0920CH05

5 मैं हूँ गोल-गोल, ऊपर-नीचे

मानव-जाति अपने आस-पास की वस्तुओं की आकृतियों से सदैव ही मुग्ध होती रही है। कुछ आरंभिक गुफा चित्रकलाओं में सूर्य को वृत्त के रूप में प्रदर्शित किया गया है। ओडिशा में गुडाहांडी की गुफा चित्रकलाओं में उनकी ज्यामितीय आकृतियाँ, जैसे— त्रिभुज, वर्ग, वृत्त और अंडाकार आकृतियाँ देखी जा सकती हैं। मनुष्य ने अपने आस-पास की प्रकृति में जो आकृतियाँ देखीं, संभवत: गुफा चित्रकलाओं में मिलने वाली आकृतियाँ उन्हीं से प्रेरित रही होंगी।

क्या आप चित्र 5.1 में आकृतियों के उद्भव की पहचान कर सकते हैं?

चित्र 5.1

जब वर्षा की बूँदें जल पर गिरती हैं तो वृत्ताकार तरंगें बनती हैं। पौधे के तने की अनुप्रस्थ काट तथा खिले हुए सूर्यमुखी की आकृति भी वृत्ताकार होती है। पूर्णिमा का चंद्रमा और सूर्य भी वृत्ताकार दिखाई देते हैं।

चंद्रमा

सूर्य (सूर्यग्रहण के समय)

चित्र 5.2

© NCERT not to be republished

छोटे-बड़े सभी प्रकार के वृत्तों में कौन-से गुण एकसमान हैं? ऐसा एक गुण आप कक्षा 7 की गणित की पाठ्यपुस्तक में पढ़ चुके हैं। मनुष्य ने प्रकृति में कई वृत्ताकार प्रतिरूपों (पैटर्न) का अवलोकन करने के बाद ही इस गुण पर ध्यान दिया होगा। प्रत्येक वृत्त का एक केंद्र होता है। वृत्त के सभी बिंदु, केंद्र से समान दूरी पर होते हैं। इस अवलोकन का उपयोग करते हुए हम वृत्त को परिभाषित करते हैं।

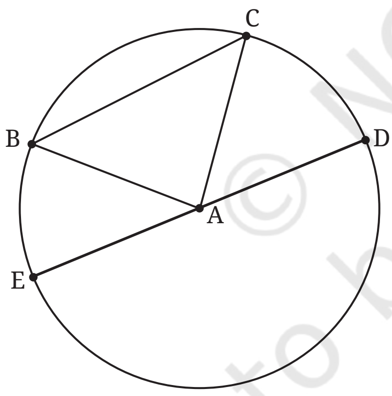
गतिविधि — प्रकृति में विद्यमान कुछ वस्तुओं की सूची बनाइए, जो वृत्ताकार दिखाई देती हैं।

सोचिए और विचार कीजिए

जमुना के पास कागज का एक वृत्ताकार टुकड़ा है। वह इसके केंद्र का पता लगाने का प्रयास कर रही है। अमीना उसे एक सुझाव देती है। वह उन निर्देशों का पालन करती है और उसके परिणाम से रोमांचित होती है। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि अमीना ने उसे क्या सुझाव दिया होगा?

5.1 परिभाषाएँ

जब भी हम गणितीय आकृतियों जैसे— वृत्त, त्रिभुज और वर्ग की बात करते हैं तो हम सदैव यह कल्पना करते हैं कि ये आकृतियाँ एक कागज (द्वि-विमीय समतल) पर बनी हुई हैं।



चित्र 5.3 — वृत्त, केंद्र A, जीवा BC

वृत्त किसी समतल पर उन सभी बिंदुओं का समूह है, जो उस समतल पर किसी दिए गए बिंदु से समदूरस्थ हैं। बिंदुओं का समूह जो इस दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है उसे प्रतिबंध का बिंदुपथ भी कहा जाता है। इस पद (शब्द) का उपयोग करते हुए वृत्त को ऐसे बिंदुओं के बिंदुपथ के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है, जो इस दिए गए बिंदु से समदूरस्थ हों। यह दिया गया बिंदु वृत्त का केंद्र है। **केंद्र** से वृत्त के किसी भी बिंदु के मध्य की दूरी वृत्त की **त्रिज्या** है।

चित्र 5.3 में बिंदु A वृत्त का केंद्र है। समतल पर स्थित सभी बिंदु जो वृत्त के केंद्र A से AB की लंबाई की समान दूरी पर स्थित हैं, वे एक वृत्त बनाते हैं, जिसका केंद्र A है और AB की लंबाई वृत्त की त्रिज्या के समान है।

मान लीजिए B और C, वृत्त पर स्थित दो बिंदु हैं। रेखाखंड BC वृत्त की **जीवा** कहलाती है। जीवा BC द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण $\angle BAC$ है। वह जीवा, जो वृत्त के केंद्र से होकर गुजरती है, उसे वृत्त का **व्यास** कहते हैं।

© NCERT not to be republished

5.2 वृत्त की सममिति

वृत्त के पूर्णत: सममित होने से वे बहुत आकर्षक लगते हैं। मान लीजिए, आप किसी वाहन का पहिया देख रहे हैं। आप देखते हैं कि पहिए का कोई बिंदु या भाग भूमि को स्पर्श कर रहा है। जब आप कुछ समय बाद पुन: पहिए को देखते हैं तो आप पुन: पाते हैं कि पहिए का एक बिंदु भूमि को स्पर्श कर रहा है। क्या आप बता सकते हैं कि पहिए के ये दोनों बिंदु समान बिंदु हैं? आप यह नहीं बता सकते हैं; घूमता हुआ पहिया पूरे समय एक जैसा ही दिखाई देता है। हम कह सकते हैं कि वृत्त में पूर्ण घूर्णन सममिति होती है— पहिए को किसी भी कोण से घुमाइए, वह ठीक पहले जैसा ही दिखाई देता है।

कागज पर एक वृत्त बनाइए और वृत्त के अनुदिश कागज को काट लीजिए। वृत्ताकार कागज को इस प्रकार मोड़िए कि इसके किनारे परस्पर आच्छादित हों, फिर इसे खोल लीजिए। आप कागज पर मोड़ के चिह्न देख सकते हैं जो वृत्त की परावर्तन सममिति की रेखा है। क्या यह रेखा वृत्त के केंद्र से होकर गुजरती है? हाँ, यह रेखा वृत्त के केंद्र से होकर गुजरती है। यह रेखा वृत्त का **व्यास** है। वृत्त के सभी व्यास, परावर्तन सममिति की रेखाएँ हैं।

सोचिए और विचार कीजिए

1. एक वर्ग में घूर्णन सममिति कौन कौन-सी हैं? इसमें परावर्तन सममिति की कितनी रेखाएँ हैं? एक सम पंचभुज और एक समषट्भुज में घूर्णन सममिति और परावर्तन सममिति की कितनी रेखाएँ होती हैं?
2. 5 इकाई त्रिज्या वाले वृत्त में सबसे लंबी जीवा की लंबाई कितनी है? क्या इस वृत्त में कोई सबसे छोटी जीवा है?
3. किसी दिए गए बिंदु से समदूरस्थ बिंदुओं का बिंदुपथ वृत्त कहलाता है। दिए गए किन्हीं दो बिंदुओं से समदूरस्थ बिंदुओं के बिंदुपथ के विषय में हम क्या कह सकते हैं?

   (**संकेत**— हम जानते हैं कि किन्हीं दो दिए गए बिंदुओं A और B से समदूरस्थ कोई भी बिंदु, AB के लंब समद्विभाजक पर स्थित होता है। क्या इस कारण से रेखाखंड का लंब समद्विभाजक, समदूरस्थ बिंदुओं का बिंदुपथ हो जाएगा। इसके लिए हमें यह सिद्ध करना होगा कि लंब समद्विभाजक पर स्थित सभी बिंदु, A व B से समदूरस्थ हैं।)

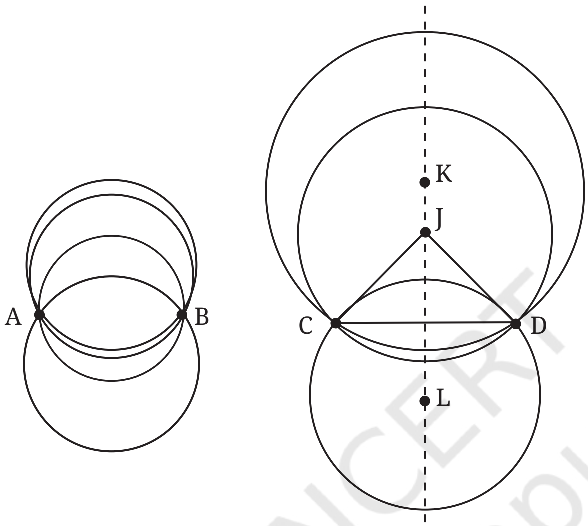
5.3 कितने वृत्त?

अब जब हम वृत्त को परिभाषित कर चुके हैं और इसके कुछ गुणों को सूचीबद्ध कर चुके हैं तो आइए, इस प्रश्न पर विचार करते हैं— किसी समतल पर दिए गए दो बिंदुओं A और B से कितने वृत्त होकर गुजरते हैं?

यदि कोई वृत्त A और B से होकर गुजरता है तो इसका कोई केंद्र बिंदु होगा। मान लीजिए, यह बिंदु O है। लंबाइयाँ OA और OB समान हैं। क्या इस गुण के साथ कोई अन्य बिंदु है? हाँ, यह बिंदु रेखाखंड AB का मध्य बिंदु है। इस मध्य बिंदु को केंद्र मानते हुए A और B से गुजरता हुआ एक वृत्त बनाया जा सकता है। इस वृत्त की त्रिज्या AB की लंबाई की आधी है और AB एक व्यास है।

© NCERT not to be republished

क्या A और B दोनों बिंदुओं से होकर जाने वाले और भी वृत्त हो सकते हैं? स्पष्टत: कोई भी बिंदु जो A और B से समदूरस्थ हो, A और B से होकर जाते हुए वृत्त का केंद्र हो सकता है। क्या आप ऐसे कुछ बिंदु जानते हैं? हम देख चुके हैं कि रेखाखंड AB का लंब समद्विभाजक, A और B से समदूरस्थ बिंदुओं का बिंदुपथ है। लंब समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु, A और B से समदूरस्थ है और प्रत्येक बिंदु जो A और B से समदूरस्थ है, वह AB के लंब समद्विभाजक पर स्थित है। अत: A और B से होकर जाने वाले सभी वृत्तों के केंद्र, AB के लंब समद्विभाजक पर स्थित होते हैं।



चित्र 5.4 — दो बिंदुओं से होकर जाने वाले वृत्त

चित्र 5.4 में हम बिंदु A और B से होकर जाने वाले तथा बिंदु C और D से होकर जाने वाले वृत्तों को तथा CD के लंब समद्विभाजक को देख सकते हैं। लंब समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु, C और D से होकर जाने वाले वृत्त का केंद्र है। अत: हम बिंदु C व D से होकर जाते हुए केंद्र K, J और L वाले वृत्त देख सकते हैं।

सोचिए और विचार कीजिए

1. किसी समतल पर स्थित दो बिंदुओं से कितने वृत्त होकर जाते हैं?
2. क्या A और B से होकर जाते हुए सभी संभावित त्रिज्याओं वाले वृत्त विद्यमान होते हैं? A और B से होकर जाते हुए सबसे छोटे वृत्त की त्रिज्या क्या है? A और B से होकर जाते हुए सबसे बड़े वृत्त की त्रिज्या क्या है?
3. जैसे-जैसे आप रेखाखंड AB से लंब समद्विभाजक के अनुदिश दूर होते जाते हैं तो A और B से होकर जाते हुए वृत्तों की त्रिज्याएँ बढ़ती हैं या घटती हैं?
4. जैसे-जैसे आप लंब समद्विभाजक के अनुदिश जाते हैं तो क्या उस बिंदु से निर्मित A और B से होकर जाता हुआ वृत्त अधिक वक्रीय या कम वक्रीय प्रतीत होता है?
5. एक समतल पर आपको दो बिंदु A और B दिए गए हैं। आप उसी समतल पर ऐसे कितने वर्ग बना सकते हैं जिनकी सीमारेखा पर A और B स्थित हों? उसी समतल पर आप ऐसे कितने वर्ग बना सकते हैं जिनके कोने के बिंदु A और B हों?

© NCERT not to be republished

यहाँ एक प्रश्न स्वाभाविक है— आप किसी समतल पर तीन भिन्न बिंदुओं A, B और C से होकर जाते हुए कितने वृत्त बना सकते हैं? क्या सदैव कम से कम केवल एक ही ऐसा वृत्त होगा? यह आवश्यक नहीं है! क्या होगा, यदि A, B और C एक ही रेखा पर स्थित हों या **संरेखीय** हों? क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि क्यों इस स्थिति में A, B और C से होकर कोई वृत्त नहीं जाता?

मान लेते हैं कि A, B और C संरेखीय नहीं हैं। इस स्थिति में क्या सदैव ऐसा कोई त्रिभुज है जो A, B और C से होकर जाता है? क्या A, B और C से होकर जाने वाले एक से अधिक वृत्त हो सकते हैं?

प्रमेय 1 — *तीन असंरेखीय बिंदुओं से होकर जाने वाला वृत्त अद्वितीय होता है।*

यह सत्य क्यों है? यदि कोई वृत्त है जो असंरेखीय बिंदुओं A, B और C से होकर जाता है तो इसका केंद्र भी अवश्य होगा। आइए, केंद्र को बिंदु O कहते हैं (हम शीघ्र O को ढूँढ़ लेंगे)।

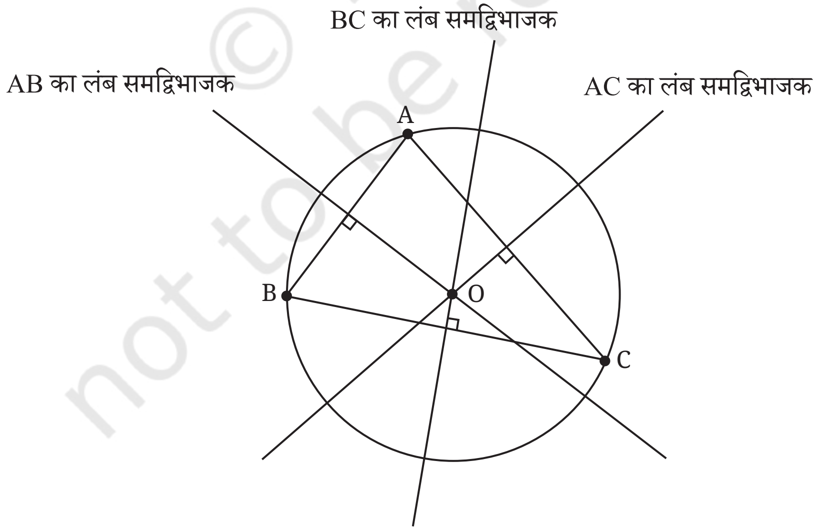
क्योंकि OA = OB है, हम जानते हैं कि O, AB के लंब समद्विभाजक पर स्थित है।

क्योंकि OA = OC है, हम जानते हैं कि O, AC के लंब समद्विभाजक पर भी स्थित है।

किंतु बिंदु A, B और C **संरेखीय नहीं** हैं, अतः AB और AC के लंब समद्विभाजक केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करेंगे क्योंकि किसी समतल पर दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ केवल एक ही बिंदु पर मिलती हैं। वह प्रतिच्छेद बिंदु O होगा।

हम O को केंद्र मानते हुए OA की लंबाई के समान त्रिज्या का वृत्त बना सकते हैं। यह वृत्त A, B और C से होकर जाएगा। इससे सिद्ध होता है कि यह कथन सत्य क्यों है।

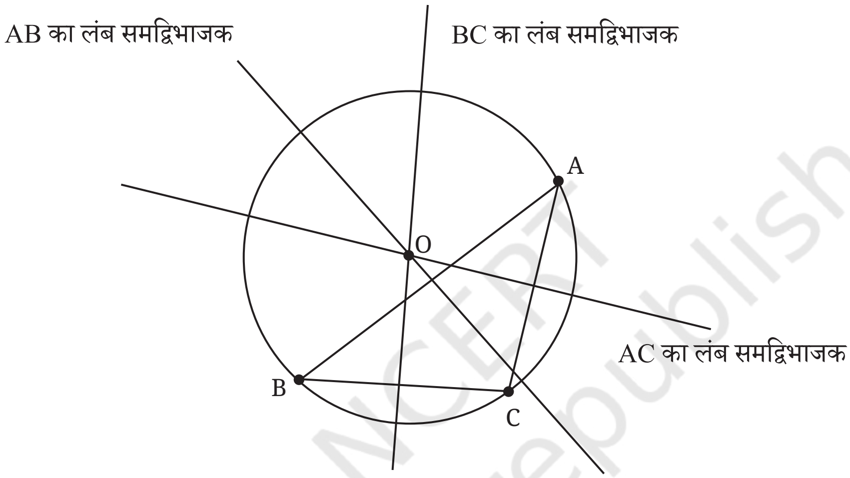
हम जानते हैं कि तीन असंरेखीय बिंदु एक त्रिभुज को भी निर्धारित करते हैं। हमने ऊपर इससे पहले किसी त्रिभुज के शीर्षों से होकर जाते हुए वृत्त की संरचना का उल्लेख किया है।



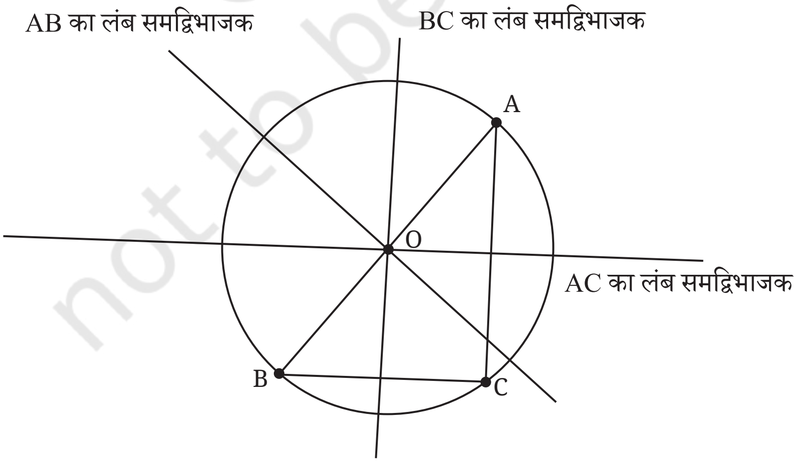
चित्र 5.5 — त्रिभुज ABC का परिवृत्त

© NCERT not to be republished

ΔABC के शीर्षों A, B और C से होकर जाते हुए वृत्त के केंद्र O को ΔABC का **परिकेंद्र** कहते हैं (चित्र 5.5)। इस वृत्त को **परिवृत्त** कहते हैं, जो त्रिभुज का परिगत वृत्त होता है। इसके विपरीत त्रिभुज को वृत्त के अंतर्गत त्रिभुज कहा जाता है क्योंकि AB और BC के लंब समद्विभाजक केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं। अतः किसी दिए गए त्रिभुज के लिए ऐसा केवल एक ही वृत्त है। साथ ही, किसी भी न्यूनकोण त्रिभुज के लिए परिकेंद्र त्रिभुज के अंदर स्थित होता है (चित्र 5.5)। किसी भी अधिक कोण त्रिभुज के लिए परिकेंद्र त्रिभुज के बाहर स्थित होता है (चित्र 5.6)। और किसी भी समकोण त्रिभुज के लिए परिकेंद्र त्रिभुज के कर्ण के मध्यबिंदु पर स्थित होता है (चित्र 5.7)।



चित्र 5.6 — अधिक कोण त्रिभुज— परिकेंद्र O त्रिभुज के बाहर स्थित है



चित्र 5.7 — समकोण त्रिभुज— परिकेंद्र O कर्ण के मध्यबिंदु पर स्थित है

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 5.1

1. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें AB = 5 सेंटीमीटर, $\angle A = 70^\circ$ और $\angle B = 60^\circ$ है। ΔABC के परिवृत्त की रचना कीजिए। क्या इस वृत्त का केंद्र त्रिभुज के अंदर या बाहर स्थित है?
2. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें AB = 5 सेंटीमीटर, $\angle A = 100^\circ$, AC = 4 सेंटीमीटर है। ΔABC के परिवृत्त की रचना कीजिए। इस वृत्त का केंद्र त्रिभुज के अंदर या बाहर स्थित है?
3. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें AB = 6 सेंटीमीटर, BC = 7 सेंटीमीटर, CA = 7 सेंटीमीटर है। ΔABC के परिवृत्त की रचना कीजिए। मान लीजिए, परिकेंद्र O है तो OA, OB और OC को मापिए।
4. दो बिंदुओं A और B से होकर जाते हुए वृत्त की न्यूनतम संभावित त्रिज्या क्या है?

सोचिए, रचना कीजिए और निष्कर्ष निकालिए

1. A, B और C तीन संरेखीय बिंदु हैं। क्या आप ऐसे एक बिंदु P का पता लगा सकते हैं जिसके लिए PA = PB = PC हो? आप AB और BC के लंब समद्विभाजकों के विषय में क्या कह सकते हैं? रचना कीजिए और जाँचिए। क्या आप प्रदर्शित कर सकते हैं कि तीन संरेखीय बिंदुओं A, B और C के लिए AB और BC के लंब समद्विभाजक समांतर हैं? क्या संरेखीय बिंदुओं से होकर जाता हुआ वृत्त संभव है? क्या आप एक ऐसी रेखा खींच सकते हैं, जो दिए गए वृत्त को तीन भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है?
2. दिए गए ΔABC के परिवृत्त की रचना की जाती है। क्या ΔABC के सर्वांगसम अन्य त्रिभुज हो सकते हैं, जिनका परिवृत्त ΔABC का परिवृत्त हो?

5.4 जीवा और जीवा द्वारा अंतरित कोण

आप जानना चाहते होंगे कि कब कोई 4 बिंदु एक ही वृत्त पर स्थित होते हैं। इसके लिए आपको इस अध्याय के अंत तक प्रतीक्षा करनी होगी। हमें यह जानने के लिए अभी कुछ और सीखने की आवश्यकता है।

चित्र 5.8 — जीवाएँ और त्रिज्याएँ

एक पहिए के दो बिंदुओं पर धागा बाँधिए; इसे खींचकर बाँधिए (चित्र 5.8)। धागे को पहिए (वृत्त) की जीवा माना जा सकता है। धागे के अंत्य बिंदुओं को वृत्त के केंद्र पर मिलाने की कल्पना कीजिए। धागा वृत्त के केंद्र पर एक कोण अंतरित करता है। अब पहिए को घुमा दीजिए। धागा पहिए के साथ-साथ केंद्र के चारों ओर घूमता है।

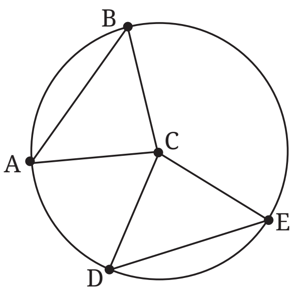
© NCERT not to be republished

पहिए को घुमाने पर बनी नई स्थिति में धागा वृत्त की अन्य जीवा है। पहली और दूसरी जीवा के मध्य क्या समानता है? दोनों जीवाओं की लंबाई समान है, जो धागे की लंबाई के समान है। दूसरी नई जीवा द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण के विषय में क्या कहा जा सकता है? यह कोण अवश्य ही पहली जीवा द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण के समान है। अब हम स्पष्ट करते हैं कि ऐसा क्यों है।

प्रमेय 2 — *वृत्त की समान जीवाएँ वृत्त के केंद्र पर समान कोण अंतरित करती हैं।*

यह प्रमेय क्या बताती है? यह वृत्त की दो समान लंबाई वाली जीवाओं के बारे में बताती है। ज्यामिति में, चित्र बनाने से सदैव सहायता मिलती है (चित्र 5.9 देखिए)। AB और DE समान लंबाई की जीवाएँ हैं। हमें यह स्पष्ट करना है कि $\angle ACB$, $\angle DCE$ के समान क्यों है। हमें क्या दिया गया है? हमें $AB = DE$ दिया गया है।

यह स्पष्ट करने के लिए कि क्यों दो भिन्न त्रिभुजों में दो कोण समान होते हैं, हम त्रिभुजों की सर्वांगसमता का उपयोग करते हैं। जिन कोणों को हमें समान दिखाना है, यदि वे संगत कोण हों तो प्रमेय सिद्ध हो जाएगी!



चित्र 5.9

दिया गया है — $AB = DE$

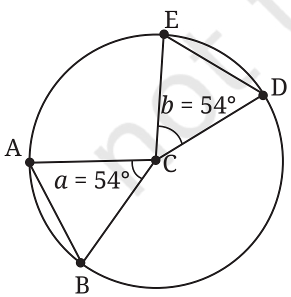
सिद्ध करना है — $\angle ACB = \angle DCE$

यह सत्य क्यों है? सर्वप्रथम, हम देखते हैं कि $CA = CB = r$ है, जो वृत्त की त्रिज्या है।

साथ ही $CD = CE = r$ है। अत: $CA = CD$ और $CB = CE$ है।

किंतु $AB = DE$ दिया गया है! SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा ΔCAB, ΔCDE के सर्वांगसम है। अत: $\angle ACB$, $\angle DCE$ के समान है अर्थात केंद्र पर अंतरित कोण समान हैं।

अब मान लीजिए, दो जीवाएँ हैं जो केंद्र पर समान कोण अंतरित करती हैं। क्या जीवाएँ आपस में समान हैं? हमें अपने अंतर्बोध से क्या ज्ञात होता है? मान लीजिए, जीवाएँ AB और DE हैं। आइए, अपनी कल्पनाशक्ति का उपयोग करते हैं। मान लीजिए कि बिंदु B, A, E और D वृत्त पर दक्षिणावर्त स्थित हैं जैसा कि चित्र 5.10 में दर्शाया गया है।



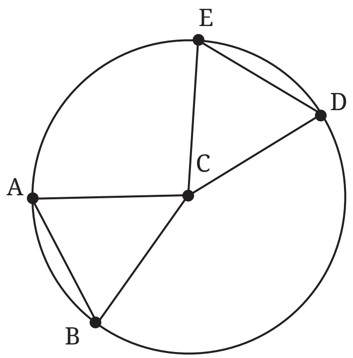
चित्र 5.10

कल्पना कीजिए कि आप वृत्त के केंद्र C पर खड़े हैं। अपनी भुजाओं को इस प्रकार फैलाइए कि उनके मध्य एक कोण बने। मान लीजिए, आपकी भुजाएँ वृत्त को बिंदु A और B पर प्रतिच्छेद करती हैं। आपकी भुजाओं के अंत्य बिंदुओं के मध्य दूरी ही जीवा AB की लंबाई होनी चाहिए। अब मान लीजिए कि आप जिस सतह पर खड़े हैं, वह जादुई रूप से घूर्णन करती है। सतह के साथ आप भी बिंदु C पर गोल घूमने (मान लीजिए दक्षिणावर्त) लगते हैं। आपको अपनी भुजाओं के मध्य बने कोण को परिवर्तित नहीं करना है। घूमते हुए किसी बिंदु पर आपकी बाईं भुजा बिंदु E पर मिलती है।

इस समय आपका दायाँ हाथ (अंतबिंदु) कहाँ होगा? इसे बिंदु D पर होना चाहिए, क्या ऐसा नहीं होगा? ऐसा इसलिए है, क्योंकि हमने माना था कि कोण ACB और DCE परस्पर समान हैं और आपने अपने हाथों को हिलाया भी नहीं है। अत: आपकी भुजाओं के अंतबिंदुओं के मध्य दूरी भी DE की दूरी के समान ही होगी। आइए, अब स्पष्ट करते हैं कि यह सत्य क्यों है।

प्रमेय 3 — *वृत्त के केंद्र पर समान कोण अंतरित करने वाली जीवाएँ परस्पर समान होती हैं।*

आइए, चित्र 5.11 में दर्शाए अनुसार आकृति की रचना करते हैं।



चित्र 5.11

दिया गया है — $\angle ACB = \angle DCE$

सिद्ध करना है — AB = ED

यह सत्य क्यों है? हम देखते हैं कि—

AC = BC = वृत्त की त्रिज्या है।

इसी प्रकार, EC = DC = वृत्त की त्रिज्या है।

अत: AC = DC और BC = EC है।

चूँकि, $\angle ACB = \angle DCE$ दिया गया है,

अत: SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा $\Delta ACB \cong \Delta DCE$ है। अत: AB = ED होगा।

प्रश्नावली 5.2

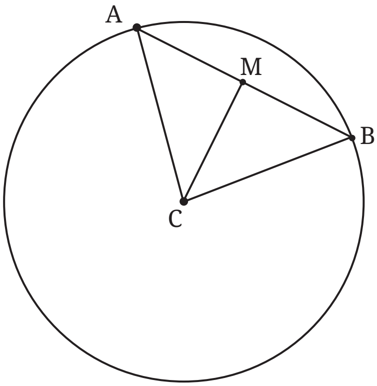
1. प्रदर्शित कीजिए कि किसी जीवा द्वारा वृत्त के केंद्र के साथ बनने वाला त्रिभुज, एक समद्विबाहु त्रिभुज होता है।
2. प्रदर्शित कीजिए कि यदि ऐसे दो समद्विबाहु त्रिभुजों (प्रश्न 1 के त्रिभुज) के आधार की लंबाई समान हो तो वे सर्वांगसम त्रिभुज होते हैं।

5.5 जीवाओं के मध्यबिंदु और लंब समद्विभाजक

इस अनुभाग में हम जीवाओं के और अधिक गुणों का अध्ययन करेंगे। जब हम किसी वृत्त के केंद्र से जीवा के मध्यबिंदु तक एक रेखाखंड खींचते हैं तो क्या हमें कोई विशेष निष्कर्ष प्राप्त होता है? यदि हम किसी जीवा के लंब समद्विभाजक की रचना करें तो क्या होगा? क्या यह किसी विशेष बिंदु से होकर जाता है?

© NCERT not to be republished

प्रमेय 4 — *किसी वृत्त में केंद्र को जीवा के मध्यबिंदु से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लंब होती है।*



चित्र 5.12

आइए, देखते हैं कि यह सत्य क्यों है। केंद्र C वाला एक वृत्त बनाइए (चित्र 5.12)। कोई भी जीवा AB बनाइए। मान लीजिए, बिंदु M जीवा AB का मध्यबिंदु है। हमें प्रदर्शित करना है कि CM, AB पर लंब है।

उपपत्ति — CAB एक समद्विबाहु त्रिभुज है। AB त्रिभुज का आधार है और CA = CB है।

अत: $\angle A = \angle B$ होगा।

M, AB का मध्यबिंदु है। अत: AM = BM है।

SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा ΔCMA, ΔCMB के सर्वांगसम है।

अत: $\angle CMB = \angle CMA$ होगा। किंतु $\angle CMB + \angle CMA = 180°$ (रेखीय युग्म) है।

अत: दोनों कोणों की माप 90° होगी अर्थात CM, जीवा AB पर लंब है।

प्रश्नावली 5.3

1. क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि प्रमेय 4 का विलोम सत्य क्यों है— किसी वृत्त के केंद्र से जीवा पर खींचा गया लंब उस जीवा को क्यों समद्विभाजित करता है।
   (**संकेत**— चित्र 5.12 का उपयोग कीजिए। आपको बताया गया है कि—
   $\angle CMA = \angle CMB = 90°$ है। आपको प्रदर्शित करना है कि AM = BM है।
2. एक वृत्त के अंतर्गत समद्विबाहु त्रिभुज ABC अंतर्निहित है, जिसमें AB = AC है। प्रदर्शित कीजिए कि A से BC पर डाला गया लंब वृत्त के केंद्र से होकर जाता है।
3. किसी वृत्त की 6 सेंटीमीटर और 8 सेंटीमीटर लंबाई की दो समांतर जीवाएँ वृत्त के केंद्र के विपरीत स्थित हैं। यदि वृत्त की त्रिज्या 5 सेंटीमीटर हो तो जीवाओं के मध्यबिंदुओं के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए।

ऊपर दिए गए प्रश्न 1 से हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

प्रमेय 5 — *किसी वृत्त के केंद्र से जीवा पर खींचा गया लंब उस जीवा को समद्विभाजित करता है।*

© NCERT not to be republished

5.6 जीवाओं की वृत्त के केंद्र से दूरी

गतिविधि— एक वृत्ताकार कागज लीजिए। किनारे की ओर से कागज को अंदर की ओर मोड़िए। अब इस मोड़ को खोल दीजिए। कागज पर बना मोड़ अब एक जीवा के समान है (चित्र 5.13 (ख) देखिए)। अब कागज को पुन: इस प्रकार मोड़िए कि जीवा के अंत्य बिंदु आपस में मिलें। अब इस मोड़ को खोल दीजिए (चित्र 5.13 (ग) देखिए)।

चित्र 5.13 (क)

चित्र 5.13 (ख)

चित्र 5.13 (ग)

इस मोड़ के कारण जीवा दो भागों में विभक्त हो गई है। इन भागों की दूरियाँ मापिए। दोनों मोड़ एक-दूसरे को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं, जीवा उस बिंदु से समद्विभाजित हो जाती है। दोनों मोड़ के चिह्नों के मध्य कोण मापिए। दूसरे मोड़ का चिह्न वृत्त के केंद्र से जीवा पर लंब के अनुदिश है। वृत्त के केंद्र से जीवा के मध्यबिंदु के मध्य की दूरी मापिए। यही दूरी केंद्र से जीवा की मध्य दूरी है।

अब पहली जीवा के समान लंबाई की अन्य जीवा बनाइए। आप यह कैसे करेंगे? आप स्वयं ही यह पता लगाइए। केंद्र से नई जीवा के मध्यबिंदु को मिलाइए और इसकी लंबाई मापिए। क्या यह केंद्र से पहली जीवा के मध्य दूरी के समान ही है?

अब एक अनुरेखण पत्रक लीजिए और इस पर समान त्रिज्या वाला वृत्त बनाइए। अनुरेखण पत्रक पर बने वृत्त को वृत्ताकार कागज पर इस प्रकार रखिए कि दोनों वृत्त परस्पर पूर्णत: आच्छादित हों जाएँ। वृत्ताकार कागज पर बनी जीवा और केंद्र से इस जीवा पर लंब को अनुरेखण पत्रक पर अनुरेखित कीजिए। अब अनुरेखण पत्रक को घुमाइए। आप अनुरेखण पत्रक से जीवा को देख पाएँगे, यह वृत्ताकार कागज पर समान लंबाई की अन्य जीवा के समान दिखाई देती है।

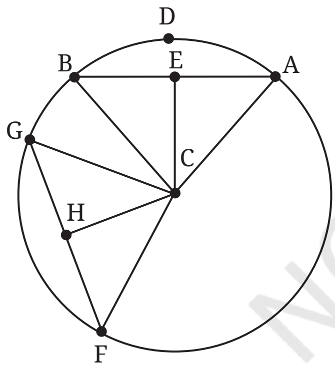
© NCERT not to be republished

वृत्त एक सममित आकृति है। अत: वृत्त को केंद्र के चारों ओर घुमाने पर वृत्त में कोई परिवर्तन नहीं आता है। जैसे-जैसे हम वृत्त को घुमाते हैं, वैसे-वैसे हमारी चयनित जीवा भी घुमती जाएगी जिससे समान लंबाई की नई जीवा प्राप्त होती है। साथ ही, केंद्र से जीवा पर खींचा गया लंब भी घूमता जाता है। समान जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ प्रतीत होती हैं।

क्या यह पूर्णतया तर्कसंगत व्याख्या है? नहीं, हमने केवल उदाहरण दिए हैं, जिनमें हमारे अनुमान सत्य सिद्ध हो रहे हैं। कोई कथन बहुत से उदाहरणों के लिए सत्य हो सकता है, किंतु इसका यह अर्थ नहीं है कि यह कथन व्यापक रूप से सत्य है। अत: आइए, स्पष्ट करते हैं कि यह कथन क्यों सत्य है।

प्रमेय 6 — *किसी वृत्त की समान लंबाई की जीवाएँ वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ होती हैं।*

चित्र बनाइए (चित्र 5.14)।



चित्र 5.14

दिया गया है — वृत्त जिसका केंद्र C है; AB = FG है; E और H क्रमश: AB व FG के मध्यबिंदु हैं।

सिद्ध करना है — CE = CH

यह सत्य क्यों है? प्रमेय 5 द्वारा CE और CH केंद्र C से जीवाओं क्रमश: AB और FG पर लंब हैं।

अत: CE और CH केंद्र C से जीवाओं क्रमश: AB और FG के मध्य दूरी है।

हम इस परिणाम की व्याख्या दो भिन्न प्रकार से करेंगे—

(1) त्रिभुज CAB और CFG सर्वांगसम हैं।

CA = CF (दोनों वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।), इसी प्रकार, CB = CG है।

दिया गया है कि AB = FG है। अत: SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा $\Delta CAB \cong \Delta CFG$ है।

अत: सर्वांगसम त्रिभुजों की ऊँचाइयाँ भी समान होंगी अर्थात CE = CH है। इस प्रकार, जीवाएँ AB और FG केंद्र O से समदूरस्थ हैं।

(2) त्रिभुजों CEA और CHF पर विचार कीजिए।

प्रमेय 5 के अनुसार, केंद्र से जीवा पर खींचा गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

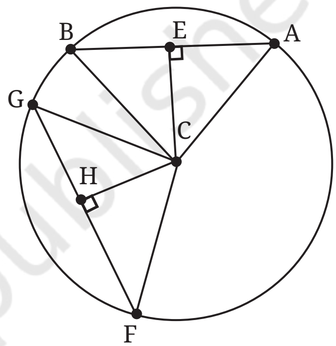
अत: E और H क्रमश: AB और FG जीवाओं के मध्यबिंदु हैं।

© NCERT not to be republished

AE = FH (क्योंकि AB = FG है और AB और FG के मध्यबिंदु E व H हैं।)
∠CEA = ∠CHF = 90°
CF = CA, क्योंकि दोनों वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।
अत: RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा, ΔCEA ≅ ΔCHF है।
अत: CE = CH होगा। इस प्रकार, समान जीवाएँ वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ होती हैं।

प्रश्नावली 5.4

1. बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करके प्रदर्शित कीजिए कि क्यों प्रमेय 6 अवश्य ही सत्य होनी चाहिए।
2. चित्र 5.15 पर विचार कीजिए। यदि CE, AB पर लंब है, CH, GH पर लंब है और CE = CH है तो प्रदर्शित कीजिए कि AB = GF है।
3. बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करते हुए प्रश्न 2 को हल कीजिए।



चित्र 5.15

ऊपर दी गई प्रश्नावली के प्रश्न 2 से निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

प्रमेय 7 — *वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ समान लंबाई की होती हैं।*

© NCERT not to be republished

5.6.1 दो असमान जीवाओं में से कौन-सी वृत्त के केंद्र से अधिक दूरी पर है?

एक वृत्त में दो जीवाएँ दी गई हैं। उनमें से एक जीवा की लंबाई दूसरी जीवा की लंबाई से अधिक है। कौन-सी जीवा केंद्र के अधिक समीप है? क्या आप अनुमान लगा सकते हैं?

गतिविधि — एक वृत्त बनाइए। विभिन्न लंबाइयों की जीवाएँ बनाइए। वृत्त के केंद्र से प्रत्येक जीवा पर लंब बनाइए। जीवाओं की लंबाई और केंद्र से इनकी दूरी को एक तालिका में लिखिए।

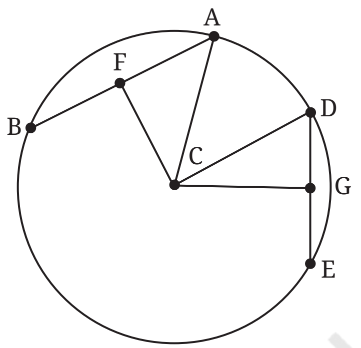
तालिका 1

जीवा की लंबाई			
केंद्र से दूरी			

आपने क्या अवलोकन किया? जीवा की लंबाई जितनी अधिक होती है, उतनी ही वह जीवा केंद्र के समीप होती है। आइए, यह समझने का प्रयास करते हैं कि यह सत्य क्यों है।

प्रमेय 8 — *मान लीजिए, AB और DE एक वृत्त की जीवाएँ हैं, जिसका केंद्र C है। मान लीजिए, AB > DE है, तब C से AB की दूरी, C से DE की दूरी की अपेक्षा कम होगी।*

सदैव की तरह, सर्वप्रथम हम चित्र बनाते हैं। ध्यान रखिए कि 'C से AB की दूरी' का अर्थ लंबवत दूरी से है। अत: हम C से AB और DE पर लंब क्रमश: CF और CG खींचते हैं।



चित्र 5.16

दिया गया है — AB > DE

सिद्ध करना है — CF < CG

यह सत्य क्यों है? चित्र 5.16 में AC और CD दोनों त्रिज्याएँ हैं।

अत: AC = CD है। बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय द्वारा $CD^2 = CG^2 + GD^2$ और $AC^2 = CF^2 + AF^2$ है।

अत: $CF^2 + AF^2 = CG^2 + GD^2$

अब AB, DE से बड़ा है। अत: AF, GD से बड़ा होगा (क्योंकि F और G, AB और DE के मध्यबिंदु हैं)।

चूँकि $AF^2 > GD^2$ है, अत: $CF^2 < CG^2$ होगा।

अतः CF < CG है।

टिप्पणी — केंद्र से समीपस्थ जीवा वह जीवा होती है जिस पर केंद्र स्थित होता है। इस जीवा की केंद्र C से दूरी शून्य होती है। अत: वृत्त का व्यास सबसे बड़ी जीवा होता है।

यदि केंद्र से जीवा को दूर धकेला जाए तो किसी स्थान पर जाकर जीवा एकल बिंदु के समान हो जाती है, जिसकी लंबाई शून्य है और इस जीवा के केंद्र C से दूरी वृत्त की त्रिज्या है।

प्रश्नावली 5.5

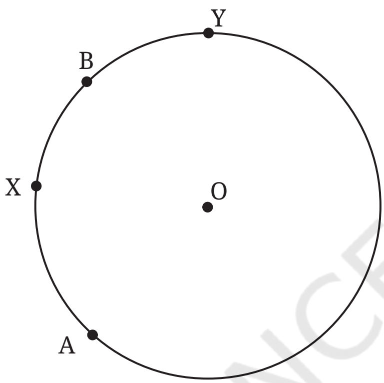
1. वृत्त की जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए, जिसकी त्रिज्या 7 सेंटीमीटर है और केंद्र से लंबवत दूरी 6 सेंटीमीटर है।
2. स्पष्ट कीजिए कि दिया गया कथन सत्य क्यों है— यदि केंद्र से जीवा की लंबवत दूरी d है और त्रिज्या r है तो जीवा की लंबाई $2\sqrt{r^2 - d^2}$ होगी।

© NCERT not to be republished

*3. किसी वृत्त में, यदि किसी जीवा AB की केंद्र से दूरी अन्य जीवा CD की केंद्र से दूरी की दोगुनी है तो क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि CD = 2AB है? कारण सहित उत्तर दीजिए।

5.7 वृत्त के चाप द्वारा अंतरित कोण

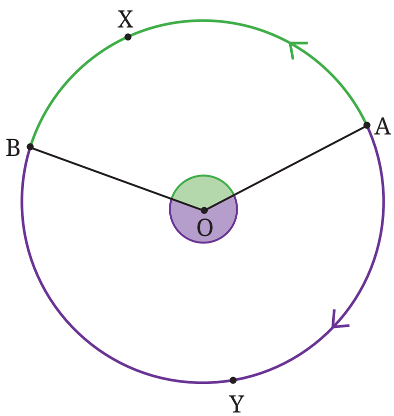
किसी वृत्त का **चाप** उस वृत्त का एक संबद्ध भाग होता है। यह वृत्त पर दो बिंदुओं जिन्हें चाप के अंत्य बिंदु कहा जाता है और उन अंत्य बिंदुओं को वृत्त की परिधि के अनुदिश जोड़ने वाले वक्र द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।



चित्र 5.17 — दीर्घ चाप AYB और लघु चाप AXB

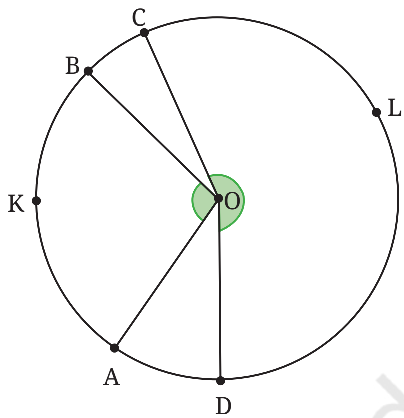
चित्र 5.17 को देखिए। A और B वृत्त पर स्थित दो बिंदु हैं। A से B तक जाने के दो मार्ग हैं। एक मार्ग बिंदु X से होकर जाता है और दूसरा मार्ग बिंदु Y से होकर जाता है। दोनों मार्गों में से बड़ा मार्ग दीर्घ चाप और छोटा मार्ग लघु चाप कहलाता है।

जैसे-जैसे हम चाप के अनुदिश बढ़ते जाते हैं तो हम चाप AB द्वारा केंद्र पर **अंतरित कोण** को कोण AOB की माप द्वारा परिभाषित करते हैं। अत: हम चाप के अनुदिश OA से OB तक बढ़ते हैं और केंद्र पर बनने वाले कोण को मापते हैं। लघु चाप केंद्र पर ∠AOB अंतरित करती है, जब OA से OB तक X के माध्यम से आगे बढ़ते हैं। जब हम OA से OB तक Y के माध्यम से आगे बढ़ते हैं तो हमें दीर्घ चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण प्राप्त होता है (चित्र 5.18 देखिए)।



चित्र 5.18

प्रश्न — एक वृत्त बनाया गया है जिसका केंद्र O है तथा A, B, C और D वृत्त पर स्थित बिंदु हैं (चित्र 5.19 देखिए)। चाप AKB तथा चाप CLD द्वारा केंद्र O पर अंतरित कोण मापिए। यदि केंद्र पर अंतरित कोण 180° से कम है तो यह एक लघु चाप है। यदि केंद्र पर अंतरित कोण 180° से अधिक है तो यह एक दीर्घ चाप है। बताइए कि क्या चाप AKB और CLD लघु चाप हैं या दीर्घ चाप हैं।

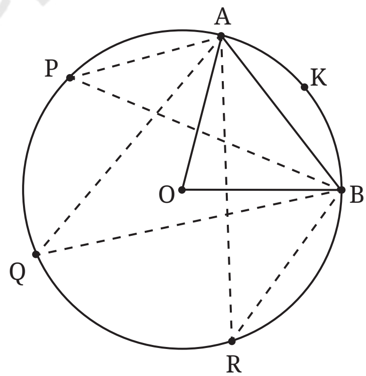


चित्र 5.19

5.7.1 वृत्त के चाप द्वारा वृत्त के उस बिंदु पर अंतरित कोण जो चाप के बाहर है

'किसी वृत्त के चाप AXB द्वारा वृत्त की परिधि के उस बिंदु पर अंतरित कोण जो उस चाप के बाहर है' से तात्पर्य ∆ACB से है, जहाँ C वृत्त पर स्थित कोई अन्य बिंदु है, किंतु चाप AXB पर स्थित नहीं है। ध्यान देने योग्य है कि इस कोण की माप इस बात पर निर्भर नहीं करती है कि हम बिंदु C को कौन-सा विशेष बिंदु चुनते हैं, जब तक कि यह बिंदु वृत्त पर और उस चाप के बाहर स्थित हो।

गतिविधि — एक वृत्त बनाइए, जिसमें एक जीवा AB हो। एक चाप AKB चुनिए, जो जीवा AB के अंत्य बिंदुओं A व B एवं वृत्त पर बिंदुओं A व B के मध्य किसी बिंदु K से मिलकर बनी हो। चाप AKB द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण को मापिए। वृत्त पर स्थित कोई तीन बिंदु P, Q, R लीजिए, जो चाप AKB के बाहर स्थित हों। चाप AKB द्वारा बिंदुओं P, Q, R पर अंतरित कोण मापिए। आपने क्या ध्यान दिया?

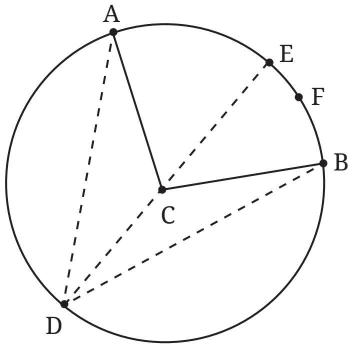


चित्र 5.20

इस गतिविधि को एक अन्य AKB चाप के लिए दोहराइए। इस गतिविधि के आधार पर, किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण और इस चाप के बाहर वृत्त के किसी अन्य बिंदु पर अंतरित कोण के विषय में हम एक कथन प्रतिपादित कर सकते हैं। हम आगे प्रदर्शित करेंगे कि नीचे दिया गया कथन सत्य क्यों है।

© NCERT not to be republished

प्रमेय 9 — *वृत्त के चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण चाप के बाहर वृत्त के शेष भाग के किसी बिंदु पर अंतरित कोण का दोगुना होता है।*



चित्र 5.21 — चाप AFB द्वारा अंतरित कोण

दिया गया है — AFB एक चाप है। ∠ACB चाप AFB, द्वारा केंद्र C पर अंतरित कोण है। D, चाप AFB से बाहर वृत्त पर स्थित एक बिंदु है (चित्र 5.21 देखिए)।

हम यह मान लेते हैं कि DC को आगे बढ़ाने पर यह चाप AFB के किसी बिंदु E पर वृत्त को प्रतिच्छेद करता है जैसे कि चित्र में प्रदर्शित किया गया है।

हम अन्य स्थिति पर कुछ समय पश्चात विचार करेंगे।

सिद्ध करना है — ∠BCA = 2∠BDA

यह सत्य क्यों है? बिंदु D को बिंदु C से मिलाइए और DC को आगे बढ़ाइए, जो चाप AFB को बिंदु E पर प्रतिच्छेद करता है। अब ΔDCB एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें CB = CD है। अत: ∠CBD = ∠CDB होगा।

∠BCE, ΔBCD का बाह्य कोण है। अत: बाह्य कोण प्रमेय द्वारा

∠BCE = ∠CBD + ∠CDB = 2∠BDC

इसी प्रकार, ΔADC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें CA = CD है।

अत: ∠CAD = ∠CDA होगा।

∠ACE, ΔADC का बाह्य कोण है। अत: बाह्य कोण प्रमेय द्वारा

∠ACE = ∠CAD + ∠CDA = 2∠CDA

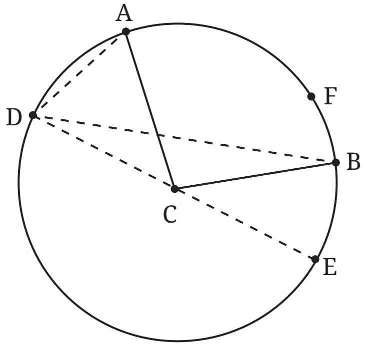
अब ∠BCA = ∠BCE + ∠ECA और ∠BDA = ∠BDE + ∠EDA है।

चूँकि ∠BCA = 2(∠BDC + ∠CDA) = 2∠BDA है।

अत: ∠BCA = 2 ∠BDA होगा।

यदि चित्र 5.22 में दिए अनुसार स्थिति हो तो ऊपर दी गई स्पष्टता सही नहीं होगी, जिसमें DC को आगे बढ़ाने पर यह वृत्त से चाप AFB के बाहर किसी बिंदु E पर मिलता है। हमें इस स्थिति को आगे दी गई अन्य विधि से करना होगा।

© NCERT not to be republished



चित्र 5.22 — चाप AFB द्वारा अंतरित कोण

दिया गया है— AFB एक चाप है। ∠ACB, चाप AFB द्वारा केंद्र C पर अंतरित कोण है। बिंदु D, चाप AFB के बाहर वृत्त पर स्थित बिंदु है और DC को आगे बढ़ाने पर यह वृत्त को चाप AFB के बाहर किसी बिंदु E पर प्रतिच्छेद करता है जैसा कि चित्र 5.22 में दर्शाया गया है।

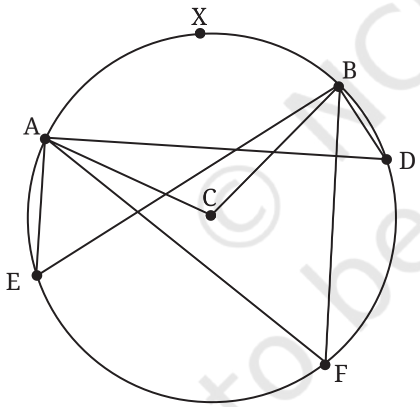
हम यहाँ पुन: समद्विबाहु त्रिभुज के गुणों का उपयोग करेंगे।

$\angle ACE = \angle ADC + \angle CAD = 2\angle ADC$, क्योंकि CA = CD (और इसीलिए $\angle ADC = \angle CAD$) है।

इसी प्रकार, $\angle BCE = \angle BDC + \angle CBD = 2\angle BDC$ है।

साथ ही, $\angle ACB = \angle ACE - \angle BCE$ और $\angle ADB = \angle ADC - \angle BDC$ है।

अत: $\angle ACB = 2\angle ADB$ है।



चित्र 5.23 — चाप द्वारा समान अंतरित कोण

इस गतिविधि से किसी बहुत रोचक गुणधर्म का पता चलता है। यह वही गुणधर्म है जो प्रमेय 9 से पूर्व में दी गई गतिविधि से प्राप्त होता है। एक चाप AB लीजिए। सुनिश्चित कीजिए कि आप A और B तक चाप के अनुदिश किस मार्ग से जाते हैं। चाप AB के बाहर वृत्त पर स्थित कोई बिंदु D लीजिए।

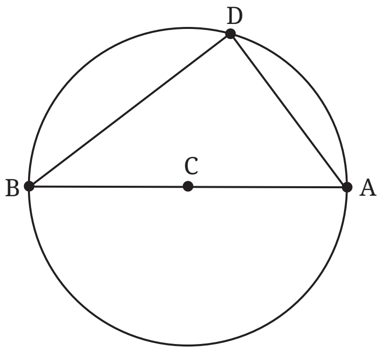
जब तक बिंदु D वृत्त पर चाप के बाहर कहीं भी स्थित हो तब तक ∠ADB समान होगा।

आइए, चित्र 5.23 का उपयोग करते हुए हम इस तथ्य को और स्पष्ट रूप से समझते हैं। बिंदु A से B तक X से होकर जाते हुए वृत्त के चाप पर विचार करते हैं। इस चाप के बाहर वृत्त पर स्थित बिंदु वे बिंदु हैं, जिनसे आप तब होकर गुजरते हैं जब आप A से B तक E से होकर जाते हैं। चाप AXB द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण, भुजा CA द्वारा बना वह कोण है जब हम X से होकर जाते हुए CA से CB तक पहुँचते हैं। बिंदु E, F और D चाप AXB पर स्थित नहीं हैं। प्रमेय से हमें $\angle AEB = \angle ADB = \angle AFB = \frac{1}{2}\angle ACB$ प्राप्त होता है।

© NCERT not to be republished

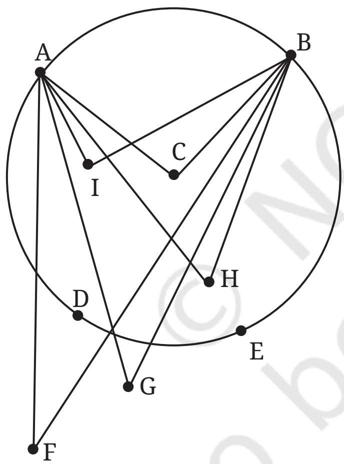
उपप्रमेय — *व्यास द्वारा वृत्त के किसी भी बिंदु पर अंतरित कोण 90° होता है।*

उपप्रमेय — उपप्रमेय एक ऐसा तथ्य है जो पूर्व में सिद्ध हो चुकी प्रमेय से प्राप्त होता है।



चित्र 5.24

यह सत्य क्यों है? मान लीजिए AB एक व्यास है (चित्र 5.24)। हमें प्रदर्शित करना है कि ∠ADB का मान 90° है। हम A से B तक उस चाप को लेते हैं जिसमें बिंदु D स्थित नहीं है। इस चाप द्वारा केंद्र C पर अंतरित कोण क्या है? हमें इस चाप के अनुदिश बिंदु A से B तक बढ़ना है। अत: अंतरित कोण ∠ACB है जो एक ऋजु कोण (सरल कोण) 180° है। अत: $\angle ADB = \frac{1}{2} \angle ACB = 90°$ है।



चित्र 5.25 — बिंदु और जीवा

यह तथ्य कि वृत्त के एक ही चाप वृत्तखंड में बने सभी कोण समान होते हैं, एक ऐसा आकर्षक तथ्य है, जो वृत्त को अन्य सभी आकृतियों से भिन्न और विशिष्ट बनाता है।

चित्र 5.25 में चाप AB द्वारा वृत्त के बाहर स्थित बिंदुओं F, G पर अंतरित कोण भिन्न हैं। वृत्त के अंदर स्थित बिंदुओं के लिए भी सभी ∠AIB, ∠ACB और ∠AHB भिन्न हैं। किंतु चाप AB पर स्थित सभी बिंदुओं P पर अंतरित कोण समान हैं। इस प्रकार बिंदु D व E के लिए ∠ADB = ∠AEB है।

प्रश्नावली 5.6

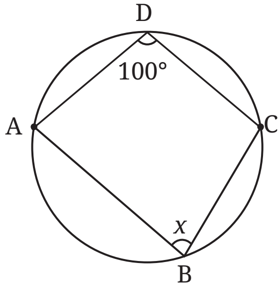
1. किसी वृत्त में जिसका केंद्र O है, केंद्रीय कोण AOB की माप 60° है। यदि वृत्त की त्रिज्या 12 सेंटीमीटर है तो जीवा AB की लंबाई क्या है?
2. मान लीजिए, एक वृत्त का केंद्र O है और वृत्त पर स्थित दो बिंदु A और B हैं।
   (i) क्या AB के एक ही ओर वृत्त पर स्थित दो बिंदु X, Y इस प्रकार हो सकते हैं कि ∠AXB, ∠AYB से भिन्न हो?

© NCERT not to be republished

(ii) क्या यह सत्य है कि यदि $\angle AXB = \angle AYB$ हो तो बिंदु X व Y वृत्त पर एक ही ओर स्थित हैं?

(iii) यदि $\angle AXB = \angle AYB$ हो और X व Y वृत्त पर स्थित नहीं हैं तो क्या A, B और X से होकर जाने वाला वृत्त बिंदु Y से होकर जाएगा?

3. चित्र 5.26 में x ज्ञात कीजिए।



चित्र 5.26

5.8 बिंदुओं की संवृत्तीयता

अब हम इस प्रश्न का उत्तर ढूँढ़ते हैं कि कब 4 बिंदु एक ही वृत्त पर स्थित होंगे। तत्पश्चात हम आपको इस प्रश्न का उत्तर स्वयं ढूँढ़ने देंगे कि कब 5, 6 और इससे भी अधिक बिंदु एक ही वृत्त पर स्थित होंगे! एक ही वृत्त पर स्थित बिंदुओं को **संवृत्तीय** बिंदु कहते हैं।

प्रमेय 10 — *यदि दो बिंदुओं A व B को जोड़ने वाला रेखाखंड AB, उसको अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिंदुओं C व D पर समान कोण अंतरित करता है तो चारों बिंदु एक ही वृत्त पर स्थित होते हैं।*

सदैव की तरह सर्वप्रथम हम चित्र बनाते हैं।

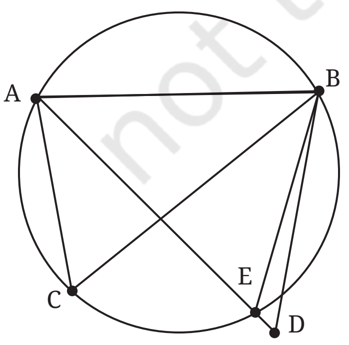
दिया गया है — रेखाखंड AB पर विचार कीजिए। बिंदु C और D, AB के एक ही ओर स्थित है; बिंदु C और D रेखा AB पर स्थित नहीं हैं और $\angle ACB = \angle ADB$ है।

सिद्ध करना है — बिंदु A, B, C, D एक ही वृत्त पर स्थित हैं।

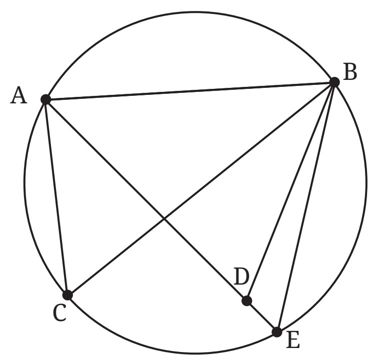
यह सत्य क्यों है? बिंदु A, B, C असंरेखीय बिंदु हैं। अत: प्रमेय 1 का उपयोग करने पर एक वृत्त बिंदुओं A, B, C से होकर जाएगा।

आइए, प्रदर्शित करते हैं कि D उस वृत्त पर स्थित है। इसके लिए आइए A, B और C से होकर जाने वाला कोई वृत्त बनाते हैं।

मान लीजिए कि बिंदु D इस वृत्त पर स्थित नहीं है; तब या तो यह वृत्त के अंदर स्थित होगा या बाहर स्थित होगा। AD को मिलाइए।



चित्र 5.27(क)



चित्र 5.27(ख)

© NCERT not to be republished

यदि बिंदु D वृत्त के बाहर स्थित है तो AD वृत्त को बिंदु E पर प्रतिच्छेद करता है, जैसा चित्र 5.27(क) में प्रदर्शित किया गया है। यदि बिंदु D वृत्त के अंदर स्थित है तो AD को आगे बढ़ाने पर यह वृत्त को बिंदु E पर मिलता है जैसा चित्र 5.27(ख) में प्रदर्शित किया गया है। अब बिंदु C व E जीवा AB द्वारा बने एक ही चाप पर स्थित हैं। अत: $\angle ACB = \angle AEB$ होगा।

यदि बिंदु D वृत्त के बाहर स्थित है तो $\angle AEB$, ΔBED का बहिष्कोण है, अत: $\angle AEB > \angle ADB$ है। साथ ही, $\angle AEB = \angle ACB$ (एक ही वृत्तखंड में बने कोण) है तथा $\angle ACB = \angle ADB$ (दिया गया) है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\angle ACB$ स्वयं से ही बड़ा है, जो असंभव है।

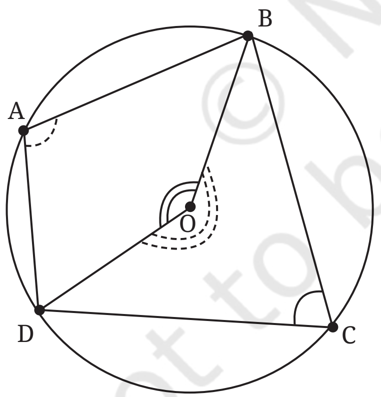
यदि बिंदु D वृत्त के अंदर स्थित है जैसा चित्र 5.27(ख) में प्रदर्शित किया गया है तो $\angle ADB$, ΔBED का बहिष्कोण है। जिस प्रकार हमने ऊपर दी गई स्थिति में तर्क दिए हैं, उसी प्रकार हमें इस स्थिति में भी असंभव निष्कर्ष प्राप्त होता है।

अत: हमें इन दोनों ही विकल्पों को हटाना होगा (D वृत्त के बाहर स्थित है और D वृत्त के अंदर स्थित है)। अत: बिंदु D अवश्य ही A, B, C से होकर जाते हुए वृत्त पर स्थित होगा। अन्य शब्दों में A, B, C, D संवृत्तीय हैं।

जब किसी चतुर्भुज के शीर्ष संवृत्तीय होते हैं तो वह चतुर्भुज एक **चक्रीय चतुर्भुज** कहलाता है।

इस गुण का उपयोग हम वृत्तों के अन्य रोचक गुण को प्रदर्शित करने के लिए करेंगे!

प्रमेय 11 — *चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल 180° होता है।*



चित्र 5.28

दिया गया है — A, B, C, D एक चक्रीय चतुर्भुज के शीर्ष हैं (चित्र 5.28)। इसका अर्थ है कि A, B, C, D से होकर जाता हुआ एक वृत्त है। मान लीजिए, वृत्त का केंद्र O है।

सिद्ध करना है — $\angle BAD + \angle BCD = 180°$

हम यह कैसे प्रदर्शित करेंगे कि यह सत्य है? चाप BCD पर विचार कीजिए; बिंदु A वृत्त पर स्थित है और यह चाप BCD के बाहर स्थित है। अत: $\angle BAD$, चाप BCD द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण का आधा होगा। चूँकि हम OB से OD तक बिंदु C से होकर जाते हैं, अत: यह प्रतिवर्ती कोण BOD (बिंदुकित) है। इस प्रकार प्रतिवर्ती कोण $\angle BAD = \frac{1}{2}$ (प्रतिवर्ती कोण BOD) है।

इसी प्रकार, $\angle BCD$ चाप BAD द्वारा केंद्र O पर अंतरित कोण है। यह एक कोण है जिसे दो वक्रीय चिह्नों द्वारा प्रदर्शित किया गया है। चूँकि C, चाप BCD पर स्थित है इसलिए हमें OB से OD तक बिंदु A से होकर जाना होगा। अत: $\angle BCD = \frac{1}{2} (\angle BOD)$ है।

अत: $\angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2}$ (केंद्र O पर संपूर्ण कोण)

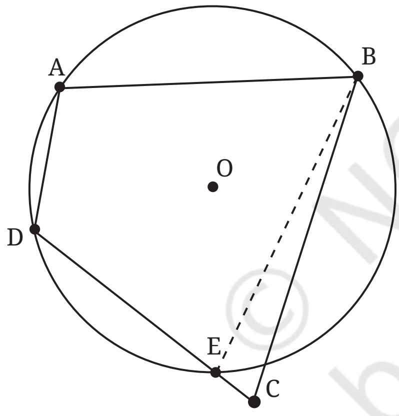
बिंदु O पर एक पूर्ण घूर्णन की माप 360° है।

इस प्रकार, $\angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2} (360°) = 180°$ है।

अत: एक चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल 180° है। इस प्रमेय का विलोम भी सत्य है।

प्रश्न — एक चक्रीय चतुर्भुज के कोणों की माप $\angle A = 80°$, $\angle B = 110°$, $\angle C = 100°$ तथा $\angle D = 70°$ है। क्या ऐसे चतुर्भुज की रचना की जा सकती है? स्पष्ट कीजिए कि क्यों या क्यों नहीं।

प्रमेय 12 — *यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल 180° है तो उस चतुर्भुज के शीर्ष एक वृत्त पर स्थित होते हैं अर्थात शीर्ष संवृत्तीय होते हैं।*



चित्र 5.29

दिया गया है — ABCD एक चतुर्भुज है (चित्र 5.29)।

$\angle BAD + \angle BCD = 180°$

$\angle ABC + \angle CDA = 180°$

सिद्ध करना है — ABCD चक्रीय चतुर्भुज है।

यह सत्य क्यों है? मान लीजिए, ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज नहीं है। चूँकि A, D, B संरेखीय नहीं हैं, अत: कोई वृत्त होगा जो इन तीनों बिंदुओं से होकर जाता है। यदि वह वृत्त C से होकर नहीं जाता है तो दो स्थितियाँ हो सकती हैं— C वृत्त के बाहर या C वृत्त के अंदर स्थित है।

हम यहाँ केवल पहली स्थिति पर विचार करेंगे और दूसरी स्थिति को विद्यार्थी गृहकार्य के रूप में हल करने का प्रयास करेंगे।

माना कि E वह बिंदु है जिस पर CD वृत्त से मिलता है (चित्र 5.29 देखिए)। तब ABED एक चक्रीय चतुर्भुज होगा। अत: प्रमेय 11 के अनुसार $\angle BAD + \angle BED = 180°$ होगा।

हमें यह भी ज्ञात कि $\angle BAD + \angle DCB = 180°$ है।

अत: $\angle BCD = \angle BED$ है। किंतु यह असंभव है क्योंकि $\angle BED$, $\angle BEC$ का बहिष्कोण है और इसीलिए वह $\angle BCE$ से बड़ा होगा अर्थात $\angle BCD$ से बड़ा होगा।

अत: बिंदु A, B, C, D सभी एक वृत्त पर स्थित हैं।

© NCERT not to be republished

वृत्त एक सुंदर और लुभावनी आकृति है। इन आधारभूत गुणों को पूर्णत: समझने पर आप वृत्त में सममिति और जीवाओं के गुण, जीवाओं द्वारा अंतरित कोण, केंद्र से जीवाओं की दूरी और चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण को स्पष्ट रूप से समझने लगेंगे।

आगामी कक्षा में आप वृत्त के विषय में ऐसे ही कई अन्य रोचक और आकर्षक परिणामों का अध्ययन करेंगे। हमसे जुड़े रहिए, अभी बहुत कुछ सीखना शेष है।

अंतिम प्रश्नावली

1. किसी वृत्त में, केंद्र से 5 सेंटीमीटर दूरी पर एक जीवा है। यदि वृत्त की त्रिज्या 13 सेंटीमीटर है तो जीवा की लंबाई क्या है?
2. एक वृत्त का चाप केंद्र पर 70° कोण अंतरित करता है। इस चाप द्वारा वृत्त के किसी बिंदु पर अंतरित कोण की माप क्या है?
3. किसी वृत्त का व्यास 26 सेंटीमीटर है। वृत्त में 24 सेंटीमीटर लंबी जीवा बनाई गई है। वृत्त के केंद्र से जीवा की दूरी ज्ञात कीजिए।
4. किसी वृत्त की त्रिज्या 15 सेंटीमीटर है। वृत्त में एक जीवा बनाई गई है। वृत्त के केंद्र से जीवा की दूरी 9 सेंटीमीटर है। जीवा की लंबाई क्या है?
5. सिद्ध कीजिए कि किसी जीवा का लंब समद्विभाजक वृत्त के केंद्र से होकर जाता है।
6. किसी वृत्त का व्यास AB है। वृत्त की परिधि पर कोई बिंदु C स्थित है। $\angle ACB$ की माप क्या है? अपने तर्क की व्याख्या कीजिए।
7. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जो एक वृत्त के अंतर्गत बनाया गया है। यदि $\angle A$ की माप 75° है तो $\angle C$ की माप कितनी होगी? यदि $\angle B$ की माप 110° है तो $\angle D$ की माप कितनी होगी?
8. चतुर्भुज PQRS एक वृत्त के अंतर्गत बनाया गया है। यदि $\angle P = (2x + 10)°$ और $\angle R = (3x - 20)°$ है तो x का मान और $\angle P$ व $\angle R$ की माप ज्ञात कीजिए।
9. 16 सेंटीमीटर लंबी जीवा की वृत्त के केंद्र से दूरी 6 सेंटीमीटर है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
10. एक चक्रीय चतुर्भुज की भुजाएँ 5, 5, 12 और 12 इकाई हैं। चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

*11. एक चक्रीय चतुर्भुज पर विचार कीजिए। चतुर्भुज के परिवृत्त की रचना किए बिना हम किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं कि परिवृत्त का केंद्र चतुर्भुज के अंदर या बाहर स्थित होगा? इसे ज्ञात करने की सबसे उपयुक्त विधि क्या है?

© NCERT not to be republished

*12. जब वृत्त की दो जीवाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं तो प्रत्येक जीवा दो रेखाखंडों में विभक्त हो जाती है। प्रदर्शित कीजिए कि यदि दोनों जीवाओं की लंबाई समान हो, तो पहली जीवा के रेखाखंड दूसरी जीवा के संगत रेखाखंडों के समान होंगे।

*13. एक वृत्त की रचना कीजिए, जिसमें 6 सेंटीमीटर लंबी जीवा वृत्त के केंद्र से 3 सेंटीमीटर दूरी पर स्थित हो।

(**संकेत**— क्या यह एक किसी त्रिभुज का परिवृत्त है?)

*14. दर्शाइए कि आयत ही एकमात्र ऐसा समांतर चतुर्भुज है जिसे वृत्त के अंतर्गत बनाया जा सकता है।

*15. दर्शाइए कि यदि एक आयत किसी वृत्त के अंतर्गत है तो उसके विकर्णों का प्रतिच्छेदन बिंदु वृत्त के केंद्र पर ही स्थित होगा।

*16. किसी वृत्त में एक निश्चित लंबाई की सभी जीवाओं पर विचार कीजिए। इन सभी जीवाओं के मध्यबिंदुओं को मिलाने पर कौन-सी आकृति बनती है?

*17. केंद्र O वाले एक वृत्त में जीवाएँ AB और AC सर्वांगसम हैं। स्पष्ट कीजिए कि यह कथन सत्य क्यों है— "वृत्त का केंद्र ∠BAC के कोण समद्विभाजक पर स्थित है।"

18. 10 सेंटीमीटर और 24 सेंटीमीटर लंबाई की दो समांतर जीवाएँ वृत्त के केंद्र के एक ही ओर स्थित हैं। दोनों जीवाओं के मध्य की दूरी 7 सेंटीमीटर है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

*19. त्रिज्या r के एक वृत्त के अंतर्गत एक समषट्भुज की रचना की गई है। षट्भुज की भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए और वृत्त के केंद्र से प्रत्येक भुजा की दूरी ज्ञात कीजिए।

20. किसी वृत्त के अंतर्गत एक चतुर्भुज MNOP की रचना की गई है। यदि MN वृत्त का व्यास है तो ∠MOP और ∠MNP के विषय में आप क्या कह सकते हैं? अपने तर्क को स्पष्ट कीजिए।

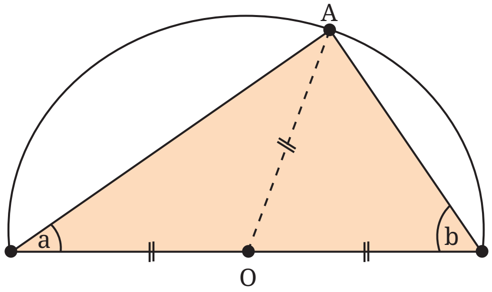
21. मान लीजिए, ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। स्पष्ट कीजिए कि किसी भी शीर्ष पर बहिष्कोण, सम्मुख अंत:कोण के समान क्यों है? (अर्थात ∠CDE = ∠ABC, जहाँ E, भुजा CD को आगे बढ़ाने पर प्राप्त रेखा पर कोई बिंदु है)।

*22. "वृत्त की ऐसी कोई जीवा नहीं है जो उसके व्यास से बड़ी हो।" आप इस कथन को कैसे सिद्ध करेंगे?

*23. मान लीजिए, A किसी दिए गए वृत्त के अंदर स्थित कोई भी बिंदु है। वृत्त का केंद्र O है। प्रदर्शित कीजिए कि A से होकर जाने वाली वृत्त की सबसे छोटी जीवा, वह जीवा होगी जो OA के लंबवत है।

© NCERT not to be republished

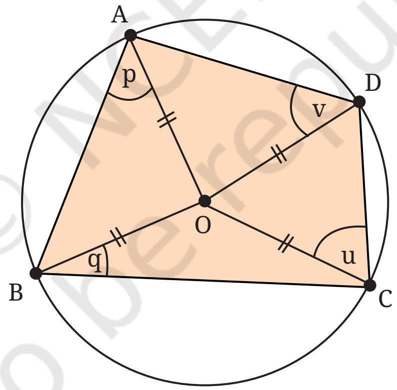
24. अर्धवृत्त का कोण 90° होता है। आप दिए गए चित्र का उपयोग इस कथन को सत्यापित करने के लिए किस प्रकार करेंगे?



चित्र 5.30

*25. किसी वृत्त में दो जीवाएँ CC' और DD', व्यास AB के लंबवत बनाई गई हैं। सिद्ध कीजिए कि जीवाओं CD और C' D' के मध्यबिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड MM', AB के लंबवत है।

*26. किसी भी चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल 180º होता है आप नीचे दिए गए चित्र का उपयोग इस कथन को सत्यापित करने में किस प्रकार करेंगे?



चित्र 5.31

© NCERT not to be republished

सारांश

- एक **वृत्त** किसी समतल पर स्थित उन सभी बिंदुओं का समूह है जो समतल पर किसी निश्चित बिंदु से समान दूरी (**त्रिज्या**) पर स्थित हों। इस निश्चित बिंदु को वृत्त का **केंद्र** कहते हैं।
- वृत्त में किसी भी व्यास के सापेक्ष **परावर्तन सममिति** होती है।

- वृत्त में केंद्र के सापेक्ष किसी भी कोण में **घूर्णन सममिति** होती है।
- दिए गए दो बिंदुओं से होकर जाने वाले अनंत वृत्त बनाए जा सकते हैं। इन वृत्तों के केंद्र, दोनों दिए गए बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड के लंब समद्विभाजक पर स्थित होते हैं।
- यदि दिए गए तीन बिंदु एक ही सरल रेखा पर स्थित न हों तो उनसे होकर जाता हुआ **केवल एक ही वृत्त** बनाया जा सकता है; यह वृत्त उस त्रिभुज का **परिवृत्त** कहलाता है जिसके शीर्ष दिए गए तीन बिंदु हैं। इस वृत्त का केंद्र, जिसे तीनों बिंदुओं का **परिकेंद्र** कहते हैं, तीनों बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंडों के लंब समद्विभाजकों पर स्थित होता है।
- समान जीवाएँ वृत्त के केंद्र पर समान कोण अंतरित करती हैं। विलोमत: यदि दो जीवाएँ केंद्र पर समान कोण अंतरित करती हैं तो जीवाओं की लंबाई समान होती है।
- वृत्त के केंद्र से जीवा के मध्यबिंदु को मिलाने वाली रेखा, उस जीवा पर लंब होती है। इसके विपरीत, केंद्र से जीवा पर खींचा गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।
- वृत्त में समान जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं। इसके विपरीत, वे जीवाएँ जो केंद्र से समदूरस्थ होती हैं, वे समान लंबाई की होती हैं।
- दी गई दो असमान जीवाओं में से लंबी जीवा केंद्र के अधिक समीप होती है।
- किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण उसी चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिंदु पर अंतरित कोण का दोगुना होता है।
- व्यास द्वारा वृत्त के किसी बिंदु पर अंतरित कोण 90° होता है।
- यदि वृत्त के दो बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड, उस रेखाखंड के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिंदुओं पर समान कोण अंतरित करे तो चारों बिंदु एक ही वृत्त पर स्थित होते हैं (अर्थात बिंदु **संवृत्तीय** होते हैं)।
- किसी वृत्त के अंतर्गत चतुर्भुज, **चक्रीय चतुर्भुज** कहलाता है। चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योगफल 180° होगा। विलोमत: यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल 180° हो तो यह एक चक्रीय चतुर्भुज होता है।

© NCERT not to be republished