0920CH04

4 बीजीय सर्वसमिकाओं का अन्वेषण

4.1 भूमिका

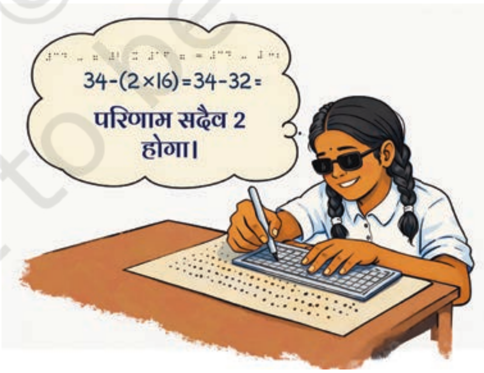
पिछले अध्यायों में आपने रैखिक बहुपदों (लीनियर पॉलिनॉमियल) का अध्ययन किया और यह सीखा कि कैसे इनका उपयोग वास्तविक जीवन की समस्याओं को व्यक्त करने तथा उनका समाधान करने में किया जा सकता है। आपने रैखिक समीकरणों का भी अध्ययन किया और यह ज्ञात किया कि वे कैसे विभिन्न राशियों के मध्य संबंधों को दर्शाते हैं।

इस अध्याय में हम एक कदम आगे बढ़ते हुए बीजीय सर्वसमिकाओं (अल्जेब्रिक आइडेंटिटीज) का अन्वेषण एवं अध्ययन करेंगे। ये गणित के विशेष नियम होते हैं, जो न केवल जटिल गणनाओं को सरल बनाते हैं अपितु बीजीय व्यंजकों को कुशलतापूर्वक हल करने में भी सहायक होते हैं।

आइए, कुछ सरल प्रतिरूपों को समझते हुए प्रारंभ करते हैं।

उदाहरण 1— किन्हीं तीन क्रमागत वर्ग संख्याओं पर विचार कीजिए। उदाहरण के लिए, 1, 4 और 9 को लीजिए। इनमें से सबसे छोटी और सबसे बड़ी वर्ग संख्या को जोड़िए। इस प्रकार, $1 + 9 = 10$ प्राप्त होता है। अब इस योगफल में से मध्य की वर्ग संख्या का दोगुना घटाइए। इससे $10 - (2 \times 4) = 10 - 8 = 2$ प्राप्त होता है।

अब इस प्रक्रिया के माध्यम से तीन अन्य क्रमागत वर्ग संख्याओं के दूसरे समूह के साथ हल करने का प्रयास कीजिए। मान लीजिए, तीन क्रमागत वर्ग संख्याएँ 9, 16, 25 हैं।



उदाहरण के लिए, क्रमागत वर्ग संख्याओं 25, 36, 49 पर विचार कीजिए।

इस नियम से हमें $(25 + 49) - (2 \times 36) = 74 - 72 = 2$ प्राप्त होता है।

इस प्रक्रिया को तीन क्रमागत वर्ग संख्याओं के अन्य समूह के साथ दोहराइए। परिणाम सदैव 2 ही प्राप्त होता है!

© NCERT not to be republished

यह प्रतिरूप आश्चर्यजनक लग सकता है परंतु हम शीघ्र ही इसके पीछे के कारण का बीजगणित के माध्यम से पता लगाएँगे।

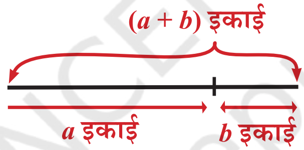
सोचिए और विचार कीजिए

इस प्रकार के और अधिक प्रतिरूप खोजने का प्रयास कीजिए। उदाहरण के लिए, आप चार क्रमागत वर्ग लेकर देख सकते हैं कि क्या आप कोई प्रतिरूप ढूँढ़ पाते हैं।

4.2 सर्वसमिकाओं का दृश्यांकन

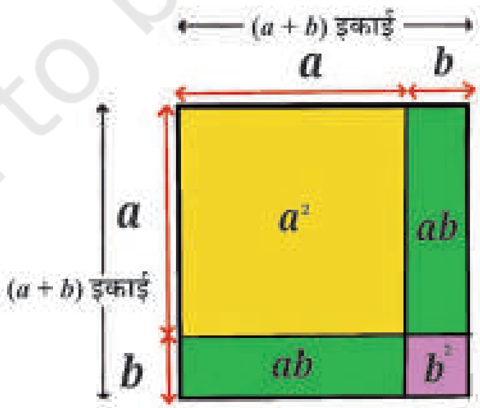
इस अनुभाग में हम विगत कक्षाओं में सीखी गई कुछ बीजीय सर्वसमिकाओं पर पुनर्विचार करेंगे और ज्यामितीय निदर्शों (मॉडलों) की सहायता से उनके दृश्यांकन का प्रयास करेंगे। विशेष रूप से हम पदों को दर्शाने के लिए वर्गों और आयतों का उपयोग करेंगे।

दो रेखाखंड लीजिए, जिनकी लंबाइयाँ क्रमशः a और b इकाई हैं तथा इन दोनों इकाइयों को मिलाकर चित्र 4.1 में दर्शाए अनुसार $(a + b)$ इकाई का एक लंबा रेखाखंड बनाइए।



चित्र. 4.1

अब हम $(a + b)$ इकाई भुजा वाला एक वर्ग बना सकते हैं और इसे चित्र 4.2 में दर्शाए अनुसार छोटे वर्गों तथा आयतों में विभाजित कर सकते हैं।



चित्र 4.2 — $(a + b)$ इकाई भुजा वाला वर्ग

© NCERT not to be republished

अवलोकन कीजिए कि बाहरी वर्ग का क्षेत्रफल $(a + b)^2$ है। बाहरी वर्ग के भीतर एक बड़ा वर्ग है, जिसका क्षेत्रफल a^2 है जबकि छोटे वर्ग का क्षेत्रफल b^2 है। दोनों आयतों में से प्रत्येक का क्षेत्रफल ab है। दोनों वर्ग साथ मिलकर बड़ा वर्ग बनाते हैं, निष्कर्षतः हम कह सकते हैं—

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

चित्र 4.2 से स्पष्ट है कि $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ है, जो a और b लंबाई के सभी रेखाखंडों के लिए मान्य है।

संख्याएँ a और b पर विचार कीजिए, जहाँ a और b रेखाखंडों की लंबाइयों को व्यक्त नहीं करते हैं। क्या होगा, जब a और b ऋणात्मक संख्याएँ हों? आइए, कुछ ऋणात्मक संख्याओं के लिए जाँचते हैं कि क्या तब भी यह समीकरण काम करेगा।

उदाहरण 2 — मान लीजिए, $a = -2$ और $b = -3$ है।

तो $(a + b) = -5$ और $(a + b)^2 = 25$ होगा।

साथ ही, $a^2 = 4$, $b^2 = 9$ और $2ab = 12$ होगा।

अतः $a^2 + 2ab + b^2 = 4 + 12 + 9 = 25$ है।

इस प्रकार, $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ यहाँ भी सत्य है!

अब मान लीजिए कि a और b परिमेय संख्याएँ हैं तथा $a = -\frac{2}{3}$ और $b = \frac{3}{4}$ है।

$$\text{तब } (a+b) = \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{12}$$

$$(a+b)^2 = \frac{1}{144}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{4}{9} - 1 + \frac{9}{16} = \frac{64 - 144 + 81}{144} = \frac{145 - 144}{144} = \frac{1}{144}$$

अतः $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ परिमेय संख्याओं के लिए भी सत्य प्रतीत होता है। परंतु हम अब भी निश्चित रूप से नहीं कह सकते कि क्या यह सर्वसमिका सभी संख्याओं के लिए सत्य है। इसे सत्यापित करने के लिए आइए, हम संख्याओं के वितरण गुणधर्म का उपयोग करके आगे की जाँच करें—

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

स्मरण कीजिए कि कक्षा 8 में आपको $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ से एक सर्वसमिका के रूप में परिचित करवाया गया था।

एक समीकरण और एक सर्वसमिका में क्या अंतर है?

© NCERT not to be republished

एक **बीजीय सर्वसमिका** वह समीकरण होता है, जो उसमें उपस्थित चर के सभी मानों के लिए सत्य होता है जबकि यह आवश्यक नहीं है कि एक समीकरण चर के सभी मानों के लिए सत्य हो।

उदाहरण के लिए, $x^2 - 1 = 24$ केवल $x = 5$ अथवा -5 के लिए ही सत्य है। इसलिए यह एक समीकरण है।

परंतु $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, x और y के सभी मानों के लिए सत्य है। अत: यह समीकरण एक सर्वसमिका भी है।

अब तक आपने देख लिया है कि $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ है। परंतु क्या आप यह पता लगा सकते हैं कि इनमें से बड़ा कौन-सा है?

उदाहरण के लिए, यदि $a = 10$ तथा $b = 2$ है तब $(a + b)^2$ और $a^2 + b^2$ के मान क्या होंगे?

$(a + b)^2 = (10 + 2)^2 = 12^2 = 144$ तथा $a^2 + b^2 = 10^2 + 2^2 = 104$ है।

अतः इस स्थिति में, $(a + b)^2 > a^2 + b^2$ है।

परंतु क्या यह सभी संख्याओं a और b के लिए सत्य है?

सोचिए और विचार कीजिए

1. यदि $(a + b)^2 < a^2 + b^2$ है तो a और b के विषय में आप क्या कह सकते हैं?
2. यदि $(a + b)^2 > a^2 + b^2$ है तो a और b के विषय में आप क्या कह सकते हैं?
3. कब $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ होगा?

क्या आपने अवलोकन किया कि $(a + b)^2$ और $a^2 + b^2$ दोनों ही धनात्मक हैं तो कौन-सा पद यह तय करेगा कि कौन बड़ा है? इसके लिए $(a + b)^2$ के विस्तार का उपयोग कीजिए।

हम सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का उपयोग व्यापक द्विपद व्यंजक के वर्ग को निकालने के लिए कर सकते हैं।

उदाहरण 3— आइए, $(5x + 2y)^2$ का विस्तार करने का प्रयास करते हैं। यहाँ $a = 5x$ तथा $b = 2y$ है।

तब $(5x + 2y)^2 = (5x)^2 + 2\,(5x)\,(2y) + (2y)^2 = 25x^2 + 20xy + 4y^2$ है।

हम अंकीय गणनाओं के लिए भी सर्वसमिका का उपयोग कर सकते हैं।

उदाहरण 4— 43^2 की गणना करने के लिए हम इस प्रकार लिख सकते हैं—

$(40 + 3)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 3 + 3^2 = 1600 + 240 + 9 = 1849$

not to be republished © NCERT

प्रश्नावली 4.1

1. सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का उपयोग करके निम्नलिखित का विस्तार कीजिए—

(i) $(7x + 4y)^2$ (ii) $\left(\frac{7}{5}x + \frac{3}{2}y\right)^2$ (iii) $(2.5p + 1.5q)^2$

(iv) $\left(\frac{3}{4}s+8t\right)^2$ (v) $\left(x+\frac{1}{2y}\right)^2$ (vi) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$

2. उपर्युक्त सर्वसमिका का उपयोग करते हुए निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए—
 (i) $(64)^2$ (ii) $(105)^2$ (iii) $(205)^2$

4.3 सर्वसमिकाओं का उपयोग करके बीजीय व्यंजकों का गुणनखंड करना

कुछ बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड ज्ञात करने में भी सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का उपयोग किया जा सकता है।

उदाहरण 5— बीजीय व्यंजक $x^2 + 4x + 4$ पर विचार कीजिए।

हम देखते हैं कि—

$x^2 = (x)^2$, $4 = 2^2$ और $4x = 2(2)(x)$ है।

अतः $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2(x)(2) + 2^2$ की तुलना $a^2 + 2(a)(b) + b^2$ से की जा सकती है, जहाँ $a = x$ और $b = 2$ है।

हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि $(x + 2)$, $x^2 + 4x + 4$ का एक गुणनखंड है।

उदाहरण 6— आइए, किसी अन्य बीजीय व्यंजक के गुणनखंड ज्ञात करने का प्रयास करें—

$36x^2 + 12x + 1$

इसे $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप में लिखने पर हमें प्राप्त होगा—

$36x^2 + 12x + 1 = (6x)^2 + 2(6x)(1) + 1^2$,

जहाँ $a = 6x$ तथा $b = 1$ है। इसलिए $36x^2 + 12x + 1 = (6x + 1)^2$ होगा

अत: $36x^2 + 12x + 1$ का एक गुणनखंड $(6x + 1)$ है।

उदाहरण 7— आइए, $50p^2 + 60pq + 18q^2$ का गुणनखंड करने का प्रयास करते हैं। इस स्थिति में a तथा b क्या होंगे?

ऐसे पद के विषय में सोचने का प्रयास कीजिए, जिसका वर्ग $50p^2$ हो। यह $\sqrt{50}p$ है। परंतु यदि हम वर्गमूल के चिह्न का उपयोग नहीं करना चाहते हैं तो हम इसे निम्न प्रकार से हल कर सकते हैं—

हम देखते हैं कि पदों $50p^2$, $60pq$ तथा $18q^2$ में 2 एक सार्व गुणनखंड है।

अत: $50p^2 + 60pq + 18q^2 = 2(25p^2 + 30pq + 9q^2)$ होगा।

आइए, अब व्यंजक $25p^2 + 30pq + 9q^2$ पर ध्यान देते हैं।

ऐसे पद के विषय में सोचिए, जिसका वर्ग $25p^2$ हो। $9q^2$ के विषय में क्या विचार है?

© NCERT not to be republished

$50p^2 + 60pq + 18q^2$

$= 2\left[(5p)^2 + 2(5p)(3q) + (3q)^2\right]$

$= 2\,(5p + 3q)^2$

यहाँ हमने 2 को सार्व गुणनखंड के रूप में बाहर निकालने के पश्चात सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का उपयोग करके व्यंजक $25p^2 + 30pq + 9p^2$ का गुणनखंड ज्ञात किया है।

अब तक दिए गए सभी उदाहरणों में हमने सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का उपयोग विभिन्न बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड ज्ञात करने के लिए किया है।

सोचिए और विचार कीजिए

यदि हम $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ में b के स्थान पर $-b$ रखें तो क्या होगा?

हमें $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ प्राप्त होता है, जो एक सर्वसमिका भी है और इसका उपयोग $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ की तरह ही किया जा सकता है।

आइए, उदाहरण 1 में देखे गए प्रतिरूप को पुनः देखते हैं। कोई भी तीन क्रमागत संख्याएँ $(n - 1)$, n तथा $(n + 1)$ के रूप में ली जा सकती हैं। इनके वर्ग क्रमशः $(n - 1)^2$, n^2 तथा $(n + 1)^2$ हैं।

सबसे छोटे और सबसे बड़े वर्ग का योगफल है—

$(n - 1)^2 + (n + 1)^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2$

इससे $2n^2$ को घटाने पर परिणाम 2 आएगा। अतः आपको सदैव 2 की प्राप्ति होगी! वास्तव में यह इस तथ्य का प्रमाण है कि यदि हम किन्हीं तीन क्रमागत वर्ग संख्याओं में सबसे छोटी और सबसे बड़ी संख्या के योगफल में से मध्य की संख्या के दोगुने को घटाते हैं तो हमें सदैव 2 प्राप्त होता है।

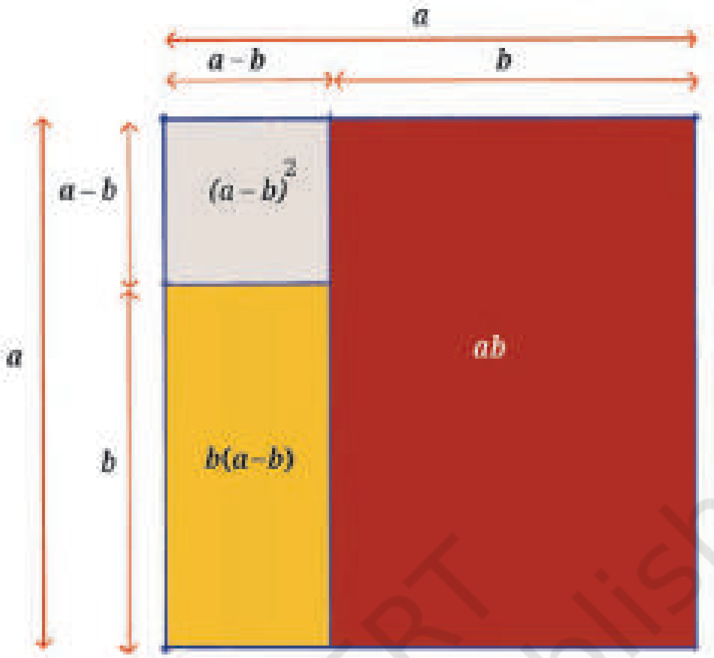
जैसे सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का उपयोग संख्याओं के वर्गों की प्राप्ति के लिए किया जा सकता है, वैसे ही हम $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ का भी उपयोग कर सकते हैं।

उदाहरण 8— मान लीजिए कि हमें 29^2 की गणना करनी है। हम इसे, इस प्रकार अभिव्यक्त कर सकते हैं—

$(30 - 1)^2 = 30^2 - 2 \times 30 \times 1 + 1^2 = 900 - 60 + 1 = 841$

आइए, सर्वसमिका $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ का दृश्यांकन करने के लिए हम a इकाई भुजा वाला एक वर्ग बनाते हैं और a को दो भागों में विभाजित करते हैं, एक भाग की लंबाई $(a - b)$ इकाई तथा दूसरे भाग की लंबाई b इकाई है। आकृति इस प्रकार दिखाई देगी।

not to be republished © NCERT



चित्र 4.3 — a इकाई भुजा वाला वर्ग

किसी बड़े वर्ग का क्षेत्रफल a^2 वर्ग इकाई है। छोटे वर्ग का क्षेत्रफल $(a - b)^2$ वर्ग इकाई है। बड़ा आयत ab वर्ग इकाई क्षेत्रफल का है जबकि छोटा आयत $b\ (a - b)$ वर्ग इकाई क्षेत्रफल का है। अतः $(a - b)^2$ प्राप्त करने के लिए हम बड़े वर्ग के क्षेत्रफल में से दोनों आयतों के क्षेत्रफल घटाते हैं।

इस प्रकार हमें प्राप्त होता है—

$$(a - b)^2 = a^2 - ab - b(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

प्रश्नावली 4.2

1. पूर्णत: गुणनखंडन कीजिए—

   (i) $9x^2 + 24xy + 16y^2$

   (ii) $4s^2 + 20st + 25t^2$

   (iii) $49x^2 + 28xy + 4y^2$

© NCERT not to be republished

(iv) $64p^2 + \frac{32}{3}pq + \frac{4}{9}q^2$

*(v) $3a^2 + 4ab + \frac{4}{3}b^2$

*(vi) $\frac{9}{5}s^2 + 6sv + 5v^2$

(**संकेत**— उदाहरण 7 में 2 को एक सार्व गुणनखंड के रूप में प्राप्त किया गया था। क्या इसी विधि का उपयोग ऊपर दिए गए प्रश्न (v) और (vi) में किया जा सकता है?)

2. सर्वसमिका $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ का उपयोग करके निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $(79)^2$ (ii) $(193)^2$ (iii) $(299)^2$

4.4 कुछ अन्य सर्वसमिकाएँ

क्या होगा, यदि हम तीन संख्याओं a, b और c के योगफल का वर्ग अर्थात $(a + b + c)^2$ ज्ञात करना चाहें?

आइए, $b + c$ को d से विस्थापित करते हैं।

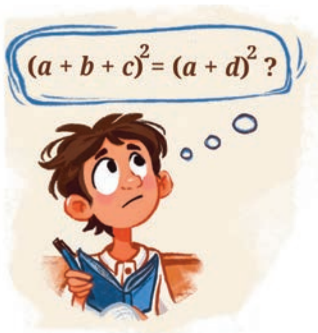
हमें यह पहले ही ज्ञात है कि $(a + d)^2 = a^2 + 2ad + d^2$ है।

इसलिए d को $(b + c)$ के स्थान पर रखने से हमें $a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2$ प्राप्त होगा।

अतः $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$ है।

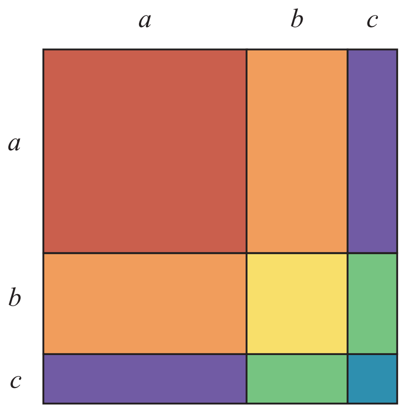
वास्तव में, इसे इस प्रकार स्मरण रखना अधिक सुविधाजनक होगा—

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$



आइए, चित्र 4.4 में दर्शाए अनुसार $a + b + c$ भुजा वाला एक वर्ग बनाकर इसकी ज्यामितीय व्याख्या करते हैं।

© NCERT not to be republished



चित्र 4.4— सर्वसमिका $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ को प्रदर्शित करता एक ज्यामितीय प्रदर्श

सोचिए और विचार कीजिए

चित्र 4.4 में दर्शाए गए वर्गों और आयतों को चिह्नित कीजिए, जिससे यह सर्वसमिका $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ को दर्शाए।

उदाहरण 9— आइए, इस सर्वसमिका का उपयोग किसी संख्या का वर्ग ज्ञात करने हेतु करें, मान लीजिए संख्या 119 है।

$$119^2 = (100 + 10 + 9)^2$$
$$= 100^2 + 10^2 + 9^2 + 2(100)(10) + 2(100)(9) + 2(10)(9)$$
$$= 10000 + 100 + 81 + 2000 + 1800 + 180 = 14161$$

अभी तक हमने नीचे दी गई तीन सर्वसमिकाओं को सत्यापित कर लिया है और इनका उपयोग गणना और बीजीय व्यंजकों के परिर्वतन में किया है—

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

प्रश्नावली 4.3

1. ऊपर दी गई सर्वसमिकाओं में से किसी एक सर्वसमिका का उपयोग करते हुए निम्नलिखित वर्ग ज्ञात कीजिए। सुनिश्चित कीजिए कि इनमें से कौन-सी सर्वसमिका का उपयोग गणना को सरल बनाता है—

© NCERT not to be republished

(i) 117^2 (ii) 78^2 (iii) 198^2

(ii) 214^2 (v) 1104^2 (vi) 1120^2

2. उपर्युक्त सर्वसमिकाओं का उपयोग करके गुणनखंड कीजिए—

(i) $16y^2 - 24y + 9$ (ii) $\frac{9}{4}s^2 + 6st + 4t^2$

(iii) $\frac{m^2}{9} + \frac{mk}{3} + \frac{k^2}{4} + 3nk + 2mn + 9n^2$ (iv) $\frac{p^2}{16} - 2 + \frac{16}{p^2}$

(v) $9a^2 + 4b^2 + c^2 - 12ab + 6ac - 4bc$

3. सर्वसमिका $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ का उपयोग करके निम्नलिखित का विस्तार कीजिए—

(i) $(p + 3q + 7r)^2$ (ii) $(3x - 2y + 4z)^2$

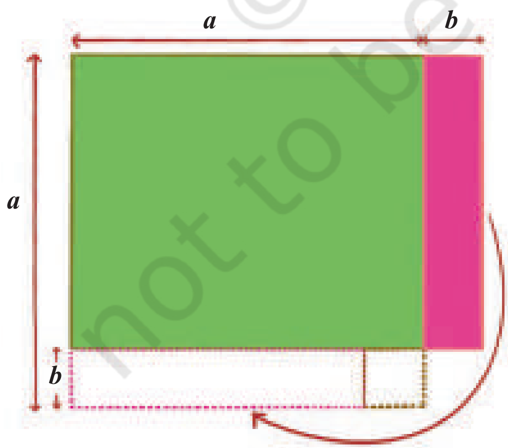
4. क्या यह एक सर्वसमिका है?

$$(a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (a-b-c)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$$

कक्षा 8 में आप एक अन्य सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ से परिचित हो चुके हैं।

यदि इसे $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$ के रूप में लिखा जाए तो यह और अधिक उपयोगी हो सकती है।

निम्नलिखित चित्र को देखिए। सर्वसमिका $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$ को स्वयं के लिए सिद्ध कीजिए।



चित्र 4.5

750 सामान्य संवत में 'श्रीधराचार्य' ने संख्याओं के वर्गों की शीघ्र गणना की विधि के रूप में इस सर्वसमिका को प्रस्तावित किया था। उदाहरण के लिए—

$$55^2 = (55 + 5)(55 - 5) + 5^2$$
$$= 60 \times 50 + 25$$
$$= 3000 + 25 = 3025$$

© NCERT not to be republished

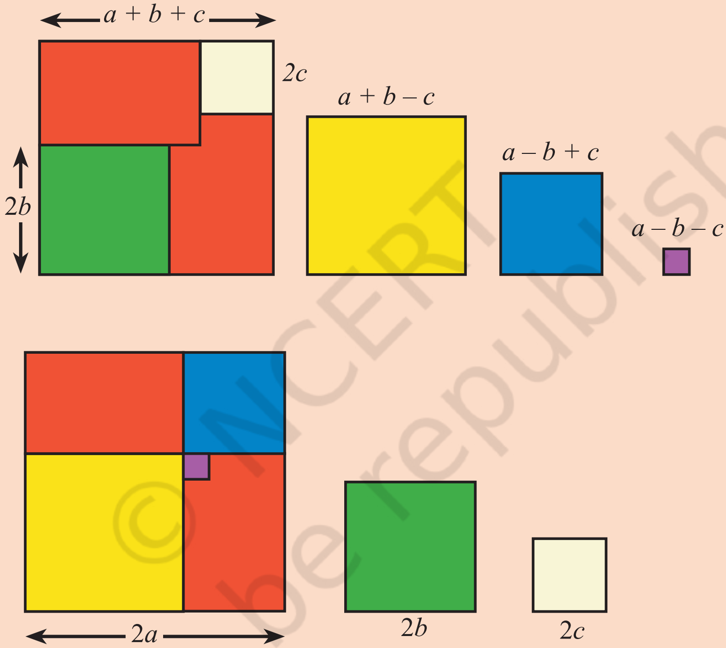
सोचिए और विचार कीजिए

1. उपयुक्त सर्वसमिका का उपयोग करके निम्नलिखित की गणना करने का प्रयास कीजिए—

   (i) 35^2 (ii) 65^2 (iii) 85^2 (iv) 105^2

   क्या आपने किसी रोचक प्रतिरूप का अवलोकन किया?

2. नीचे दिए गए चित्रों की दो पंक्तियों का अवलोकन कीजिए। ये एक बीजीय सर्वसमिका को दर्शाती हैं। इस सर्वसमिका की पहचान करने का प्रयास कीजिए—



चित्र 4.6

© NCERT not to be republished

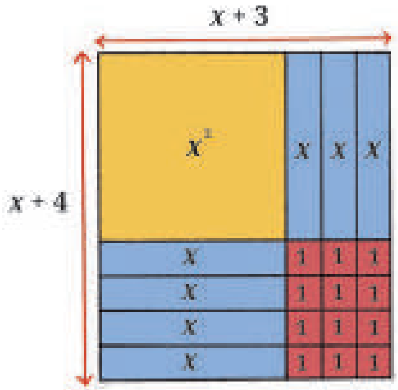
4.5 बीजीय टाइलों का उपयोग करके गुणनखंड करना

एक आयत पर विचार कीजिए, जिसकी भुजाएँ $(x + 3)$ तथा $(x + 4)$ इकाई हैं।

हम जानते हैं कि ऐसे आयत का क्षेत्रफल $(x + 3)\ (x + 4)$ वर्ग इकाई है।

वितरण गुणधर्म का उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 3x + 4x + 12 = x^2 + 7x + 12$$



चित्र 4.7 — $x^2 + 7x + 12$ का गुणनखंड

चित्र 4.7 बीजीय टाइलों का उपयोग करके $x + 3$ और $x + 4$ के गुणन को प्रदर्शित करने में सहायता करता है। व्यंजक $x + 3$ को एक x-टाइल और तीन इकाई टाइलों द्वारा दर्शाया गया है। इसी प्रकार $x + 4$ को एक x-टाइल और चार इकाई टाइलों द्वारा दर्शाया गया है। इन दोनों रैखिक व्यंजकों का गुणनफल बड़े आयत द्वारा प्रदर्शित होता है जिसमें एक x^2 टाइल, 7 x-टाइलें तथा 12 इकाई टाइलें सम्मिलित हैं।

ध्यान दीजिए कि $x^2 + 7x + 12$ में $7x$ को $3x + 4x$ के रूप में विभाजित किया गया है। इसे इस प्रकार दर्शाया गया है कि x^2-टाइल की दाईं ओर तीन x-टाइलें और x^2-टाइल के नीचे चार x-टाइलें व्यवस्थित की गई हैं। साथ ही 12 इकाई टाइलों को 3×4 के व्यूह में व्यवस्थित किया गया है। एक बार जब आयताकार व्यवस्था बन जाती है तो हम देखते हैं कि आयत की विमाएँ क्रमशः $x + 3$ और $x + 4$ इकाई हैं।

सोचिए और विचार कीजिए

मान लीजिए, $7x$ को $2x + 5x$ के रूप में विभाजित किया जाता है; क्या तब भी समान प्रकार की आयताकार व्यवस्था बनाई जा सकती है? अन्य संभावनाओं पर विचार कीजिए और परीक्षण कीजिए।

चित्र 4.7 हमें दो बीजीय सर्वसमिकाओं के दृश्यांकन में सहायता करता है—

(i) रैखिक व्यंजकों $x + 3$ और $x + 4$ को गुणा करने पर हमें सर्वसमिका $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$ प्राप्त होती है।

(ii) इसी प्रकार, व्यंजक $x^2 + 7x + 12$ को रैखिक गुणनखंडों $(x + 3)$ और $(x + 4)$ के रूप में गुणनखंडित किया जा सकता है, जिससे वही सर्वसमिका $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$ प्राप्त होती है।

सोचिए और विचार कीजिए

बीजीय टाइलों का उपयोग गुणनफलों को प्रदर्शित करने और गुणनखंड ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है—

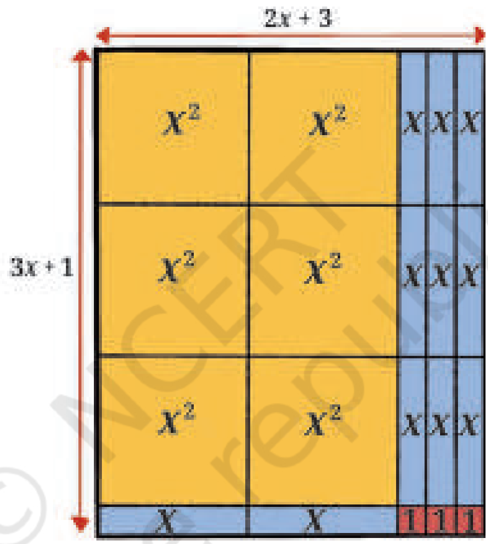
1. बीजीय टाइलों का उपयोग करते हुए $x + 2$ और $x + 3$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।
2. $x^2 + 11x + 30$ के लिए बीजीय टाइलों को इस प्रकार व्यवस्थित कीजिए कि आप उसके गुणनखंडों को देख सकें।

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

हमने देखा कि $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$ है।
साथ ही, $(x + 6)(x + 7) = x^2 + 13x + 42$ है।
इस प्रतिरूप का व्यापकीकरण करके $(x + a)(x + b)$ का व्यंजक ज्ञात कीजिए।

अब उस स्थिति पर विचार कीजिए, जहाँ हमारे पास चित्र 4.8 में दर्शाए अनुसार $2x + 3$ तथा $3x + 1$ भुजाओं वाला एक आयत है। आप इसके क्षेत्रफल $(2x + 3)(3x + 1)$ के विषय में क्या कहेंगे?



चित्र 4.8 — (2x + 3) × (3x + 1) को दर्शाने के लिए बीजीय टाइलों का उपयोग

समीकरण को सत्य सिद्ध करने हेतु उचित व्यंजकों द्वारा रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

$$(px + a)(qx + b) = (_____)x^2 + (_____)x + _____$$

साथ ही, वितरण गुणधर्म का उपयोग करते हुए अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

4.6 बीजीय टाइलों के उपयोग के बिना गुणनखंडन

बीजीय व्यंजक $x^2 + 7x + 12$ पर विचार कीजिए जिसे रैखिक पदों $x + 3$ तथा $x + 4$ के गुणन द्वारा प्राप्त किया गया था। हमने चित्र 4.7 में देखा भी है कि $7x$ को $3x + 4x$ के रूप में ऐसे विभाजित किया गया कि बीजीय टाइलों का उपयोग करके आयत बनाया जा सके। परंतु हम 'x पद के विभाजन' को टाइलों के उपयोग के बिना कैसे करेंगे?

उदाहरण 10 — आइए, $x^2 + 7x + 12 = x^2 + (a + b)x + ab$ से प्रारंभ करते हैं।

समीकरण के दोनों पक्षों में x-पद और अचर पदों के गुणांकों की तुलना करने पर हमें $a + b = 7$ तथा $ab = 12$ प्राप्त होता है। ध्यान दीजिए, यह तभी संभव है जब $a = 3$ और $b = 4$ अथवा $a = 4$ और $b = 3$ हो। अतः हम इन दो संभावनाओं में से एक का चयन करते हैं और गुणनखंडों को $(x + a)(x + b)$ के रूप में लिखते हैं जो कि $(x + 3)(x + 4)$ है।

उदाहरण 11 — आइए, $x^2 + 11x + 30$ को इसी प्रकार गुणनखंडित करने का प्रयास करें।

$$x^2 + 11x + 30 = x^2 + (a + b)x + ab$$

इससे $a + b = 11$ और $ab = 30$ प्राप्त होता है। हमें a और b के मान इस प्रकार चुनने होंगे कि $ab = 30$ और $a + b = 11$ दोनों संतुष्ट हों। क्या होगा, यदि हम $a = 2$ और $b = 15$ चुनें या $a = 3$ और $b = 10$ चुनें? स्पष्ट है कि ये उपयुक्त मान नहीं हैं क्योंकि $ab = 30$ होने पर भी $a + b = 11$ के समान नहीं है। अत: हम 30 के गुणनखंडों को देखते हैं और $a = 5$ तथा $b = 6$ या इसके विपरीत $a = 6$ और $b = 5$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार x-पद, $11x$ को $5x + 6x$ के रूप में विभाजित किया जा सकता है।

अतः $x^2 + 11x + 30 = x^2 + (5 + 6)x + 30 = (x + 5)(x + 6)$

उदाहरण 12 — $x^2 - 5x + 6$ का गुणनखंड करने हेतु हम सबसे पहले ध्यान देते हैं कि x का गुणांक ऋणात्मक है। एक बार पुन: $x^2 - 5x + 6$ की तुलना $x^2 + (a + b)x + ab$ से करने पर हमें $a + b = -5$ और $ab = 6$ प्राप्त होता है। ध्यान दीजिए कि ये दोनों समीकरण एक साथ तभी संतुष्ट हो सकते हैं, जब $a = -2$ और $b = -3$ हों या इसके विपरीत $a = -3$ और $b = -2$ हों।

प्रश्नावली 4.4

1. निम्न सर्वसमिकाओं को पूर्ण करने हेतु रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—
   (i) $s^2 - 11s + 24 = (______)(______)$
   (ii) $(______)(x + 1) = (3x^2 - 4x - 7)$
   (iii) $10x^2 - 11x - 6 = (2x - ___)(___ + 2)$
   (iv) $6x^2 + 7x + 2 = (______)(______)$
2. ऐसी सर्वसमिका का चयन कीजिए और उसका उपयोग कीजिए, जिससे आप सीधे गुणा किए बिना निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कर सकें—
   (i) $(41)^2$ (ii) $(27)^2$
   (iii) (23×17) (iv) $(135)^2$

© NCERT not to be republished

(v) $(97)^2$ (vi) (18×29)

(vii) (34×43) (viii) $(205)^2$

3. निम्नलिखित का गुणनखंड कीजिए—

(i) $9a^2 + b^2 + 4c^2 - 6ab + 12ac - 4bc$ (ii) $16s^2 + 25t^2 - 40st$

(iii) $r^2 - r - 42$ (iv) $49g^2 + 14gh + h^2$

(v) $64u^2 + 121v^2 + 4w^2 - 176uv - 32uw + 44vw$

सोचिए और विचार कीजिए

जेम्स और रेशमा विद्यालय में सीखी गईं बीजीय सर्वसमिकाओं के विषय में बात कर रहे थे—

जेम्स— $(a - b)^2 (a + b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a + b)$

रेशमा— मेरा मत भिन्न है। $(a - b)^2 (a + b) = (a - b) [(a - b) (a + b)]$

$= (a - b)(a^2 - b^2)$

उत्तर प्राप्त करने हेतु मैं यह गुणनफल ज्ञात करूँगी।

आपके अनुसार कौन सही है और क्यों?

इसी प्रकार, और अधिक सर्वसमिकाओं को संयोजित करने का प्रयास कीजिए और नए परिणाम ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

4.7 नई सर्वसमिकाएँ ज्ञात करना

इस अनुभाग में हम बीजीय व्यंजकों के साथ प्रयोग करेंगे और देखेंगे कि क्या हम किन्हीं नई सर्वसमिकाओं को प्राप्त कर सकते हैं।

आपके विचार में $(a + b)^3$ कैसा दिखेगा?

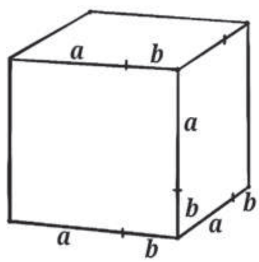
आइए, वितरण गुणधर्म का उपयोग करके उत्तर प्राप्त करते हैं—

$$(a + b)^3 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

यहाँ हमें एक नई सर्वसमिका प्राप्त हुई है—

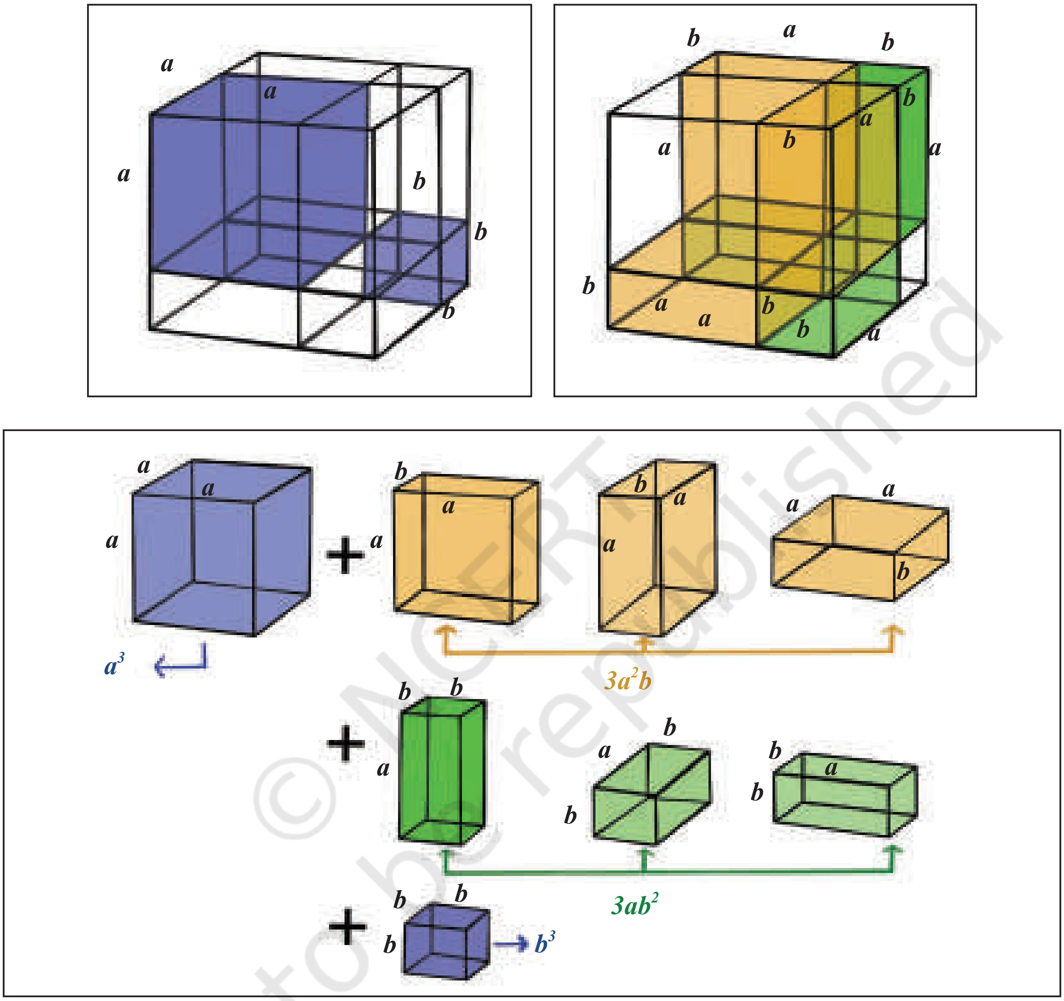
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

आइए, हम इस सर्वसमिका के दृश्यांकन का प्रयास करते हैं। हमने देखा कि $a + b$ भुजा वाले एक वर्ग को वर्गों और आयतों में विभाजित किया जा सकता है। इससे हमें $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ सर्वसमिका प्राप्त हुई। क्या होगा, यदि हमारे पास $a + b$ भुजा वाला एक घन हो? क्या हम $(a + b)$ भुजा वाले घन को छोटे घनों और घनाभों में विभाजित करके इस नई सर्वसमिका को निरूपित कर सकते हैं?



चित्र 4.9 — भुजा $a + b$ वाला घन

हम जानते हैं कि इस घन का आयतन $(a + b)^3$ है। आइए, इस घन को छोटे घनों और घनाभों में विभाजित करते हैं।



चित्र 4.10 — सर्वसमिका $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ का निरूपण

ध्यान दीजिए कि बड़े घन को दो घनों और छह घनाभों में विभाजित किया जा सकता है। इन घनों का आयतन क्रमशः a^3 तथा b^3 घन इकाई है।

अन्य छह घनाभों में से तीन घनाभों की विमाएँ a इकाई × a इकाई × b इकाई हैं और अन्य तीन घनाभों की विमाएँ a इकाई × b इकाई × b इकाई हैं। और इनके आयतन क्रमशः a^2b और ab^2 घन इकाई होंगे। अतः छह घनाभों का कुल आयतन $3a^2b + 3ab^2$ है।

इससे हमें प्राप्त होता है— $(a + b)^3 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

© NCERT not to be republished

यहाँ हमें एक नई सर्वसमिका प्राप्त हुई, जो इस प्रकार है—

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

इस नई सर्वसमिका में यदि हम b को $-b$ से विस्थापित कर दें तो क्या होगा?

$$[a+(-b)]^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

इससे हमें सर्वसमिका $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ प्रात होती है। ध्यान दीजिए कि चारों पदों में से दो पद धनात्मक और दो पद ऋणात्मक हैं। ये पद व्यंजक में एकांतर क्रम में आते हैं।

आइए देखते हैं कि हम इन नई सर्वसमिकाओं का उपयोग कैसे कर सकते हैं।

उदाहरण 13— उस घन की भुजा क्या है, जिसका आयतन $p^3 + 6p^2q + 12pq^2 + 8q^3$ घन इकाई है?

$p^3 + 6p^2q + 12pq^2 + 8q^3$ की तुलना सर्वसमिका $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ के दाएँ पक्ष से करने पर हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं—

$$(p)^3 + 3\,(p)^2(2q) + 3(p)(2q)^2 + (2q)^3$$

जो $(p + 2q)^3$ है जिससे $a = p$ और $b = 2q$ हो। अत: घन की भुजा $p + 2q$ इकाई होगी।

उदाहरण 14— अब व्यंजक $8n^3 - 60n^2m + 150nm^2 - 125\,m^3$ पर विचार कीजिए।

यदि आप इसे $(a - b)^3$ के रूप में लिखते हैं तो a और b क्या होंगे?

व्यंजक $8n^3 - 60\ n^2m + 150nm^2 - 125m^3$ को $(2n)^3 - 3(2n)^2\ (5m) + 3(2n)(5m)^2 - (5m)^3$ के रूप पुनः लिखने पर और इसकी तुलना $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$ से करने पर हमें $(2n - 5m)^3$ प्राप्त होता है। अतः $a = 2n$ और $b = 5m$ है।

आइए, अब कुछ ज्ञात सर्वसमिकाओं के साथ प्रयोग करके और अधिक सर्वसमिकाएँ प्राप्त करते हैं। वितरण गुणधर्म का उपयोग करते हुए निम्नलिखित को गुणा करने का प्रयास कीजिए—

1. $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
2. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

आइए, प्रथम सर्वसमिका का गुणनफल ज्ञात करते हैं—

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3$$

$$= x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$$

$$= x^3 - y^3$$

अत: $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$ है। यह भी एक सर्वसमिका है!

© NCERT not to be republished

आप स्वयं के लिए x और y के भिन्न-भिन्न मान चुनकर इसकी पुष्टि कर सकते हैं।

अनुमान लगाइए कि $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ क्या होगा।

सोचिए और विचार कीजिए

हमें ज्ञात है कि $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ है।

इसके अतिरिक्त हमने यह सत्यापित किया है कि $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ है।

अवलोकन कीजिए कि $x - y$, $x^2 - y^2$ और $x^3 - y^3$ का सार्व गुणनखंड है।

क्या आपके विचार में $x - y$, $x^4 - y^4$ का भी गुणनखंड है?

ध्यान दीजिए कि $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$ है।

क्या आप देख सकते हैं कि $x - y$, $x^4 - y^4$ का एक गुणनखंड किस प्रकार है?

$x^5 - y^5$ के विषय में आपका क्या विचार है? क्या इसमें भी $x - y$ एक गुणनखंड के रूप में है?

आगे अन्वेषण करते हुए आइए हम $(x + y + z)$ और $(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$ का गुणन करते हैं।

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

$$= (x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - x^2z - xyz) + (x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - xyz - y^2z)$$
$$+ (x^2z + y^2z + z^3 - xyz - xz^2 - yz^2)$$

$$= (x^3 + \cancel{xy^2} + \cancel{xz^2} - \cancel{x^2y} - \cancel{x^2z} - xyz) + (\cancel{x^2y} + y^3 + \cancel{yz^2} - \cancel{xy^2} - xyz - \cancel{y^2z})$$
$$+ (\cancel{x^2z} + \cancel{y^2z} + z^3 - xyz - \cancel{xz^2} - \cancel{yz^2})$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

अतः $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

यह भी एक अन्य सर्वसमिका है। आइए, हम इसके कुछ अनुप्रयोगों का अन्वेषण करते हैं।

उदाहरण 15— तीन संख्याओं का योगफल 10 है और उनका गुणनफल 25 है। उनके वर्गों का योगफल 38 है। पिछली सर्वसमिका का उपयोग करके इन तीनों संख्याओं के घनों का योगफल ज्ञात कीजिए।

माना कि तीन संख्याएँ क्रमशः x, y और z हैं। प्रश्न के अनुसार $x + y + z = 10$, $xyz = 25$ और $x^2 + y^2 + z^2 = 38$ है।

सर्वसमिका $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ का मान रखने पर हमें प्राप्त होता है— $(10)(38 - xy - xz - yz) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(25)$

इस प्रकार, $x^3 + y^3 + z^3 = 380 - 10(xy + xz + yz) + 75 = 455 - 10(xy + xz + yz)$ होगा।

© NCERT not to be republished

$(xy + xz + yz)$ का मान ज्ञात करने हेतु हमें सर्वसमिका—

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ का उपयोग करना होगा।

हमें $100 = 38 + 2\ (xy + xz + yz)$ प्राप्त होता है। इस प्रकार $xy + xz + yz = 31$ है।

अब इसे पहले वाले समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है—

$x^3 + y^3 + z^3 = 455 - 10\ (xy + xz + yz) = 455 - 10\ (31) = 455 - 310 = 145$

4.8 परिमेय व्यंजकों का सरलीकरण

इस अध्याय के पिछले अनुभागों में हमने बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन करना सीखा है। आइए, देखें कि गुणनखंडन विधि का उपयोग करके हम कुछ परिमेय बीजीय व्यंजकों को कैसे हल कर सकते हैं।

उदाहरण 16— परिमेय व्यंजक $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{5x^2 + 5x - 100}$ को यह मानते हुए सरल कीजिए कि $5x^2 + 5x - 100 \neq 0$

इस परिमेय व्यंजक को सरल बनाने हेतु हमें अंश और हर में उपस्थित व्यंजकों के सार्व गुणनखंडों को काटना होगा।

इस परिमेय व्यंजक को सरल बनाने हेतु हमें बीजीय सर्वसमिकाओं का उपयोग करना होगा।

आइए, सबसे पहले अंश व्यंजक $x^2 - 7x + 12$ को देखते हैं। हमें a और b ज्ञात करने हैं जिससे $a + b = -7$ और $ab = 12$ हो। क्या आप ऐसी दो संख्याओं के विषय में विचार कर सकते हैं? ये संख्याएँ -3 और -4 हैं। व्यंजक के गुणनखंड करने पर हमें $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)\ (x - 4)$ प्राप्त होता है।

आइए, अब हर व्यंजक $5x^2 + 5x - 100$ को देखते हैं। हम देख सकते हैं कि तीनों पद 5 के गुणज हैं। इसलिए हम 5 को सार्व गुणनखंड ले सकते हैं। व्यंजक को इस प्रकार सरल करते हैं— $5x^2 + 5x - 100 = 5\ (x^2 + x - 20)$ अब हमें a और b इस प्रकार ज्ञात करने हैं कि $a + b = 1$ और $ab = -20$ हों। ऐसी दो संख्याओं के विषय में विचार करने का प्रयास कीजिए। ये संख्याएँ 5 और -4 हैं। इस प्रकार, हमें $5x^2 + 5x - 100 = 5\ (x - 4)\ (x + 5)$ प्राप्त होता है।

'अंश' और 'हर' में गुणनखंडित व्यंजकों को प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{5x^2 + 5x - 100} = \frac{x^2 - 7x + 12}{5(x^2 + x - 20)} = \frac{(x - 4)(x - 3)}{5(x - 4)(x + 5)}$$

इस प्रकार, सार्व गुणनखंड $x - 4$ को काट सकते हैं, क्योंकि यह 0 के समान नहीं है। हमें यह ज्ञात है क्योंकि $5x^2 + 5x - 100 \neq 0$ है। अत:

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{5x^2 + 5x - 100} = \frac{x - 3}{5(x + 5)}$$

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

निम्नलिखित परिमेय व्यंजक को सरल करने का प्रयास कीजिए—

$$\frac{36s^2-12st+t^2}{t^2+2ts-48s^2}=\frac{(6s-t)^2}{(__+__)(__+__)}$$

(**संकेत** — $t^2+2ts-48s^2$ का गुणनखंड कीजिए और $t^2+2ts-48s^2 \neq 0$ मानते हुए परिमेय व्यंजकों को सरल कीजिए।)

प्रश्नावली 4.5

1. यह मानते हुए कि हर में दिए गए व्यंजक शून्य के समान नहीं हैं, निम्नलिखित परिमेय व्यंजकों को सरल कीजिए—

(i) $\dfrac{3p^2-3pq-18q^2}{p^2+3pq-10q^2}$ (ii) $\dfrac{n^3-3n^2m+3nm^2-m^3}{5m^2-10mn+5n^2}$

(iii) $\dfrac{w^3-v^3+x^3+3wvx}{w^2+v^2+x^2-2wv-2vx+2wx}$ (iv) $\dfrac{4y^2-20yz+25z^2}{\left(25z^2-4y^2\right)}$

(v) $\dfrac{\left(x^2+x-6\right)\left(x^2-7x+12\right)}{(x^2-6x+8)\left(x^2-9\right)}$ (vi) $\dfrac{p^4-16}{p^2-4p+4}$

उदाहरण 17— सायरा ने x इकाई भुजा वाला एक वर्ग, x इकाई लंबाई और 1 इकाई चौड़ाई वाली 8 आयताकार पट्टियों और 1 इकाई भुजा वाले 15 वर्गों को व्यवस्थित करके एक बड़ा आयत बनाया है। x के पदों में आयत की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

x इकाई भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल $= x^2$ वर्ग इकाई

x इकाई लंबाई और 1 इकाई चौड़ाई वाले आयत का क्षेत्रफल $= x$ वर्ग इकाई

ऐसे 8 आयतों का कुल क्षेत्रफल $= 8x$ वर्ग इकाई

1 इकाई भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल = 1 वर्ग इकाई

ऐसे 15 वर्गों का कुल क्षेत्रफल = 15 वर्ग इकाई

सभी वर्गों और आयतों का कुल क्षेत्रफल $= x^2 + 8x + 15$ वर्ग इकाई

© NCERT not to be republished

अत: सायरा द्वारा बनाए गए आयत का क्षेत्रफल = $x^2 + 8x + 15$ वर्ग इकाई है।

हम $x^2 + 8x + 15$ का गुणनखंड करके सायरा द्वारा बनाए गए आयत की विमाएँ प्राप्त कर सकते हैं।

$x^2 + 8x + 15$ का गुणनखंड करने हेतु हमें a और b की आवश्यकता इस प्रकार है कि $a + b = 8$ और $ab = 15$ हो।

अत: $a = 3$ और $b = 5$ एक संभावना है। x के पदों में सायरा के आयत की संभावित लंबाई और चौड़ाई इस प्रकार है— लंबाई = $x + 5$ इकाई और चौड़ाई = $x + 3$ इकाई।

अब इन टुकड़ों का उपयोग करके सायरा का आयत बनाइए।

उदाहरण 18— एक आयताकार ताल इस प्रकार है कि इसकी चौड़ाई इसकी लंबाई से 4 मीटर कम है और क्षेत्रफल 96 वर्ग मीटर है। ताल की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

मान लीजिए कि ताल की लंबाई x मीटर है। अत: ताल की चौड़ाई $x - 4$ मीटर होगी।

चूँकि क्षेत्रफल 96 वर्ग मीटर दिया गया है, अत: $x(x - 4) = 96$ है।

अर्थात $x^2 - 4x = 96$ अथवा $x^2 - 4x - 96 = 0$

हम पद $-4x$ को विभाजित करने हेतु -96 के उपयुक्त गुणनखंड चुनते हैं। हमें ज्ञात है कि $(-12) \times 8 = -96$ और $(-12) + 8 = -4$ है। अतः $-4x$ को $-12x + 8x$ के रूप में लिखा जा सकता है।

$x^2 - 4x - 96 = x^2 - 12x + 8x - 96 = x(x - 12) + 8(x - 12) = (x - 12)(x - 8) = 0$

इस प्रकार, $x^2 - 4x - 96 = 0$ का अर्थ $(x - 12)(x + 8) = 0$ है।

अर्थात या तो $x - 12 = 0$ या $x + 8 = 0$ है। इसका तात्पर्य $x = 12$ या $x = -8$ है। चूँकि x ताल की लंबाई है इसलिए यह ऋणात्मक नहीं हो सकती। अत: हम $x = -8$ को अनदेखा करते हैं और ताल की लंबाई $x = 12$ मीटर होनी चाहिए।

ताल की चौड़ाई = $x - 4 = 12 - 4 = 8$ मीटर है।

अंतिम प्रश्नावली

1. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का उपयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए—

(i) $(-3x + 4)^2$

(ii) $(2s + 7)(2s - 7)$

(iii) $\left(p^2 + \frac{1}{2}\right)\left(p^2 - \frac{1}{2}\right)$

(iv) $(2n + 7)(2n - 7)$

(v) $(s - 2t)(s^2 + 2st + 4t^2)$

(vi) $\left(\frac{1}{2r} - 4r\right)^2$

© NCERT not to be republished

(vii) $(-3m + 4k - l)^2$ (viii) $\left(x - \frac{1}{3}y\right)^3$

(ix) $\left(\frac{7}{2}k - \frac{2}{3}m\right)^3$

2. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का उपयोग करके मान ज्ञात कीजिए—

(i) 17×21 (ii) 104×96

(iii) 24×16 (iv) 147^3

(v) 199^3 (vi) 127^3

(vii) $(-107)^3$ (viii) $(-299)^3$

3. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों का गुणनखंड कीजिए—

(i) $4y^2 + 1 + \frac{1}{16y^2}$ (ii) $9m^2 - \frac{1}{25n^2}$

(iii) $27b^3 - \frac{1}{64b^3}$ (iv) $x^2 + \frac{5x}{6} + \frac{1}{6}$

(v) $27u^3 - \frac{1}{125} - \frac{27u^2}{5} + \frac{9u}{25}$ (vi) $64y^3 + \frac{1}{125}z^3$

(vii) $p^3 + 27q^3 + r^3 - 9pqr$ (viii) $9m^2 - 12m + 4$

(ix) $9x^3 - \frac{8}{3}y^3 + \frac{z^3}{3} + 6xyz$

(x) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 + 12xy + 36yz + 24zx$

(xi) $27u^3 - \frac{1}{216} - \frac{9u^2}{2} + \frac{u}{4}$

4. निम्नलिखित को सरल कीजिए—

(i) $\frac{4x^2 + 4x + 1}{4x^2 - 1}$ (ii) $\frac{9\left(3a^3 - 24b^3\right)}{9a^2 - 36b^2}$ (iii) $\frac{s^3 + 125t^3}{s^2 - 2st - 35t^2}$

संकेत — मान लीजिए कि 'हर' शून्य के समान नहीं है।

© NCERT not to be republished

5. निम्नलिखित व्यंजकों द्वारा आयतों के क्षेत्रफल वर्ग इकाई में दिए गए हैं। इन आयतों की लंबाई और चौड़ाई के संभावित व्यंजक ज्ञात कीजिए—

   (i) $25a^2 - 30ab + 9b^2$ (ii) $36s^2 - 49t^2$

6. निम्नलिखित व्यंजकों द्वारा घनाभों के आयतन घन इकाई में दिए गए हैं। इन घनाभों की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई के संभावित व्यंजक ज्ञात कीजिए—

   (i) $6a^2 - 24b^2$ (ii) $3ps^2 - 15ps + 12p$

7. गाँव के खेल का मैदान 40 मीटर भुजा वाले एक वर्ग के आकार का है। व्यक्तियों के चलने हेतु खेल के मैदान के चारों ओर s मीटर चौड़ाई का एक मार्ग निर्मित किया गया है। s के पदों में मार्ग के क्षेत्रफल का व्यंजक ज्ञात कीजिए।

8. यदि किसी संख्या और उसके व्युत्क्रम का योग $\frac{10}{3}$ हो तो वह संख्या ज्ञात कीजिए।

9. एक आयताकार ताल का क्षेत्रफल $2x^2 + 7x + 3$ वर्ग हस्त है। यदि इसकी चौड़ाई $2x + 1$ 'हस्त' है, तो इसकी लंबाई ज्ञात कीजिए। 'हस्त' लंबाई मापने की एक इकाई होती थी।

*10. यदि $x - 2$ और $x - \frac{1}{2}$ दोनों $px^2 + 5x + r$ के गुणनखंड हैं तो दर्शाइए कि $p = r$ है।

*11. यदि $a + b + c = 5$ और $ab + bc + ca = 10$ है तो सिद्ध कीजिए कि $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = -25$ होगा।

*12. व्यंजक के गुणनखंड द्वारा जाँच कीजिए कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए $n^3 - n$ सदैव 6 से विभाज्य है। अपने उत्तर के लिए कारण भी बताइए।

*13. निम्न के मान ज्ञात कीजिए—

   (i) $x^3 + y^3 - 12xy + 64$, जब $x + y = -4$

   (ii) $x^3 - 8y^3 - 36xy - 216$, जब $x = 2y + 6$

सारांश

- सर्वसमिकाएँ ऐसे समीकरण होते हैं, जो चरों के सभी मानों के लिए सत्य होते हैं।
- ज्यामितीय प्रदर्शों (मॉडलों) या बीजीय टाइलों का उपयोग सर्वसमिकाओं के दृश्यांकन की विधियों में से एक है।
- सर्वसमिकाओं का उपयोग बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड के लिए भी किया जा सकता है।
- द्विघातीय व्यंजकों के गुणनखंडन को बीजीय टाइलों की सहायता से दृश्यांकित किया जा सकता है।

© NCERT not to be republished

- सर्वसमिकाओं का उपयोग संख्याओं का वर्ग करने या संख्याओं के गुणनफल का मूल्यांकन करने जैसी गणनाओं को सरल बनाने के लिए भी किया जा सकता है।
- परिमेय बीजीय व्यंजकों को 'अंश' व 'हर' को गुणनखंडित करके तथा सार्व गुणनखंड को हटाकर हल किया जा सकता है जबकि ऐसा गुणनखंड विद्यमान हो और वह शून्य के समान न हो।
- हमने इस अध्याय में निम्नलिखित सर्वसमिकाओं का अध्ययन किया है—
  - $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
  - $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
  - $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
  - $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
  - $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
  - $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$
  - $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
  - $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
  - $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
  - $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
  - $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$

© NCERT not to be republished