूरी 2 इकाई हो तो वस्तु द्वारा किया गया कार्य ज्ञात कीजिए। किए गए कार्य के मान और संगत दूरी को आलेख में दर्शाते हुए इस मान की जाँच भी कीजिए।

*10. एक रैखिक बहुपद $p(x)$ का आलेख बिंदुओं (1, 5) और (3, 11) से होकर जाता है।

(i) बहुपद $p(x)$ ज्ञात कीजिए।

(ii) उन बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिन पर $p(x)$ का आलेख दोनों अक्षों को प्रतिच्छेद करता है।

(iii) $p(x)$ का आलेख बनाइए और अपने उत्तरों की जाँच कीजिए।

*11. मान लीजिए, दो रैखिक बहुपद $p(x) = ax + b$ और $q(x) = cx + d$ इस प्रकार हैं कि—

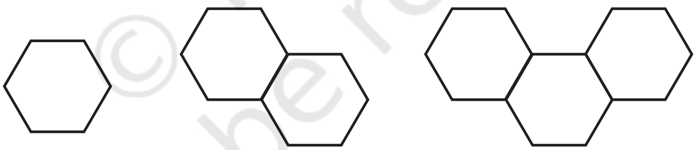
(i) $p(0) = 5$ है।

(ii) बहुपद $p(x) – q(x)$, x-अक्ष को बिंदु (3, 0) पर प्रतिच्छेद करता है।

(iii) योगफल $p(x) + q(x)$, x के सभी वास्तविक मानों के लिए $6x + 4$ के समान है।

बहुपद $p(x)$ और $q(x)$ ज्ञात कीजिए।

*12. माचिस की तीलियों से निर्मित षट्भुजों के बढ़ते हुए प्रतिरूप के प्रथम तीन चरणों को देखिए। प्रत्येक स्तर पर एक नया षट्भुज जोड़ा जाता है जो इससे पूर्व के चरण में बनी आकृति के अंतिम षट्भुज की एक भुजा से जुड़ा होता है।



चरण 1 चरण 2 चरण 3

(i) इस प्रतिरूप के अग्रिम दो चरण बनाइए। इन चरणों में कितनी माचिस की तीलियों की आवश्यकता होगी?

(ii) नीचे दी गई तालिका को पूर्ण कीजिए—

चरण संख्या	1	2	3	4	5	...	n
माचिस की तीलियों की संख्या							

(iii) n वें चरण के लिए आवश्यक माचिस की तीलियों की संख्या का पता लगाने के लिए सूत्र ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

(iv) प्रतिरूप के 15वें चरण के लिए माचिस की कितनी तीलियों की आवश्यकता होगी?

(v) क्या माचिस की 200 तीलियों से इस प्रतिरूप में कोई चरण निर्मित हो सकता है? अपने उत्तर को प्रमाणित कीजिए।

*13. मान लीजिए $p(x) = ax + b$ और $q(x) = cx + d$ दो रैखिक बहुपद इस प्रकार हैं कि—

(i) बहुपद $p(x)$ का आलेख, बिंदुओं (2, 3) और (6,11) से होकर जाता है।

(ii) बहुपद $q(x)$ का आलेख, बिंदु (4, –1) से होकर जाता है।

(iii) बहुपद $q(x)$ का आलेख, बहुपद $p(x)$ के आलेख के समानांतर है।

बहुपदों $p(x)$ और $q(x)$ को ज्ञात कीजिए। इसके अतिरिक्त, उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जिस पर ये रेखाएँ x-अक्ष से मिलती हैं।

*14. $f(x) = ax + a$, जहाँ $a > 0$ है, के रूप के सभी रैखिक फलनों में कौन-सा गुण सामान्य है?

सारांश

- किसी **बीजीय व्यंजक** में संख्याएँ, चर राशियाँ और गणितीय संक्रियाओं के चिह्न विद्यमान होते हैं। उदाहरण के लिए बीजीय व्यंजक $2x^2 + 5xy - 3y^2$ में x व y **चर** हैं, $2x^2$, $5xy$ व $-3y^2$ **पद** हैं और संख्याएँ 2, 5 व –3 पदों के **गुणांक** हैं।
- **एकचरीय व्यंजक** वे बीजीय व्यंजक हैं जिनमें एक ही चर होता है। इस प्रकार $x^2 + 5x + 3$ और $3y^3 - 4y^2 + 5$ क्रमशः x और y में एकचरीय व्यंजक हैं। किसी एकचरीय व्यंजक में चर की उच्चतम घातांक उस व्यंजक की **घात** कहलाती है। इस प्रकार $x^2 + 5x + 3$ की घात 2 है जबकि $3y^3 - 4y^2 + 5$ की घात 3 है।
- जिस बहुपद की घात एक होती है उसे **रैखिक बहुपद** कहते हैं। अतः रैखिक बहुपद $2x + 3$ और $5 - 4y$ में चर क्रमशः x और y हैं।
- **रैखिक वृद्धि** का तात्पर्य उस प्रतिरूप से है जिसमें कोई राशि समान समयांतरालों में एक निश्चित दर से वृद्धि करती है। इसके विपरीत **रैखिक ह्रास** उस प्रतिरूप को दर्शाता है जिसमें कोई राशि समान समयांतरालों में एक निश्चित दर से घटती है।
- **रैखिक प्रतिरूप** संख्याओं का एक अनुक्रम है जिसमें क्रमागत पदों के मध्य अंतर अचर (निश्चित) होता है।
- दो चरों x व y के मध्य **रैखिक संबंध** को सरल रेखा $y = ax + b$ से व्यक्त किया जाता है। इस रेखा का ढलान a है। अचर b को y-अंतःखंड कहा जाता है जो मूलबिंदु से उस बिंदु की दूरी है जिस पर रेखा y-अक्ष को प्रतिच्छेद करती है। जब $b = 0$ हो तो रेखा का समीकरण $y = ax$ है और रेखा मूलबिंदु से होकर जाती है।

© NCERT not to be republished

- **रैखिक वृद्धि** को धनात्मक ढलान के साथ एक सरल रेखा से दर्शाया जाता है और **रैखिक ह्रास** को ऋणात्मक ढलान के साथ एक सरल रेखा से दर्शाया जाता है।
- समानांतर रेखाएँ $y = ax + b$ के रूप में होती हैं, जहाँ ढलान a निश्चित होता है और y-अंतःखंड b का मान परिवर्तित होता है।

© NCERT not to be republished