0920CH03

3 संख्याओं का संसार

3.1 गणित का उदय — गिनती करने की मानवीय आवश्यकता

मानव द्वारा नगरों के निर्माण, सूत्रबद्ध नियमों और सिद्धांतों अथवा तारों के अध्ययन करने के बहुत पहले एक आधारभूत एवं व्यावहारिक आवश्यकता अस्तित्व में थी — गिनती करते रहने की आवश्यकता। गणित का उद्‌भव कक्षाओं में श्यामपट्ट पर समीकरणों को हल करने से नहीं हुआ है, इसका उद्‌भव धूल-मिट्टी में, वृक्ष की छालों पर और अस्थियों पर हुआ है।

कल्पना कीजिए कि आप सहस्त्रों वर्ष पूर्व सरस्वती नदी के तट पर स्थित एक छोटी-सी कृषक बस्ती में निवास कर रहे हैं। आपके पास मवेशियों का एक झुंड है। प्रत्येक सुबह वे चरने के लिए घने जंगलों में जाते हैं और संध्या के समय लौट आते हैं। आप यह कैसे सुनिश्चित करेंगे कि एक बछड़ा झुंड से अलग नहीं हो गया है? संख्याओं के लिए शब्दों और लिपिबद्ध प्रतीकों के बिना मानव इसका समाधान **एकैकी-संगतता** (वन-टू-वन कॉरेसपोंडेंस) की संकल्पना से किया करते थे।

बस्ती से चरागाह की ओर जाने वाली प्रत्येक गाय के लिए चरवाहा मिट्टी के घड़े में एक कंकड़ डालता था। संध्या में प्रत्येक गाय के वापस आने पर वह एक कंकड़ को निकाल लेता था। यदि दिन के अंत में मिट्टी का घड़ा खाली हो जाता तो इसका अर्थ होता था कि पशुओं का झुंड सुरक्षित है। यदि घड़े में कंकड़ शेष रहते थे तो इसका अर्थ था कि गायें छूट गई होंगी या मार्ग भटक गई होंगी। एक वस्तु से दूसरी वस्तु के मिलान करने के इस सरल कार्य से ही **प्राकृत संख्याओं** ($N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$) का जन्म हुआ।

3.1.1 अस्थियों पर लिखा गया इतिहास

वर्तमान में उपयोग होने वाली दशमलव स्थानीय-मान प्रणाली को सुव्यस्थित रूप से प्रस्तुत करने का कार्य भारतीय उपमहाद्वीप में हुआ है, वहीं मानवीय इतिहास में प्राकृत संख्याओं के अंकन के प्रारंभिक साक्ष्य हमें अफ्रीका की सभ्यताओं में मिलते हैं। प्रारंभिक गणितज्ञ कागज का उपयोग नहीं करते थे, वे अस्थियों पर उकेरे गए गिनती के चिह्नों का उपयोग करते थे।

लेबोम्बो अस्थि की खोज लगभग 35,000 वर्ष पूर्व दक्षिण अफ्रीका और स्वाजीलैंड के मध्य स्थित लेबोम्बो पर्वत में हुई थी। यह एक प्रकार की अस्थि है जिसमें सोच-समझकर कर उकेरे गए 29 समरूप खाँचे बने हुए हैं। मानवविज्ञानियों और गणितज्ञों का ऐसा विश्वास है कि उकेरने का यह कार्य अनायास नहीं था, अपितु एक ऐसा उपाय था, जिसका उपयोग चंद्रमा की कलाओं या मासिक धर्म की

© NCERT not to be republished

गणना के लिए किया जाता था, जो यह संकेत करता है कि आदिमानव प्राकृत संख्याओं के माध्यम से समय का पता लगाते थे।

इससे भी अधिक रोचक **इशांगो अस्थि** है, जो कांगो लोकतांत्रिक गणराज्य में नील नदी के उद्‌गम के निकट पाई गई और जिसका तिथि निर्धारण 20,000 सामान्य संवत पूर्व किया गया है। इस अस्थि में असमान खाँचों के तीन स्तंभ पाए गए हैं। इशांगो अस्थि को गणितीय उत्कृष्टता का प्रतीक माने जाने का कारण इसमें विद्यमान रेखाओं का विशिष्ट समूहन है। इन स्तंभ समूहों में से एक में 11, 13, 17 और 19 खाँचें हैं जो 10 से लेकर 20 के मध्य की अभाज्य संख्याएँ हैं। अन्य स्तंभ 2 से गुणा करने (दोगुना) की संकल्पना को प्रस्तुत करता हुआ प्रतीत होता है। ये प्राचीन अवशेष यह इंगित करते हैं कि वस्तुतः 'संख्या' की अमूर्त संकल्पना कई हजार वर्ष पुरानी है।

चित्र 3.1 — इशांगो अस्थि पर पाए गए अभाज्य संख्या मिलान-रेखा समूहों का निरूपण

3.1.2 भारतीय संदर्भ में व्यापार और खगोलिकी

जैसे-जैसे सभ्यताएँ उन्नत होती गईं, वैसे-वैसे बृहत् संख्याओं की आवश्यकता भी बढ़ती गई। सिंधु घाटी सभ्यता के प्राचीन नगरीय केंद्रों, जैसे — लोथल और हड़प्पा में, व्यापार के लिए मानकीकृत माप और भार आवश्यक हो गए थे। मेसोपोटामिया से लाजवर्द मणि, पकी हुई मिट्टी से निर्मित मृदभांडों या सूती वस्त्रों का व्यापार करने वाले व्यापारियों के लिए सुदृढ़ लेखा प्रणाली आवश्यक थी।

वैदिक काल में, भारतीय दार्शनिक बृहत् संख्याओं को लेकर अति रोमांचित थे और उन्होंने इस संदर्भ में गहन चिंतन-मनन किया। सहस्त्रों वर्ष पूर्व वेदों में 10 से लेकर 10^{12} तक के सभी घातांकों का नामकरण किया गया है (जिन्हें 'परार्ध' कहा गया था)। चौथी शताब्दी सामान्य संवत पूर्व की *ललितविस्तर* में बुद्ध ने 10^{53} तक के नामों का वर्णन किया है, जिसे 'तल्लक्षण' कहा जाता है।

10 के घातांकों के रूप में राशियों को व्यक्त करने का कार्य *ऋग्वेद* में स्पष्ट रूप से किया गया है। इस प्रकार, भारत में आगामी वर्षों के दौरान 10 के घातांकों पर आधारित संख्या पद्धति विकसित करने की पृष्ठभूमि बनाई गई, जिसका उपयोग वर्तमान में संपूर्ण विश्व में हो रहा है। स्थानीय मान और 10 के घातांकों पर आधारित भारतीय संख्या पद्धति के विकास ने संभवत: सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण गणितीय आविष्कार 'शून्य की अवधारणा' का मार्ग प्रशस्त करने में सहयोग किया।

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 3.1

1. बंदरगाह नगर लोथल में एक व्यापारी ताम्र शिलिकाओं को लेने के लिए मसालों की थैलियों का विनिमय करता है। वह मसाले की प्रत्येक 2 थैलियों से 15 ताम्र शिलिकाएँ लेता है। यदि वह बाजार में मसालों की 12 थैलियाँ लेकर जाता है तो वह उनके बदले कितनी ताम्र शिलिकाएँ बाजार से लेकर आएगा?
2. इशांगो अस्थि के एक स्तंभ पर संख्याओं का अनुक्रम— 11, 13, 17, 19 देखिए। इन संख्याओं में क्या समानता है? इस प्रतिरूप में उपयुक्त आगामी तीन संख्याओं को सूचीबद्ध कीजिए।
3. हमें ज्ञात है कि प्राकृत संख्याएँ योग के अंतर्गत संवृत होती हैं (किन्हीं दो प्राकृत संख्याओं का योग सदैव एक प्राकृत संख्या होती है)। क्या संख्याएँ घटाव के अंतर्गत संवृत होती हैं? अपने उत्तर को सिद्ध करने हेतु कुछ उदाहरण दीजिए।

*4. प्राचीन भारत के निवासी गणना करने के लिए अपनी अंगुलियों की संधियों का उपयोग करते थे, जो वर्तमान में भी प्रचलन में है। प्रत्येक अंगुली में तीन संधियाँ होती हैं और अंगूठे का उपयोग उन्हें गिनने के लिए किया जाता है। एक हाथ पर आप कितनी गिनती कर सकते हैं? यह प्राचीन आधार-12 गणन पद्धतियों से कैसे संबंधित है?

3.2 शून्य की क्रांति— जब 'कुछ नहीं', 'कुछ है' में परिवर्तित हो गया

हजारों वर्षों तक संख्या रेखा का आरंभ 1 से होता था। यदि आपके पास पाँच सेब हैं और आपने सभी सेब दे दिए तो आपके पास ऐसी कोई संख्या विद्यमान नहीं थी जो आपकी स्थिति को प्रस्तुत कर सकती हो। स्वाभाविक रूप से, आपके पास एक ही शब्द शेष रहता था— रिक्तता अर्थात सेबों का समाप्त हो जाना। बेबीलोन और माया जैसी सभ्यताओं ने किसी संख्या में रिक्त स्तंभ को दर्शाने के लिए स्थानधारक प्रतीक चिह्नों का उपयोग किया, परंतु उन्होंने 'कुछ नहीं होने' को किसी संख्या द्वारा प्रदर्शित किए जाने पर विचार नहीं किया, जिसे हम जोड़, घटा या गुणा कर सकें।

यह ब्रह्मगुप्त (628 सामान्य संवत) का ही कार्य था, जिन्होंने औपचारिक रूप से रिक्तता को एक संख्या में रूपांतरित किया। वास्तव में, उनके इस कार्य ने गणित को ही रूपांतरित कर दिया। यह ऐतिहासिक प्रगति, भारतीय दार्शनिक परंपराओं से ही अभिप्रेरित थी।

3.2.1 दर्शनशास्त्र से गणित की ओर— शून्यता की संकल्पना

सातवीं शताब्दी सामान्य संवत पूर्व के बहुत पहले से स्थापित विपुल बौद्ध साहित्य और उपनिषदों में **शून्यता** की संकल्पना (रिक्तता) एक गहन अवस्था में थी, जो योग और ध्यान

© NCERT not to be republished

का लक्ष्य थी। 'शून्यता' शब्द का उपयोग इन ग्रंथों में व्यापक रूप से किया गया है जिसका उद्देश्य किसी व्यक्ति विशेष की उस अवस्था का वर्णन करने के लिए किया गया है जो वह ध्यानावस्था के दौरान प्राप्त करने के लिए प्रयासरत रहता है अर्थात पूर्ण स्थायित्व और प्रशांति की अवस्था प्राप्ति के लिए किसी के मस्तिष्क को सभी वृत्तियों (मस्तिष्क का आरोह-अवरोह) से मुक्त करना। तीसरी शताब्दी सामान्य संवत पूर्व के आस-पास पतंजलि ने *योग सूत्र* में भी शून्यता के सिद्धांत का वर्णन इस अर्थ और संदर्भ में किया है कि कैसे शून्यता का सिद्धांत किसी व्यक्ति विशेष को अपने मस्तिष्क, शरीर और इंद्रियों को नियंत्रित करने में सहायता प्रदान करता है।

चूँकि भारतीय विचारकों ने इस 'रिक्तता अवस्था' का सम्मान किया, अतः उन्हें दर्शन में शून्यता को एक संकल्पना के रूप में प्रतिपादित करने हेतु आवश्यक संकल्पनात्मक रूपरेखा प्राप्त हुई। शून्यता का यह सिद्धांत विभिन्न क्षेत्रों, जैसे—वास्तुकला, साहित्य, भाषा-विज्ञान से होते हुए आर्यभट और अंततः ब्रह्मगुप्त की कृतियों के माध्यम से गणित में अपने मार्ग को प्रशस्त करता गया।

इस प्रकार, रिक्तता का यह दार्शनिक सिद्धांत, गणितीय शून्य में परिवर्तित होकर और भी सुस्पष्ट हो गया।

3.2.2 बख्शाली पांडुलिपि और ब्रह्मगुप्त के नियम

वर्तमान में उपयोग की जा रही हिंदू संख्या पद्धति में रिक्त स्थान से एक चिह्न में भौतिक रूपांतरण को प्रत्यक्षतः *बख्शाली पांडुलिपि* में देखा जा सकता है जिसका तिथि निर्धारण आरंभिक सामान्य संवत शताब्दियों में किया गया। इसमें गहरे रंग के बिंदु से शून्य को प्रदर्शित किया जाता था।

यद्यपि, एक चिह्न किसी पृष्ठ पर अंकन मात्र है जब तक कि यह नियमबद्ध नहीं हो जाता है। शून्य का पूर्ण रूप से संक्रियात्मक संख्या में रूपांतरण **ब्रह्मगुप्त** की कृति में हुआ। उनकी मौलिक कृति *ब्रह्मस्फुटसिद्धांत* (628 सामान्य संवत) में उन्होंने स्पष्ट रूप से किसी संख्या में से स्वयं अर्थात उसी संख्या को घटाने का परिणाम ($a - a = 0$) शून्य माना है।

तत्पश्चात ब्रह्मगुप्त ने 'शून्य' के साथ अंकगणित के मूलभूत नियमों को प्रतिपादित किया।

ब्रह्मगुप्त के शून्य संबंधी नियम

- यदि किसी संख्या में शून्य का योग किया जाता है तो संख्या अपरिवर्तित रहती है— $a + 0 = a$
- यदि किसी संख्या में से शून्य को घटाया जाता है तो संख्या अपरिवर्तित रहती है— $a - 0 = a$
- यदि किसी संख्या को शून्य से गुणा किया जाता है तो परिणाम शून्य होता है— $a \times 0 = 0$

© NCERT not to be republished

3.3 पूर्णांक — क्षितिज का विस्तार

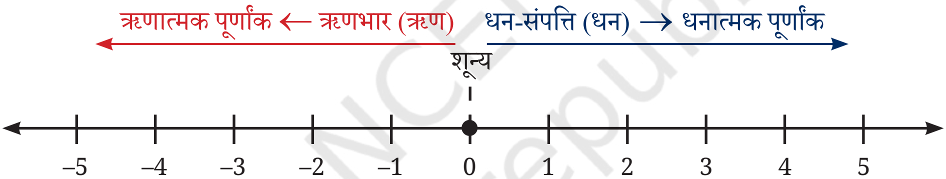
ब्रह्मगुप्त 'शून्य' तक ही नहीं रुके। उन्होंने अनुभव किया कि यदि किसी संख्या में से स्वयं को घटाया जाता है तो परिणाम शून्य (5 – 5 = 0) प्राप्त होता है। अब यदि हम छोटी संख्या में से एक बड़ी संख्या को घटाएँ तो क्या होगा? (3 – 5 = ☐)?

इसका उत्तर प्राप्त करने के लिए ब्रह्मगुप्त ने अपने गणित को वाणिज्य और जीवन की वास्तविकता से जोड़ने का प्रयत्न किया।

उन्होंने दो स्थितियों का अवलोकन किया—

- **धन-संपत्ति (धन)** — सकारात्मक संख्याएँ, जो धन और संपत्ति को दर्शाती हैं।
- **ऋणभार (ऋण)** — नकारात्मक संख्याएँ, जो ऋणभार को दर्शाती हैं।

संख्या रेखा पर शून्य के बाईं ओर स्थित संख्याओं को परिभाषित करके ब्रह्मगुप्त ने सर्वप्रथम **'ऋण संख्याओं'** का औपचारिक परिचय विश्व के समक्ष प्रस्तुत किया। धनात्मक प्राकृतिक संख्याओं, उनकी समकक्ष ऋणात्मक संख्याओं और शून्य संयोजन से **पूर्णांकों** के समुच्चय का निर्माण होता है, जिसे चिह्न Z (जर्मन शब्द 'जाहलेन' से व्युत्पन्न, जिसका अर्थ 'संख्याएँ' होता है) से दर्शाया जाता है।



चित्र 3.2

3.3.1 पूर्णांकों का अंकगणित

ब्रह्मगुप्त ने इन पूर्णांकों के योग और गुणन के लिए स्पष्ट नियमावली प्रदान की थी, जिसका उपयोग हम वर्तमान में भी ठीक उसी प्रकार कर रहे हैं जैसी उन्होंने 1300 वर्ष पूर्व लिखी थी—

1. **धन-संपत्ति और धन-संपत्ति के योग का परिणाम धन-संपत्ति होता है** 5 + 4 = 9
2. **ऋणभार और ऋणभार के योग का परिणाम ऋणभार होता है** (–5) + (– 4) = – 9 (यदि आप पर ₹5 का ऋणभार है और आपने ₹4 और उधार ले लिए तो आपका कुल ऋणभार 9 होगा।)
3. **किसी धन-संपत्ति से शून्य को घटाने पर परिणाम धन-संपत्ति प्राप्त होता है, उसी प्रकार ऋणभार से शून्य को घटाने पर परिणाम ऋणभार प्राप्त होता है** 7 – 0 = 7 और – 6 – 0 = – 6
4. **किसी धन-संपत्ति और ऋणभार का गुणनफल एक ऋणभार होता है** (– 3) × 4 = – 12
5. **दो ऋणभारों का गुणनफल एक धन-संपत्ति होता है** (– 3) × (– 4) = 12

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

एक ऋणात्मक संख्या को दूसरी ऋणात्मक संख्या से गुणा करने पर धनात्मक संख्या क्यों प्राप्त होती है? इस पर क्रियाविधि और ऋण के संदर्भ में विचार कीजिए। यदि एक ऋणात्मक संख्या ऋणभार को दर्शाती है तो इसे ऋणात्मक संख्या से गुणा करना ऋण के निरस्तीकरण को अभिव्यक्त करता है। **(संकेत** — यदि कोई आपके चार ऋणभार, जिनमें से प्रत्येक ₹3 मूल्य (अर्थात -3) का है, को आपसे ले लेता है तो प्रभावी रूप से आप ₹12 से धनी हो जाते हैं। इस प्रकार, $(-3) \times (-4) = +12$ होता है।

प्रश्नावली 3.2

1. मध्याह्न के समय उच्च तुंगता वाले लद्दाख के मरुस्थल में तापमान 4°C अंकित किया गया है। मध्यरात्रि के समय इसके तापमान में 15°C की कमी हो जाती है। मध्यरात्रि का तापमान क्या है?
2. एक मसाला-व्यापारी ₹850 का ऋण लेता है। अगले दिन उसे ₹1200 का लाभ (धन) प्राप्त होता है। आने वाले सप्ताह में उसे ₹450 की हानि होती है। इस अनुक्रम को पूर्णांकों का उपयोग करते हुए समीकरण के रूप में लिखिए और उसके अंतिम लाभ-हानि की गणना कीजिए।
3. ब्रह्मगुप्त के नियमों का उपयोग करते हुए निम्नलिखित की गणना कीजिए—

   (i) $(-12) \times 5$ (ii) $(-8) \times (-7)$

   (iii) $0 - (-14)$ (iv) $(-20) \div 4$
4. वास्तविक जीवन से संबंधित ऋणभार के एक उदाहरण का उपयोग करते हुए विस्तारपूर्वक बताइए कि किसी ऋणात्मक संख्या को घटाना, एक धनात्मक संख्या का योग करने के समान क्यों है (जैसे $10 - (-5) = 15$)।

3.4 रिक्त स्थानों की पूर्ति करना — भिन्न और परिमेय संख्याएँ

जैसे-जैसे समाज अधिक जटिल होता गया, मापन भी गणना करने के समान ही महत्त्वपूर्ण होता गया। यदि एक कृषक गेहूँ के खेत को अपने तीन पुत्रों में विभाजित करता है तो प्रत्येक को कितना भाग मिलेगा? यदि किसी व्यंजन को बनाने में आधा प्याला घी चाहिए तो इसे हम गणितीय रूप में कैसे व्यक्त करेंगे?

वे संख्याएँ जो एक संपूर्ण के भागों को प्रस्तुत करती हैं, **भिन्न** कहलाती हैं। ठीक वैसे ही, जैसे प्रत्येक प्राकृत संख्या का एक योज्य व्युत्क्रम होता है (3 का -3 है, 19 का -19 आदि), हम प्रत्येक धनात्मक भिन्न के लिए एक योज्य व्युत्क्रम की कल्पना कर सकते हैं, जैसे $-\frac{3}{4}$ के लिए $\frac{3}{4}$, $-\frac{19}{7}$ के

लिए $\frac{19}{7}$ इत्यादि। आइए, हम ऐसी धनात्मक भिन्नों के योज्य व्युत्क्रम को ऋणात्मक भिन्नों से इंगित करते हैं। ध्यान दीजिए कि एक ऋणात्मक भिन्न में, '–' का चिह्न या तो अंश या हर के साथ प्रयुक्त किया जा सकता है, जैसे $-\frac{1}{5} = \frac{-1}{5} = \frac{1}{-5}$

जब हम सभी पूर्णांकों और सभी भिन्नों (धनात्मक और ऋणात्मक, दोनों) को संयोजित करते हैं, तो हमें '**परिमेय संख्याओं**' का समुच्चय प्राप्त होता है, जिसे Q (भागफल के लिए) द्वारा दर्शाया जाता है।

एक **परिमेय संख्या** को किसी ऐसी संख्या के रूप में परिभाषित किया जा सकता है, जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप परिमेय संख्या की परिभाषा में निहित $q \neq 0$ की आवश्यकता की व्याख्या कर सकते हैं?

इस स्तर पर हमें आवश्यक रूप से कुछ महत्त्वपूर्ण अवलोकन करने चाहिए—

- सभी परिमेय संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। उदाहरण के लिए 5 और –10 को क्रमशः $\frac{5}{1}$ और $\frac{-10}{1}$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसका आशय यह है कि परिमेय संख्याओं में प्राकृत संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ और पूर्णांक भी सम्मिलित होते हैं।

- परिमेय संख्याओं का $\frac{p}{q}$ के रूप में, जहाँ p और q पूर्णांक हों तथा $q \neq 0$ हो, निरूपण अद्वितीय नहीं होता। उदाहरण के लिए $-\frac{1}{3} = -\frac{2}{6} = -\frac{3}{9} = -\frac{10}{30} = -\frac{2026}{6078}$ इत्यादि। ये समतुल्य परिमेय संख्याएँ (अथवा समतुल्य भिन्न) हैं। यह तथ्य हमें दी गई एक भिन्न के अंश और हर के मध्य किसी भी सार्व गुणनखंड को विभाजित करने की स्वतंत्रता देता है। परिणामी भिन्न इस स्थिति में अपने मूल भिन्न का समतुल्य होता है। उदाहरण के लिए $\frac{12}{30}$, $\frac{2}{5}$ के समतुल्य है। यहाँ हमने अंश और हर दोनों को 6 से विभाजित किया है।

- एक सामान्य समझ यह है कि जब हम कहते हैं कि $\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है या जब हम $\frac{p}{q}$ को संख्या रेखा पर दर्शाते हैं तो हम यह मानते हैं कि $q \neq 0$ और यह भी मानते हैं कि p और q का 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखंड नहीं है (अर्थात p और q **सह-अभाज्य** हैं)। इस प्रकार संख्या रेखा पर $\frac{1}{2}$ के समतुल्य अनंत भिन्नों (अर्थात भिन्न $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{6}{12}, \ldots, \frac{1013}{2026}, \ldots$) को दर्शाने के लिए हम $\frac{1}{2}$ का चयन करते हैं।

© NCERT not to be republished

जैसा कि आपको स्मरण होगा कि हमने कक्षा 6 और 7 में ब्रह्मगुप्त द्वारा प्रतिपादित भिन्नों के योग, घटाव, गुणन और विभाजन के लिए नियमों के विषय में पढ़ा था। उन्होंने यह भी बताया था कि ये नियम धनात्मक और ऋणात्मक, दोनों प्रकार के भिन्नों पर लागू होते हैं। ये भिन्न एक साथ मिलकर परिमेय संख्याएँ बनाती हैं।

नीचे विभिन्न नियमों को प्रस्तुत किया गया है—

1. **समतुल्यता**— दो परिमेय संख्याएँ $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ समतुल्य होती हैं यदि $ad = bc$ है।
2. **दो परिमेय संख्याओं का योग और घटाव**— सर्वप्रथम हम दो परिमेय संख्याओं को $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{b}$ भिन्नों के रूप में व्यक्त करते हैं, जिनमें समान हर b है। इसके उपरांत हम $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ तथा $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$ नियम का उपयोग करते हैं।
3. **दो परिमेय संख्याओं का गुणन और विभाजन**— हम $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ के नियम का उपयोग करते हैं, यदि (जहाँ $b \neq 0, d \neq 0$) हो और $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ के नियम का उपयोग करते हैं, यदि (जहाँ $b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0$) हो।
4. उपरोक्त अंकगणितीय नियमों के अनुसार योग और गुणन दोनों क्रम विनिमय हैं (अर्थात; $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ और $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$) तथा वे बंटन नियम का अनुसरण करते हैं। यदि p, q और r परिमेय संख्याएँ हैं तो $p\,(q + r) = pq + pr$ होगा।

परिमेय संख्याएँ योग, घटाव और गुणन के अंतर्गत संवृत होती हैं अर्थात यदि किन्हीं दो परिमेय संख्याओं का योग करते हैं, दो परिमेय संख्याओं को घटाते हैं या दो परिमेय संख्याओं को गुणा करते हैं तो परिणामस्वरूप एक परिमेय संख्या ही प्राप्त होती है। परिमेय संख्याएँ विभाजन के अंतर्गत भी संवृत होती हैं, यदि वह परिमेय संख्या 0 से विभाजित न हों। इसका अर्थ है कि दो परिमेय संख्याओं का भागफल भी पुन: एक परिमेय संख्या होगी, यदि वह संख्या 0 से विभाजित न हो।

सोचिए और विचार कीजिए

1. भिन्न-भिन्न हर वाली दो परिमेय संख्याओं का योग अथवा घटाव करते समय आप उनके हर को समान कैसे बनाएँगे?
2. परिमेय संख्याओं के लिए बंटन नियम को सत्यापित कीजिए।

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 3.3

1. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित परिमेय संख्याएँ समतुल्य हैं—

   (i) $\frac{2}{3}$ और $\frac{4}{6}$ (ii) $\frac{5}{4}$ और $\frac{10}{8}$

   (iii) $-\frac{3}{5}$ और $-\frac{6}{10}$ (iv) $\frac{9}{3}$ और 3

2. योगफल ज्ञात कीजिए—

   (i) $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}$ (ii) $\frac{7}{12}+\frac{5}{8}$

   (iii) $-\frac{4}{7}+\frac{3}{14}$

3. अंतर ज्ञात कीजिए—

   (i) $\frac{5}{6}-\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{11}{8}-\frac{3}{4}$

   (iii) $-\frac{7}{9}-\left(-\frac{2}{3}\right)$

4. गुणनफल ज्ञात कीजिए—

   (i) $\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}$ (ii) $\frac{7}{11}\times\frac{5}{8}$

   (iii) $-\frac{4}{7}\times\frac{5}{14}$

5. भागफल ज्ञात कीजिए—

   (i) $\frac{2}{3}\div\frac{3}{10}$ (ii) $\frac{7}{11}\div\frac{5}{8}$

   (iii) $-\frac{4}{7}\div\frac{5}{14}$

© NCERT not to be republished

6. सिद्ध कीजिए कि $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\times\frac{8}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{8}{3}$

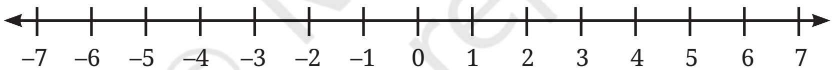
7. बंटन गुणधर्म का उपयोग करते हुए निम्नलिखित का सरलीकरण कीजिए—

$\frac{7}{9}\left(\frac{6}{7}-\frac{3}{4}\right)$

8. परिमेय संख्या x को इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि $\frac{5}{6}\left(x+\frac{3}{5}\right)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}$

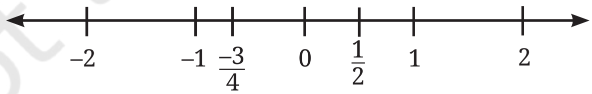
3.4.1 संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं का निरूपण

हम जानते हैं कि पूर्णांकों को संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। इस कार्य को करने के लिए हम एक बिंदु का चयन करते हैं और इसे शून्य के रूप में अंकित करते हैं, इसे संख्या रेखा का मूलबिंदु कहेंगे। दाईं ओर एक इकाई अग्रसर होने पर जिस बिंदु पर हम पहुँचते हैं, उसे 1 के रूप में निरूपित करते हैं, इसी प्रकार दो इकाई अग्रसर होने पर उसे 2 से निरूपित करते हैं और इस प्रकार संख्या रेखा बनती चली जाती है। ठीक इसी प्रकार, मूलबिंदु से बाईं ओर एक इकाई अग्रसर होने पर हमें –1 की प्राप्ति होती है, दो इकाई अग्रसर होने पर –2 की प्राप्ति होती है और मूलबिंदु से बाईं ओर भी इस प्रकार संख्या रेखा विस्तारित होती जाती है। प्रत्येक पूर्णांक, अपने आगामी पूर्णांक से समान दूरी पर स्थित होता है। इसे चित्र 3.3 में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 3.3

परिमेय संख्याओं को भी संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। पूर्णांकों के अतिरिक्त, ये दो पूर्णांकों के मध्य भी स्थित हो सकते हैं। उदाहरण के लिए $\frac{1}{2}$, 0 और 1 के ठीक मध्य में स्थित होता है और $-\frac{3}{4}$, –1 और 0 के मध्य स्थित होता है, जैसा चित्र 3.4 में प्रदर्शित किया गया है।

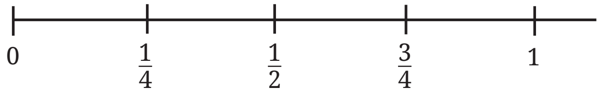


चित्र 3.4

एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ को संख्या रेखा पर निरूपित करने के लिए इकाई अंतराल (दो क्रमागत पूर्णांकों के मध्य की दूरी) को q समान भागों में विभाजित कीजिए। यदि संख्या धनात्मक है तो मूलबिंदु 0 से दाईं ओर p भाग आगे बढ़िए और यदि संख्या ऋणात्मक हो तो बाएँ ओर बढ़िए।

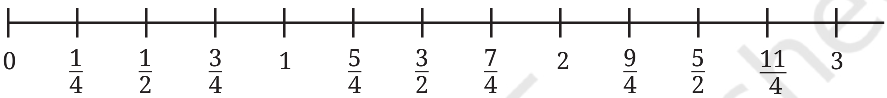
© NCERT not to be republished

उदाहरण के लिए $\frac{3}{4}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करने के लिए, 0 और 1 के मध्य अंतराल को चार समान भागों में विभाजित कीजिए और 0 से दाईं ओर तीन भागों तक बढ़िए।



चित्र 3.5

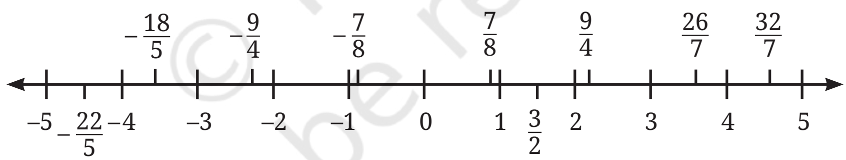
यहाँ तक कि 1 से बड़े भिन्न को भी इस विधि से संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। उदाहरण के लिए $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, अत: यह 2 और 3 के मध्य स्थित है। हम 2 और 3 के मध्य अंतराल को चार समान भागों में विभाजित करते हैं और 2 से दाईं ओर एक भाग आगे बढ़ते हैं।



चित्र 3.6

सोचिए और विचार कीजिए

$\frac{8}{5}$ और $-\frac{7}{4}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करने का प्रयत्न कीजिए।



चित्र 3.7 — संख्या रेखा पर कुछ पूर्णांक और परिमेय संख्याएँ

परिमेय संख्या का निरपेक्ष मान

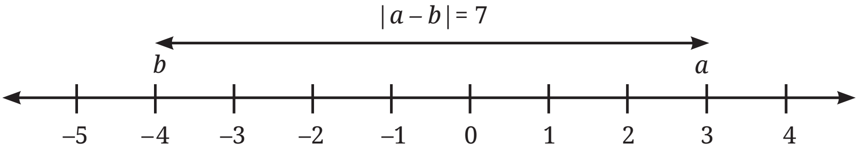
एक परिमेय संख्या x के **निरपेक्ष मान** को $|x|$ के रूप में लिखा जाता है जो संख्या रेखा पर 0 से इसकी दूरी को दर्शाता है।

उदाहरण 1 $\left|\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$, $\left|-\frac{5}{3}\right|$ भी $\frac{5}{3}$ के समान है और $|0| = 0$ होता है।

अत: एक धनात्मक संख्या का निरपेक्ष मान वह संख्या स्वयं होती है। एक ऋणात्मक संख्या का निरपेक्ष मान उस संख्या का धनात्मक मान है। अत: किसी परिमेय संख्या का निरपेक्ष मान सदैव ही ऋणेतर होता है, अर्थात $|x| \geq 0$ होगा।

© NCERT not to be republished

दो परिमेय संख्याओं a और b के लिए, संख्या रेखा पर उनके मध्य की दूरी को $|a - b|$ से दर्शाया जाता है। चित्र 3.8 में पूर्णांकों –4 और 3 के मध्य की दूरी को दर्शाया गया है।



चित्र 3.8

3.4.2 परिमेय संख्याओं की सघनता

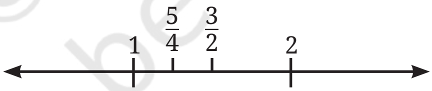
परिमेय संख्याओं के सबसे अद्भुत गुणों में से एक उसका घनत्व है। किन्हीं दो पूर्णांकों, जैसे 1 और 2 के मध्य एक परिमेय संख्या $\frac{3}{2}$ है। 1 और $\frac{3}{2}$ के मध्य एक अन्य परिमेय संख्या $\frac{5}{4}$ है।

संख्या रेखा पर दो परिमेय संख्याओं में कितनी भी निकटता क्यों ना हो, उनका माध्य ज्ञात करके आप सदैव उनके मध्य एक और परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए, 1 और $\frac{3}{2}$ के मध्य एक परिमेय संख्या को आप उनका माध्य ज्ञात करके प्राप्त कर सकते हैं—

$$\frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

यह स्पष्ट करने का प्रयास कीजिए कि दो परिमेय संख्याओं a और b का माध्य, जो $\frac{(a+b)}{2}$ है, सदैव a और b के मध्य स्थित एक परिमेय संख्या ही क्यों होती है?



चित्र 3.9

इसका अर्थ यह है कि संख्या रेखा पर किन्हीं दो बिंदुओं के मध्य अनंत परिमेय संख्याएँ विद्यमान होती हैं। ऐसा प्रतीत होता है कि परिमेय संख्याएँ संख्या रेखा को अवश्य ही भर देती हैं और रिक्तता की कोई भी संभावना शेष नहीं रहती है, परंतु क्या वास्तव में ऐसा है?

प्रश्नावली 3.4

1. एक ही संख्या रेखा पर $\frac{2}{3}, -\frac{5}{4}$ और $1\frac{1}{2}$ को निरूपित कीजिए।
2. अनिवार्य रूप से $-\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4}$ के मध्य विद्यमान तीन भिन्न परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

3. व्यंजक $\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{5}{12}\right)$ का सरलीकरण कीजिए।

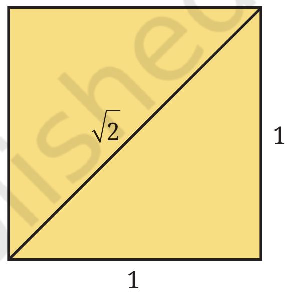
4. एक दर्जी के पास $15\frac{3}{4}$ मीटर परिष्कृत रेशमी कपड़ा है। यदि एक कुर्ता बनाने के लिए $2\frac{1}{4}$ मीटर रेशमी कपड़े की आवश्यकता होती है तो दर्जी कुल कितने कुर्ते बना सकता है?

5. 3.1415 और 3.1416 के मध्य तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

*6. क्या आप किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के मध्य एक परिमेय संख्या ज्ञात करने की किसी अन्य विधि सोच सकते हैं?

3.5 अपरिमेय संख्याएँ

शताब्दियों तक गणितज्ञों की यह धारणा बनी हुई थी कि इस ब्रह्माण्ड में प्रत्येक मापनीय लंबाई को दो पूर्णांकों के अनुपात में व्यक्त किया जा सकता है। यद्यपि, जब बौधायन ने 800 सामान्य संवत पूर्व के आस-पास *शुल्बसूत्र* (जटिल ज्यामितीय अग्नि वेदियों के निर्माण की निर्देश-पुस्तिका) की रचना की, उनके समक्ष शीघ्र ही ऐसी मापें उत्पन्न हो गईं, जो भिन्नों के रूप में व्यक्त नहीं की जा सकती थीं। कुछ शताब्दियों के पश्चात ऐसी ही समस्याएँ ग्रीकों के समक्ष भी आईं।



चित्र 3.10

एक ऐसे वर्ग पर विचार कीजिए, जिसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई 1 इकाई हो। बौधायन–पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार, विकर्ण की लंबाई d सूत्र $1^2 + 1^2 = d^2$ दी जाती है। इस प्रकार, $d^2 = 2$ है। अत: विकर्ण की लंबाई $\sqrt{2}$ है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या $\sqrt{2}$ को एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है?

जैसा कि आपने कक्षा 8 में अध्ययन किया था, इसका उत्तर 'नहीं' है! हम शीघ्र ही पुनः देखेंगे कि ऐसा क्यों होता है! संख्या रेखा पर निरूपित वे संख्याएँ, जो पूर्णांकों के अनुपात के रूप में व्यक्त नहीं की जा सकती हैं, **अपरिमेय संख्याएँ** कहलाती हैं।

3.5.1 $\sqrt{2}$ की अपरिमेयता की उपपत्ति

$\sqrt{2}$ की अपरिमेयता को सर्वप्रथम हिप्पासस नामक गणितज्ञ ने सिद्ध किया था, जो पाइथागोरस विद्यालय का एक सदस्य था (लगभग 400 सामान्य संवत पूर्व के आस-पास)। $\sqrt{2}$ क्यों अपरिमेय है, इसकी व्याख्या के लिए उन्होंने एक कुशाग्र तकनीक का उपयोग किया, जिसे **विरोधाभास द्वारा उपपत्ति**

© NCERT not to be republished

कहा जाता है। इसके नाम के अनुरूप इस विधि में हम जो सिद्ध करना चाहते हैं, उसके विपरीत कल्पना कर लेते हैं और यह प्रदर्शित करते हैं कि यह कल्पना तार्किक विरोधाभास उत्पन्न करती है।

प्रमाण — हम प्रमाण की व्याख्या कई चरणों में करेंगे।

चरण 1 — कल्पना — मान लीजिए, $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए इसे सरलतम भिन्न $\frac{p}{q}$ जबकि $q \neq 0$ रूप में लिखा जा सकता है। (इसका अभिप्राय यह है कि p और q ऐसे पूर्णांक हैं जिनका 1 के अतिरिक्त कोई भी सार्व गुणनखंड नहीं है अर्थात वे सह-अभाज्य संख्याएँ हैं।)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

चरण 2 — समीकरण के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर —

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

चरण 3 — दोनों पक्षों को q^2 से गुणा करने पर —

$$2q^2 = p^2$$

चरण 4 — p के लिए निगमन —

चूँकि p^2 किसी पूर्णांक का दोगुना है अत: p^2 को एक सम संख्या होना चाहिए। यदि एक संख्या का वर्ग सम संख्या है तो वह संख्या स्वयं भी सम होगी। इसलिए p एक सम पूर्णांक है। मान लीजिए, $p = 2k$ (जहाँ k एक पूर्णांक है)।

चरण 5 — चरण 3 के समीकरण में $p = 2k$ को पुनः प्रतिस्थापित कीजिए —

$$2q^2 = (2k)^2$$

$$2q^2 = 4k^2$$

चरण 6 — दोनों पक्षों को 2 से विभाजित कीजिए —

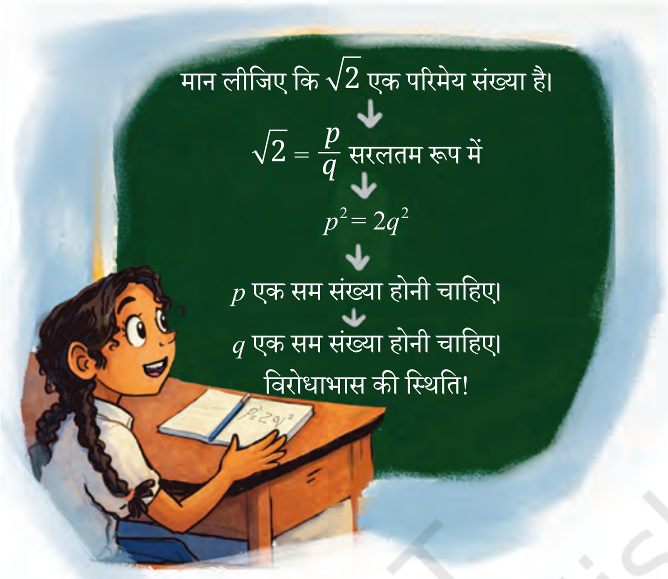
$$q^2 = 2k^2$$

चरण 7 — q के लिए **निगमन** — अब हम देखते हैं कि q^2 किसी पूर्णांक k^2 का दोगुना है। इसका आशय यह है कि q^2 एक सम संख्या है और इसी कारण q को भी आवश्यक रूप से एक सम पूर्णांक होना चाहिए।

चरण 8 — विरोधाभास — हमने यह निगमित किया कि p एक सम संख्या है और q एक सम संख्या है। इसका अर्थ यह है कि दोनों का सार्व गुणनखंड 2 है। यद्यपि चरण 1 में हमने यह माना था कि $\frac{p}{q}$ अपने सरलतम रूप में है और इनका कोई भी सार्व गुणनखंड नहीं है!

चूँकि हमारे तार्किक चरण त्रुटिहीन हैं इसलिए हमारी प्रारंभिक कल्पना असत्य है। अत: $\sqrt{2}$ को एक भिन्न के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। यह अपरिमेय है।

© NCERT not to be republished



सोचिए और विचार कीजिए

विरोधाभास द्वारा उपपत्ति का उपयोग करते हुए $\sqrt{3}$ की अपरिमेयता सिद्ध करने का प्रयत्न कीजिए। क्या यह विधि $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ या $\sqrt{10}$ के लिए भी सहायक सिद्ध होगी।

3.5.2 $\sqrt{n}$ लंबाई की संरचना विधि

सोचिए और विचार कीजिए

हमने पूर्व में देखा है कि एक ऐसी रेखा कैसे प्राप्त की जाए, जिसकी लंबाई एक परिमेय संख्या हो। ऐसी रेखाएँ कैसे प्राप्त कर सकते हैं जिनकी लंबाई अपरिमेय हो?

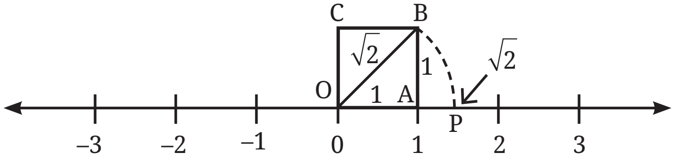
उदाहरण के लिए, $\sqrt{2}$ लंबाई के एक रेखाखंड के निर्माण और संख्या रेखा पर उसकी स्थिति प्रदर्शित करने के लिए हम निम्नलिखित चरणबद्ध प्रक्रिया का अनुसरण कर सकते हैं—

चरण 1— संख्या रेखा पर हम OA = 1 इकाई का माप लेते हैं और A से OA पर एक लंब खींचते हैं (देखिए चित्र 3.11)।

चरण 2— इस लंब रेखा पर हम बिंदु B को इस प्रकार अंकित करते हैं कि AB = 1 इकाई हो और मूलबिंदु को B से मिला देते हैं। स्पष्ट है कि OB = $\sqrt{2}$ इकाई है।

© NCERT not to be republished

चरण 3 — 'O' को केंद्र मानकर और OB को त्रिज्या लेकर, हम परकार से एक चाप खींचते हैं जो संख्या रेखा को बिंदु P पर प्रतिच्छेद करता है। स्पष्ट है कि OP = $\sqrt{2}$ इकाई है। अतः P अपरिमेय संख्या $\sqrt{2}$ को प्रदर्शित करता है।



चित्र 3.11 — अपरिमेय लंबाइयों की रचना करना एवं उन्हें संख्या रेखा पर दर्शाना

सोचिए और विचार कीजिए

इस विधि को मापनी और परकार के उपयोग से $\sqrt{3}$ और $\sqrt{5}$ लंबाई के रेखाखंडों की रचना करने के लिए विस्तारित कीजिए। इस विधि को किसी भी $\sqrt{n}$ रूप की लंबाई के रेखाखंड की रचना करने के लिए व्यापकीकृत कीजिए, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

3.5.3 पाई (π) की कहानी और माधव की अनंत श्रेणियाँ

पाई (π) एक अन्य प्रसिद्ध अपरिमेय संख्या है, जो वृत्त की परिधि और व्यास का अनुपात होता है। शताब्दियों से गणितज्ञ π के लिए भिन्नात्मक सन्निकट मान को अपेक्षाकृत बेहतर करने हेतु प्रयासरत रहे हैं। आर्यभट (499 सामान्य संवत) ने π का अति सटीक सन्निकट मान $\frac{3927}{1250} = 3.1416$ दिया, परंतु उन्होंने बताया था कि यह केवल आसन्न (सन्निकट मान) है और इंगित किया कि π के लिए पूर्णतः सटीक भिन्न संभवतः ज्ञात नहीं की जा सकती।

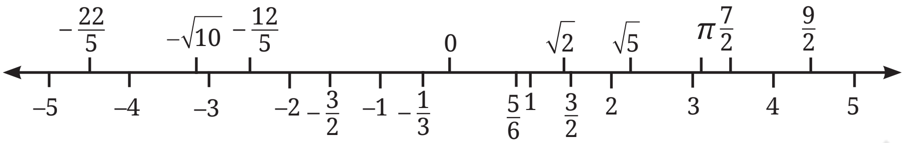
यद्यपि π अपरिमेय है (लैबर्ट ने 1761 ई. में इसे औपचारिक रूप से सिद्ध कर दिया था), किसी एक भिन्न (या परिमित रूप से अनेक भिन्नों) द्वारा π को कभी भी पूर्णतः सटीक रूप से व्यक्त अथवा सूत्रित नहीं किया जा सकता। π के लिए प्रथम सटीक सूत्र चौदहवीं शताब्दी में **संगमग्राम के माधव** ने दिया, जिन्होंने केरल स्कूल ऑफ मैथेमेटिक्स की स्थापना की। माधव ने यह अनुभव किया कि एक अपरिमेय संख्या को व्यक्त करने के लिए आप केवल एक ही भिन्न का उपयोग नहीं कर सकते; आपको आवश्यक रूप से एक अनंत श्रेणी के योग का उपयोग करना होगा। उन्होंने गहन अनंत श्रेणी की खोज की —

$$\pi = 4 \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$$

हम जानते हैं कि इसका अर्थ है कि 2,100 या एक लाख पदों का योग करने का क्या अर्थ होता है। अनंत पदों के योगफल ज्ञात करने का अभिप्राय क्या है? इसका अर्थ यह है कि अनंत अनुक्रम के पहले पद से प्रारंभ करते हुए जैसे-जैसे हम अधिक से अधिक पद जोड़ते जाएँगे, वैसे-वैसे हम π के

मान के निकट और निकट पहुँचते जाएँगे। आप उच्चतर कक्षाओं में अनंत श्रेणियों के संदर्भ में और भी अध्ययन करेंगे।

इस प्रकार, संख्या रेखा पर न केवल परिमेय संख्याएँ विद्यमान हैं अपितु इस पर अपरिमेय संख्याएँ भी सम्मिलित होती हैं। हमने देखा कि कैसे कुछ अपरिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाया जाता है और अब हम शेष अपरिमेय संख्याओं को सरलता से संख्या रेखा पर स्थित मान लेंगे।



चित्र 3.12

3.6 वास्तविक संख्याएँ— दशमलव और चक्रीय प्रतिरूप

जब हम परिमेय संख्याओं के सघन जाल को अपरिमेय संख्याओं की अपूरणीय रिक्तता से मिलाते हैं तब हम वास्तविक संख्याओं की अखंड सतत रेखा का निर्माण करते हैं।

एक परिमेय संख्या को एक अपरिमेय संख्या से अलग करने की सरलतम विधि उसके दशमलव प्रसार को देखना है।

3.6.1 परिमेय दशमलव— सांत और आवर्ती

यदि आप एक परिमेय संख्या के अंश को उसके हर से विभाजित करते हैं तो विभाजन की दो स्थितियों में से कोई एक घटित होगी—

1. **यह समाप्त हो जाता है**— अंततः विभाजन में शेषफल के रूप में 0 प्राप्त होता है। विभाजन परिमित दशमलव स्थानों तक समाप्त हो जाता है।

   उदाहरण 2— $\frac{3}{8} = 0.375$ (क्या आप यह बता सकते हैं कि किन परिमेय संख्याओं के लिए विभाजन परिमित दशमलव स्थानों तक समाप्त या सांत हो जाएगा?)

2. **यह आवर्ती होता है**— विभाजन की प्रक्रिया में शेषफल के रूप में कभी भी 0 की प्राप्ति नहीं हो पाती है, किंतु अंकों के अनुक्रम की अनंतत: पुनरावृत्ति होती रहती है।

   उदाहरण 3— $\frac{5}{11} = 0.454545... = 0.\overline{45}$

सोचिए और विचार कीजिए

$\frac{10}{3}$ और $\frac{11}{12}$ के दशमलव प्रसार ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए। दशमलव बिंदु के पश्चात आने वाले अंकों की पुनरावृत्ति के विषय में आप क्या अवलोकन करते हैं?

© NCERT not to be republished

कुछ परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण आवर्ती क्यों होता है? दीर्घ विभाजन प्रक्रिया का उपयोग करते हुए $\frac{1}{7}$ की गणना करने की कल्पना कीजिए। आप 7 से विभाजन कर रहे हैं। प्रत्येक चरण में संभावित शेषफल क्या होंगे? वे केवल 1, 2, 3, 4, 5 या 6 (0 क्यों नहीं) हो सकते हैं, क्योंकि शेषफल की संभावनाएँ सीमित होती हैं। अंततः शेषफल दूसरी बार अवश्य प्राप्त होगा। यदि एक शेषफल की पुनरावृत्ति होती है, तो संपूर्ण विभाजन प्रक्रिया की अनंत पुनरावृत्ति होती जाती है जिससे आवर्ती दशमलव की रचना होती है!

दशमलव प्रसार के प्रकार का अनुमान

रोचक बात यह है कि हम लंबी विभाजन प्रक्रिया अपनाए बिना यह अनुमान लगा सकते हैं कि किसी परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार सांत (समाप्त) होगा या सदैव चलता रहेगा!

इसके लिए हम हर के **अभाज्य गुणनखंडों** की सहायता लेते हैं।

मान लीजिए $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, अपने सरलतम रूप में एक परिमेय संख्या है (अर्थात p और q का 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखंड नहीं है)।

भिन्न $\frac{3}{20}$ पर विचार कीजिए। 20 का अभाज्य गुणनखंडन $2^2 \times 5$ है।

अतः, $\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \times 5} = \frac{3 \times 5}{2^2 \times 5 \times 5} = \frac{15}{100} = 0.15$ होगा।

हम 100 प्राप्त करने के लिए अंश और हर दोनों को 5 से गुणा करते हैं। इस प्रकार, हमें 0.15 प्राप्त होता है, जो एक सांत दशमलव है।

सोचिए और विचार कीजिए

$\frac{p}{q}$ का दशमलव प्रसार निश्चित रूप से सांत होगा, जब q का अभाज्य गुणनखंड केवल 2, केवल 5 अथवा 2 और 5 दोनों हो। क्या आप व्याख्या कर सकते हैं कि ऐसा क्यों है?

ऐसा इसलिए है क्योंकि ऐसी स्थितियों में हम अंश और हर को एक उपयुक्त संख्या से गुणा करके हर को 10 के घातांक के रूप में रूपांतरित कर सकते हैं।

परिमेय दशमलव का $\frac{p}{q}$ के रूप में रूपांतरण

स्थिति 1 — सांत दशमलव

हमने विगत कक्षाओं में अध्ययन किया है कि सांत दशमलव को $\frac{p}{q}$ के रूप में कैसे रूपांतरित किया जाता है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 4— 0.35 को $\frac{p}{q}$ के रूप में रूपांतरित कीजिए।

हम जानते हैं कि $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

आइए, अब हम समझते हैं कि एक असांत (अनवसानी) आवर्ती दशमलव को $\frac{p}{q}$ के रूप में कैसे रूपांतरित किया जाता है।

स्थिति 2 — शुद्ध आवर्ती दशमलव

एक शुद्ध आवर्ती दशमलव में दशमलव बिंदु के ठीक बाद एक अंक अथवा अंकों की शृंखला की पुनरावृत्ति प्रारंभ हो जाती है।

उदाहरण 5— $0.\overline{6}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में रूपांतरित कीजिए।

चरण 1 — मान लीजिए $x = 0.\overline{6}$ है।

चरण 2 — चूँकि एक अंक की पुनरावृत्ति हो रही है अत: दोनों पक्षों को $10^1 = 10$ से गुणा करने पर हमें $10x = 6.\overline{6}$ प्राप्त होता है।

चरण 3 — पहले समीकरण को दूसरे समीकरण में से घटाइए—

$10x - x = 6.\overline{6} - 0.\overline{6} = 6$

चरण 4 — $9x = 6$ को x का मान ज्ञात करने के लिए हल कीजिए।

इस प्रकार, $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ है।

उदाहरण 6— $0.\overline{45}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में रूपांतरित कीजिए।

मान लीजिए $x = 0.\overline{45}$ है।

चूँकि दो अंकों की पुनरावृत्ति हो रही है अत: दोनों पक्षों को $10^2 = 100$ से गुणा करने पर, हमें $100x = 45.\overline{45}$ प्राप्त होता है। पहले समीकरण को दूसरे समीकरण में से घटाने के पश्चात हमें $99x = 45$ प्राप्त होता है।

अत:, $x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$ है।

स्थिति 3 — सामान्य आवर्ती दशमलव

एक सामान्य आवर्ती दशमलव में दशमलव बिंदु के ठीक बाद कुछ अनावर्ती अंक होते हैं और इसके पश्चात अंकों का आवर्ती खंड होता है।

उदाहरण 7— $0.1\overline{6}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में रूपांतरित कीजिए।

चरण 1 — मान लीजिए $x = 0.1\overline{6}$ है।

चरण 2 — सर्वप्रथम दशमलव को इस प्रकार स्थानांतरित कीजिए कि आवर्ती खंड दशमलव बिंदु के ठीक बाद में आए।

चूँकि एक अंक अनावर्ती है तो हम $10^1 = 10$ से गुणा करते हैं और $10x = 1.\overline{6}$ प्राप्त होता है।

© NCERT not to be republished

चरण 3 — अब, एक पूर्ण आवर्ती चक्र को स्थानांतरित करने के लिए (1 अंक की पुनरावृत्ति), हम पुनः $10^1 = 10$ से गुणा करते हैं और $100x = 16.\overline{6}$ प्राप्त करते हैं।

चरण 4 — दूसरे स्थानांतरित समीकरण में से पहले स्थानांतरित समीकरण को घटाने पर हमें प्राप्त होता है —

$100x - 10x = 16.\overline{6} - 1.\overline{6}$ या $90x = 15$, अत: $x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

उदाहरण 8 — $2.35\overline{7}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में रूपांतरित कीजिए।

चरण 1 — मान लीजिए $x = 2.35\overline{7}$ है।

चरण 2 — यहाँ '35' अनावर्ती है (दो अंक) एवं '7' की पुनरावृत्ति होती है (1 अंक)। सर्वप्रथम, अनावर्ती अंकों को दशमलव बिंदु से पहले स्थानांतरित करने के लिए हम इसे $10^2 = 100$ से गुणा करते हैं, जिससे हमें $100x = 235.\overline{7}$ प्राप्त होता है।

चरण 3 — अब हम पूर्ण आवर्ती चक्र को स्थानांतरित करने के लिए $10^1 = 10$ से गुणा करते हैं, जिससे हमें $1000x = 2357.\overline{7}$ प्राप्त होता है।

चरण 4 — घटाने पर हमें $1000x - 100x = 2357.\overline{7} - 2357.\overline{7}$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार $900x = 2122$ और $x = \frac{2122}{900} = \frac{1061}{450}$ है।

उदाहरण 9 — $2.45\overline{37}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में रूपांतरित कीजिए।

चरण 1 — मान लीजिए $x = 2.45\overline{37}$ है।

चरण 2 — यहाँ '45' अनावर्ती है (दो अंक) एवं '37' की पुनरावृत्ति होती है (दो अंक)। सर्वप्रथम हम अनावर्ती अंकों को दशमलव से पहले स्थानांतरित करने के लिए $10^2 = 100$ से गुणा करते हैं और हमें $100x = 245.\overline{37}$ प्राप्त होता है।

चरण 3 — अब हम पूर्ण आवर्ती चक्र को स्थानांतरित करने के लिए $10^2 = 100$ से गुणा करते हैं, जिससे हमें $10000x = 24537.\overline{37}$ प्राप्त होता है।

चरण 4 — घटाने पर हमें $10000x - 100x = 24537.\overline{37} - 245.\overline{37}$ प्राप्त होता है।

अत: $9900x = 24292$ और $x = \frac{24292}{9900} = \frac{6073}{2475}$ है।

रूपांतरण के लिए सारांश सारणी

दशमलव का प्रकार	अनुसरण किए जाने वाले चरण
शुद्ध आवर्ती	• मान लीजिए x दशमलव संख्या है। • 10^n से गुणा कीजिए जहाँ n आवर्ती अंकों की संख्या है। • इसे मूल समीकरण से घटाइए और x ज्ञात करने के लिए हल कीजिए।

© NCERT not to be republished

सामान्य आवर्ती	• मान लीजिए x दशमलव संख्या है। • 10^m से गुणा कीजिए, जहाँ m अनावर्ती अंकों की संख्या है। पुनः 10^n से गुणा कीजिए, जहाँ n आवर्ती अंकों की संख्या है। • इसे पूर्व के समीकरण से घटाइए और x ज्ञात करने के लिए हल कीजिए।

3.6.2 चक्रीय संख्याओं का जादू

जब हम $\frac{1}{7}$ के लिए दशमलव की गणना करते हैं तो हमें 0.142857142857... या $0.\overline{142857}$ प्राप्त होता है। आवर्ती खंड 142857, गणित के सर्वाधिक रोचक रत्नों में से एक है, जो एक **चक्रीय संख्या** है। क्या होता है, जब हम इसे 1 से 6 तक के अंकों से गुणा करते हैं—

$$142857 \times 1 = 142857$$
$$142857 \times 2 = 285714$$
$$142857 \times 3 = 428571$$
$$142857 \times 4 = 571428$$
$$142857 \times 5 = 714285$$
$$142857 \times 6 = 857142$$

समान अंक ही चक्रीय क्रम में स्थान परिवर्तित करते जाते हैं! यह सुंदर आंतरिक संरचना परिमेय संख्या $\frac{1}{7}$ की विशेषता है।

3.6.3 अपरिमेय दशमलव—अव्यवस्थित एवं अनंत

अपरिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार में वस्तुत: अंक न कभी समाप्त होते हैं और न ही उनकी पुनरावृत्ति होती है। इनमें न कोई चक्रीय खंड होता है और न ही ऐसा प्रतिरूप होता है, जो अनंत रूप से आवर्ती हो। इसके उदाहरणों में सम्मिलित हैं—

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488 \ldots$$
$$\pi = 3.14159265358979323884 \ldots$$

प्रश्नावली 3.5

1. दीर्घ विभाजन किए बिना निम्नलिखित परिमेय संख्याओं में से यह निर्धारित कीजिए कि कौन-सी सांत दशमलव है और कौन-सी आवर्ती दशमलव है— $\frac{7}{20}$, $\frac{4}{15}$ और $\frac{13}{250}$, तत्पश्चात स्पष्ट रूप से दीर्घ विभाजन करते हुए अपने उत्तरों की जाँच कीजिए और इन परिमेय संख्याओं को दशमलव में भी व्यक्त कीजिए।

not to be republished © NCERT

2. $\frac{1}{13}$ के लिए दीर्घ विभाजन कीजिए। अंकों के आवर्ती खंड को पहचानिए। यदि आप $\frac{2}{13}$ की गणना करते हैं तो क्या यह चक्रीय गुण को प्रदर्शित करता है? अब आप $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{13}$ इत्यादि की गणना कीजिए। आपने क्या ध्यान किया?

3. निम्नलिखित संख्याओं को परिमेय या अपरिमेय के रूप में वर्गीकृत कीजिए—

   (i) $\sqrt{81}$

   (ii) $\sqrt{12}$

   (iii) 0.33333 …

   (iv) 0.123451234512345 …

   (v) 1.01001000100001… (इस प्रतिरूप पर ध्यान दीजिए— क्या इसमें एकल खंड की पुनरावृत्ति हो रही है?)

   (vi) 23.560185612239874790120

   परिमेय संख्याओं की स्थिति में उनके स्पष्ट भिन्न रूप को ज्ञात कीजिए।

4. संख्या $0.\overline{9}$ (अर्थात 0.99999) एक परिमेय संख्या है। बीजगणित (मान लीजिए $x = 0.\overline{9}$ है, 10 से गुणा कीजिए और घटाइए) का उपयोग करते हुए व्याख्या कीजिए कि 0.9 ठीक 1 के समान क्यों है?

*5. हम देख चुके हैं कि $\frac{1}{7}$ का आवर्ती खंड एक चक्रीय संख्या है। कुछ और संख्याओं (n) को ज्ञात करने का प्रयास कीजिए, जिनके प्रतिलोम $\left(\frac{1}{n}\right)$ आवर्ती खंड के ऐसे दशमलव उत्पन्न करते हों, जो चक्रीय हैं।

दशमलव निरूपण की अद्वितीयता का अभाव— जैसे $1 = \frac{10}{10} = \frac{100}{100}$ होता है, वैसे ही परिमेय संख्याओं के दो दशमलव रूप हो सकते हैं। प्रत्येक सांत दशमलव का एक वैकल्पिक रूप होता है, जिसमें 9 की पुनरावृत्ति होती है— 1.000... = 0.999..., 2.47000... = 2.46999...

क्या यह विस्मयकारी नहीं है कि 0.999 = 1 होता है? कई लोगों ने अनुमान लगाया होगा कि यह 1 से कुछ कम है।

3.7 निष्कर्ष— एक अनंत यात्रा

संख्याओं के संसार में हम एक लंबी यात्रा कर चुके हैं। प्राचीन भारत में हमने व्यतीत हो रहे दिनों का लेखा-जोखा रखने के लिए इशांगो की अस्थि पर उकेरे गए सरल खाँचों से लेकर शून्य की गहन

© NCERT not to be republished

दार्शनिक रिक्तता तक की सुदूर यात्रा की है। हमने ब्रह्मगुप्त के साथ शून्य की सीमा-रेखा के पार ऋणभार (ऋण) और ऋणात्मक संख्याओं के क्षेत्र में प्रवेश किया। हमने पाया कि संख्याओं के मध्य का अंतराल भिन्नों से अनंत रूप से सघन है, इसके बाद भी इसमें $\sqrt{2}$ और π जैसी अनंत-अनावर्ती-दशमलव अपरिमेय संख्याएँ मूल रूप से अंतर्निहित हैं। परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को संयुक्त करके हम सतत अखंड **वास्तविक संख्या रेखा** का निर्माण करते हैं। इस संपूर्ण ब्रह्मांड में प्रत्येक लंबाई, प्रत्येक तापमान, प्रत्येक वास्तविक भौतिक माप का इस संख्या रेखा पर अपना निवास है।

संख्याओं के संसार का उद्भव

हमारा संख्याओं का संसार सहस्र वर्षों के दौरान चरणबद्ध रूप से विकसित हुआ है जिससे मानवीय आवश्यकताओं की पूर्ति की जा सके—

- **प्राकृत संख्याएँ (N)**— मूलभूत गणन संख्याएँ (1, 2, 3, ...) हैं। ये पूर्णांकों के समूह में सम्मिलित होती हैं।
- **पूर्णांक (Z)**— इनमें शून्य और ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित होती हैं {..., −2, −1, 0, 1, 2,...}। ये बाद में परिमेय संख्याओं के समूह में समाहित हो जाती हैं।
- **परिमेय संख्याएँ (Q)**— इसमें $\frac{p}{q}$ रूप के सभी भिन्न सम्मिलित होते हैं, जहाँ p, q पूर्णांक और $q \neq 0$ है। वे उन संख्याओं के भी रूप में होती हैं जो सांत दशमलव (जैसे 0.135) और आवर्ती दशमलव (जैसे $0.\overline{142857}$) होती हैं।
- **अपरिमेय संख्याएँ (I)**— ये संख्याएँ उपरोक्त संख्याओं से पृथक होती हैं। इस प्रकार की संख्याओं को भिन्नों के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है (जैसे $\sqrt{2}$, π, $\sqrt{10}$) और न ही इन्हें सांत और आवर्ती दशमलव के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
- **वास्तविक संख्याएँ (R)**— **परिमेय** और **अपरिमेय** संख्याएँ साथ मिलकर पूरी वास्तविक संख्या रेखा का निर्माण करती हैं।

not to be republished

चित्र 3.13

क्या यह यात्रा समाप्त हो चुकी है? क्या वास्तविक संख्या रेखा से परे और अधिक संख्याओं के अन्वेषण की संभावना शेष है?

सोचिए और विचार कीजिए

इस पहेली पर विचार कीजिए कि -1 का वर्गमूल क्या है? हम जानते हैं कि $1 \times 1 = 1$ होता है। हम यह भी जानते हैं कि $(-1) \times (-1) = 1$ होता है। ऐसी कोई भी वास्तविक संख्या नहीं है कि जब उसे स्वयं से गुणा करें तो परिणाम ऋणात्मक संख्या प्राप्त हो। अत: $\sqrt{-1}$ का संख्या रेखा पर अस्तित्व नहीं है।

इसके समाधान के लिए, गणितज्ञों ने इस संख्या-रेखा से पूर्णतः विमुख संख्याओं के एक नए आयाम का आविष्कार किया, जिसे i वर्ण द्वारा निरूपित किया गया, जो **काल्पनिक संख्याओं** के लिए प्रयुक्त होता है। यद्यपि ये संख्याएँ काल्पनिक लगती हैं, तथापि ये आधुनिक विद्युत अभियांत्रिकी, क्वांटम यांत्रिकी और उस तकनीक के लिए अनिवार्य हैं जो आपके मोबाइल को ऊर्जा देती हैं। परंतु यह यात्रा आगामी वर्ष के लिए है। अभी आप वास्तविक संख्याओं के विषय में अपने ज्ञान को सुदृढ़ कीजिए क्योंकि ब्रह्मांड व्यापक रूप से इनकी ही भाषा में लिपिबद्ध है।

अंतिम प्रश्नावली

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को दीर्घ विभाजन की प्रक्रिया के माध्यम से सांत दशमलव या अनावर्ती और आवर्ती दशमलव (जो भी उपयुक्त हो) में रूपांतरित कीजिए—

   (i) $\frac{3}{50}$ (ii) $\frac{2}{9}$

2. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

3. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में रूपांतरित कीजिए—

   (i) 12.6 (ii) 0.0120 (iii) $3.0\overline{52}$

   (iv) $1.2\overline{35}$ (v) $0.\overline{23}$ (vi) $2.0\overline{5}$

   (vii) $2.12\overline{5}$ (viii) $3.12\overline{5}$ (ix) $2.\overline{1625}$

4. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए—

   (i) 0.532 (ii) $1.1\overline{5}$

© NCERT not to be republished

5. 3 और 4 के मध्य 6 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

6. $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{5}$ के मध्य 5 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

7. $\frac{1}{6}$ और $\frac{2}{5}$ के मध्य 5 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

8. यदि $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=\frac{16}{15}$ है तो परिमेय संख्या x ज्ञात कीजिए।

9. मान लीजिए a और b दो ऐसी शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं कि $a+\frac{1}{b}=0$ है।
कोई संख्यात्मक मान निर्दिष्ट किए बिना निर्धारित कीजिए कि ab धनात्मक है या ऋणात्मक। अपने उत्तर को सत्यापित कीजिए।

10. एक परिमेय संख्या का सांत दशमलव प्रसार है व जिसका अंतिम शून्येतर अंक चौथे दशमलव स्थान पर है। प्रदर्शित कीजिए कि ऐसी संख्या को $\frac{p}{10^4}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p एक पूर्णांक है जो 10 से अविभाज्य है। क्या यह आवश्यक है कि इस परिमेय संख्या का हर जब अपने सरलतम रूप में लिखा जाता है तो वह 2^4 या 5^4 से विभाज्य हो? कारण बताइए।

11. विभाजन किए बिना यह निर्धारित कीजिए कि $\frac{18}{125}$ का दशमलव प्रसार सांत है या असांत। यदि यह सांत है तो दशमलव स्थानों की संख्या बताइए।

12. अपने सरलतम रूप में एक परिमेय संख्या का हर $2^3 \times 5$ है। इसके दशमलव प्रसार में कितने दशमलव स्थान होंगे? अपने उत्तर की व्याख्या कीजिए।

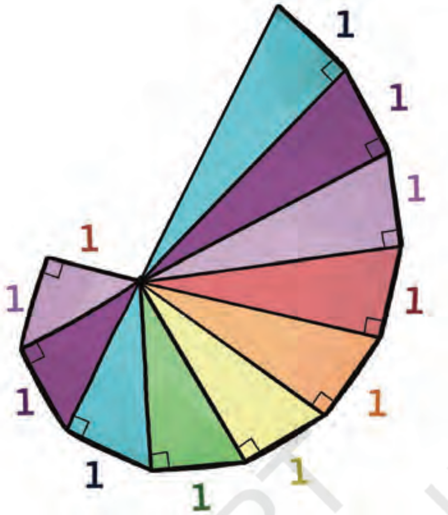
*13. मान लीजिए $a=\frac{7}{12}$ और $b=\frac{5}{6}$ है। a और b दोनों को $\frac{k_1}{m}$ और $\frac{k_2}{m}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ k_1, k_2 और m पूर्णांक हैं और $k_2 - k_1 > 6$ है। समान हर m का उपयोग करते हुए a और b के मध्य स्थित ठीक पाँच भिन्न परिमेय संख्याएँ लिखिए, जिनके अंश पूर्णांक हों। स्पष्ट कीजिए कि इस विधि से दो परिमेय संख्याओं a और b के मध्य स्थित ऐसी n परिमेय संख्याओं को ज्ञात करने के लिए $k_2 - k_1 > n + 1$ प्रतिबंध क्यों आवश्यक है।

*14. तीन परिमेय संख्याएँ x, y, z इस प्रकार हैं कि $x + y + z = 0$ और $xy + yz + zx = 0$ प्रतिबंध संतुष्ट होते हैं। प्रदर्शित कीजिए कि सभी परिमेय संख्याएँ x, y, z एक साथ आवश्यक रूप से शून्य ही होंगी।

*15. प्रदर्शित कीजिए कि परिमेय संख्या $\frac{(a+b)}{2}$, परिमेय संख्याओं a और b के मध्य स्थित है।

© NCERT not to be republished

16. चित्र 3.14 (जिसे वर्गमूल सर्पिल कहा जाता है) में प्रदर्शित सभी समकोण त्रिभुजों के कर्णों की लंबाई ज्ञात कीजिए।



चित्र 3.14 — वर्गमूल सर्पिल

© NCERT not to be republished

सारांश

इस अध्याय में आपने निम्नलिखित संकल्पनाओं का अध्ययन किया —

- **प्राकृत संख्याएँ (N)** गणन संख्याएँ {1, 2, 3, ...} होती हैं जिनका उद्भव हजारों वर्षों पूर्व मानव की गिनती करने की आवश्यकता के फलस्वरूप हुआ था।
- **शून्य की संकल्पना** को दार्शनिकों द्वारा भारत में विधिवत रूप से प्रस्तुत किया गया था और इसके उपरांत ब्रह्मगुप्त (629 सामान्य संवत) ने रिक्तता (शून्यता) की दार्शनिक स्थिति को एक वास्तविक संख्या में रूपांतरित किया, जिसके आधार पर व्यक्ति अंकीय संक्रियाएँ कर सकता है। ब्रह्मगुप्त ने ऋणात्मक संख्याओं अर्थात 0 से छोटी संख्याओं का भी परिचय करवाया।
- **पूर्णांक (Z),** संख्या रेखा को 1 से बाईं ओर 0 के साथ-साथ उन ऋणात्मक संख्याओं को सम्मिलित कर विस्तार देता है, जिन्हें ब्रह्मगुप्त ने ऐतिहासिक रूप से 'धन-संपत्ति' (धन) के विपरीत ऋणभार (ऋण) के रूप में वर्गीकृत किया था।
- **ब्रह्मगुप्त के नियम,** प्रतीकात्मक चिह्नों के साथ अंकगणित के लिए एक सुदृढ़ रूपरेखा को प्रस्तुत करते हैं, जिसमें 'दो ऋणों का गुणनफल धन होता है'($- \times - = +$) जैसे नियम के साथ-साथ शून्य के नियम सम्मिलित हैं।

- **परिमेय संख्याओं (Q)** को ऐसी किसी भी संख्या के रूप में परिभाषित किया गया है जिसे अनुपात $\frac{p}{q}$ (जहाँ p और q पूर्णांक और $q \neq 0$ है) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। ब्रह्मगुप्त ने परिमेय संख्याओं के योग, घटाव, गुणन और विभाजन के औपचारिक नियमों को भी विधिवत रूप से प्रस्तुत किया।
- **परिमेय संख्याएँ सघन** होती हैं। इसका अर्थ यह है कि किन्हीं भी दो परिमेय संख्याओं के मध्य सदैव एक परिमेय संख्या स्थित होती है।
- **अपरिमेय संख्याएँ,** $\sqrt{2}$ और π जैसे वे मान होते हैं, जिन्हें भिन्नों के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। उनका अस्तित्व प्रमाणित करता है कि संख्या रेखा पर रिक्त स्थान होते हैं जिनकी पूर्ति केवल परिमेय संख्याएँ नहीं कर सकती हैं। किसी संख्या की अपरिमेयता का प्रथम प्रमाण $\sqrt{2}$ था जिसे हिप्पासस (लगभग 400 सामान्य संवत पूर्व) द्वारा दिया गया था। यह विरोधाभास द्वारा उपपत्ति थी। π की अपरिमेयता का प्रमाण स्विस गणितज्ञ जोहान्न लैम्बर्ट ने 1761 में दिया था (इस संदर्भ में यह संदेह है कि π की अपरिमेयता का प्रमाण आर्यभट ने 499 सामान्य संवत में दिया था)।
- **वास्तविक संख्याएँ (R)** सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का पूर्ण संघ है, जो पूर्ण रूप से सतत एवं अखंड रेखा का निर्माण करती हैं, जहाँ प्रत्येक वास्तविक भौतिक माप के लिए एक संगत बिंदु विद्यमान है।
- **दशमलव प्रसार** परिमेय बनाम अपरिमेय के लिए एक गणितीय युक्ति के रूप में कार्य करता है। परिमेय संख्याएँ सदैव सांत अथवा आवर्ती दशमलव के रूप में होती हैं जबकि अपरिमेय संख्याएँ अनंत चलने वाले अनावर्ती दशमलव के रूप में होती हैं।
- **चक्रीय संख्याओं** का उदाहरण $\frac{1}{7}$ के दशमलव प्रसार में देखे गए आवर्ती खंड के अंक (142857) थे, जो परिमेय संख्याओं में निहित सौम्य और सममित आंतरिक प्रतिरूपों को प्रकट करती हैं।
- **काल्पनिक संख्याओं** को अंतिम संकल्पनात्मक सीमांतक के रूप में $\sqrt{-1}$ जैसी संक्रियाओं को हल करने के लिए प्रस्तुत किया गया है, जिनका हल वास्तविक संख्या रेखा पर नहीं किया जा सकता और जिनके लिए गणित के एक नवीन आयाम की आवश्यकता है।

© NCERT not to be republished