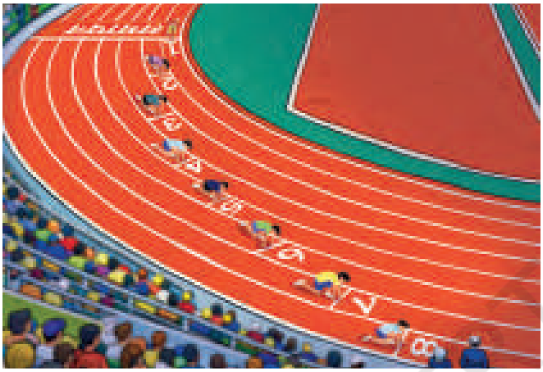
6 समष्टि मापन — परिमाप और क्षेत्रफल

0920CH06



चित्र 6.1— 4 × 100 मीटर रिले दौड़ के आरंभिक स्थान पर धावक

चित्र 6.1 में आप देख सकते हैं कि धावक 4 × 100 मीटर रिले दौड़ के आरंभिक स्थान पर एकत्रित हैं। दौड़-पथ (ट्रैक) बनाए जा चुके हैं और सभी धावक इन पथों पर दौड़ने के लिए तैयार हैं। क्या आपने ध्यान दिया कि सभी धावक समान आरंभिक रेखा पर नहीं हैं?

ऐसा लगता है कि बाह्य दौड़-पथों के धावक आंतरिक दौड़-पथों के धावकों से आगे से आरंभ कर रहे हैं जबकि समापन रेखा सबके लिए एक ही है। इसका क्या कारण हो सकता है? आसन्न दौड़-पथों की आंरभिक रेखाओं में अंतर को 'सांतरण' (स्टैगर) कहते हैं। ध्यान दीजिए कि सांतरण की प्रक्रिया बाह्यतम दौड़-पथ तक चलती रहती है। क्या आप विचार कर सकते हैं कि सांतरण किसी धावक (बाह्य दौड़-पथ या आंतरिक दौड़-पथ के धावकों को) को अनुचित लाभ देता है? ऐसा क्यों अथवा क्यों नहीं है? आयोजक किस आधार पर दौड़-पथों के मध्य सांतरण का माप तय कर सकते हैं?

सोचिए और विचार कीजिए

मेरे विद्यालय में खेल का मैदान 400 मीटर दौड़-पथ के लिए बहुत छोटा है इसलिए वहाँ 200 मीटर का दौड़-पथ बनाया गया। क्या इसका अर्थ यह है कि हमारे विद्यालय में समान 4 × 100 मीटर रिले दौड़ के लिए हमें छोटे सांतरण वाले (अर्थात ओलंपिक में उपयोग किए जाने वाले सांतरण से छोटे) दौड़-पथों की आवश्यकता है?

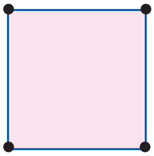
4 × 100 मीटर धावक दौड़-पथ के लिए आवश्यक दौड़-पथ सांतरण के संबंध में प्रश्न हल करने लिए हमें यह जानना होगा कि एक वृत्त के चारों ओर की लंबाई कैसे ज्ञात करें।

© NCERT not to be republished

6.1 आकृति का परिमाप

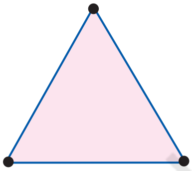
किसी दी गई आकृति के लिए उसका **परिमाप** उसकी सभी सीमा-रेखाओं की कुल लंबाई होता है। कल्पना कीजिए कि एक छोटा कीड़ा इसके चारों ओर की सीमा-रेखा पर टहलने जा रहा है और वह तब तक नहीं मुड़ता जब तक कि वह पुन: अपने आरंभिक बिंदु पर नहीं आ जाता है। कीड़े के द्वारा इस प्रकार तय की गई दूरी को उस आकृति का परिमाप कहते हैं।

अत: a इकाई भुजा वाले वर्ग का परिमाप $4a$ इकाई होता है। a भुजा वाले समबाहु त्रिभुज का परिमाप $3a$ इकाई होता है।



a इकाई

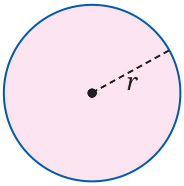
चित्र 6.2(क)



a इकाई

चित्र 6.2(ख)

a इकाई लंबाई और b इकाई चौड़ाई वाले आयत का परिमाप $2(a + b)$ इकाई होता है। ध्यान दीजिए कि वर्ग के परिमाप का सूत्र, $a = b$ वाले आयत के परिमाप के सूत्र की एक 'विशिष्ट स्थिति' है।



चित्र 6.3

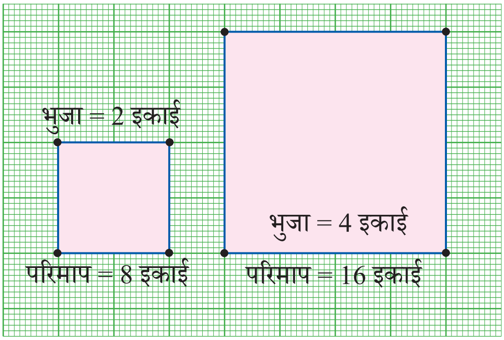
यहाँ हमें एक r इकाई त्रिज्या वाला एक वृत्त दिखाई दे रहा है। इसका परिमाप क्या है? हम इसे कैसे ज्ञात करते हैं?

सोचिए और विचार कीजिए

इस प्रश्न और 400 मीटर दौड़-पथ से संबंधित प्रश्न के मध्य क्या संबंध है?

वृत्त के परिमाप के संबंध में प्रश्न का उत्तर देने के लिए हमें चरणबद्ध रूप से आगे बढ़ना होगा।

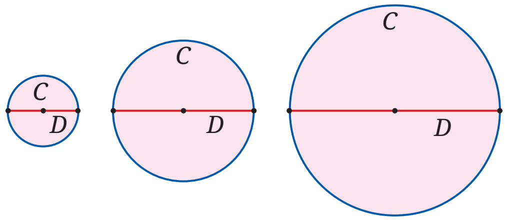
यदि हम किसी वर्ग की भुजाओं को दोगुना कर दें तो उसके परिमाप पर क्या प्रभाव पड़ेगा? परिणामस्वरूप, परिमाप भी दोगुना हो जाएगा। इसके परिमाप और भुजा का अनुपात 4:1 होता है और यह सभी वर्गों के लिए भी मान्य है। वर्ग की भुजा की लंबाई बढ़ने (या कम) होने पर भी, परिमाप और भुजा का अनुपात 4:1 पर स्थिर रहता है।



चित्र 6.4 — परिमाप और भुजा का अनुपात 4:1 है

© NCERT not to be republished

समबाहु त्रिभुज के लिए परिमाप और भुजा का अनुपात 3:1 होता है। समबाहु त्रिभुज की भुजा की लंबाई बढ़ने (या कम) होने पर भी, उसके परिमाप और भुजा का अनुपात 3:1 पर स्थिर रहता है।



चित्र — 6.5

वृत्त के संबंध में क्या कहेंगे? इसका परिमाप (सामान्यत: जिसे **परिधि** कहा जाता है) का व्यास से क्या संबंध होगा?

क्या सभी आकार के वृत्तों (चित्र 6.5) के लिए परिधि (C) और व्यास (D) का अनुपात समान होता है? आपका क्या विचार है?

6.2 वृत्त का परिमाप — *C/D* अनुपात

प्राचीन समय में लोगों को यह बोध हुआ कि भले ही यदि हम वृत्त के आकार में परिवर्तन कर दें, फिर भी वृत्त की परिधि और व्यास का अनुपात परिवर्तित नहीं होता है।

आइए, हम इस अनुपात को वृत्त का 'C/D अनुपात' कहते हैं।

C/D अनुपात का मान क्या है?

आप इस अनुपात का आकलन कैसे करेंगे?

मापन संबंधी गृहकार्य

आप C/D अनुपात का आकलन करने के लिए अपने घर पर एक सरल मापन कर सकते हैं। एक धागे की रील (कॉटन रील) लीजिए, जिस पर पतला धागा लिपटा हुआ हो। रील के व्यास D को यथासंभव सटीकता से माप लीजिए। पतले धागे को खोलिए और तत्पश्चात धागे को रील के चारों ओर 20 बार कसकर लपेटिए। इसे पुनः खोलिए और इसकी लंबाई L को मापिए तथा $\frac{L}{20D}$ की गणना कीजिए। यह वही अनुपात है जिसे हम ज्ञात करना चाहते हैं। सटीकता के लिए, धागा बहुत पतला होना चाहिए। कृपया यह प्रयोग कीजिए! क्या आपको 3 और 4 के मध्य का अनुपात प्राप्त होता है? क्या आपको 3.1 और 3.2 के मध्य का अनुपात प्राप्त होता है?

शुद्ध ज्यामिति का उपयोग करके भी C/D अनुपात का आकलन संभव है, अर्थात बिना किसी मापन के भी! क्या आप कल्पना कर सकते हैं कि कैसे?

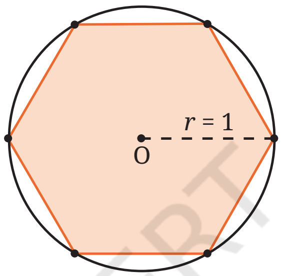
C/D की रोमांचक यात्रा — प्राचीन अनुमानों से लेकर माधव के सटीक सूत्र तक

समस्त भौगोलिक क्षेत्रों के गणितज्ञों की प्राचीन काल से ही वृत्तों और C/D अनुपात में रुचि रही है। इस अचर को, जिसे अब हम π (पाई) उच्चारित करते हैं, यह गणित की विभिन्न शाखाओं के मध्य एक

© NCERT not to be republished

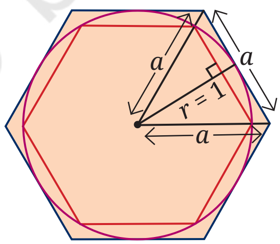
सेतु का कार्य करता है और सीधी-कोर वाले बहुभुजी संसार को प्रकृति के अनंत वक्रों से जोड़ता है। प्राचीन सभ्यताएँ जहाँ निर्माण और व्यापार के लिए व्यावहारिकता और 'पर्याप्तता' मानकों पर निर्भर थीं, अंततः इस अनुपात के अन्वेषण में गणितज्ञों की गहरी रुचि बन गई, जिसने गणित के सिद्धांतों की कृत्रिमता को नए मानदंड प्रदान किए।

मेसोपोटामिया (लगभग 1900 सामान्य संवत पूर्व) में गणितज्ञ अशोधित पूर्णांक मान 3 से आगे बढ़ गए थे। उन्हें बोध हुआ कि एक वृत्त की परिधि, उसके अंतर्गत बने षट्भुज के परिमाप से थोड़ी अधिक होती है। उन्होंने यह निष्कर्ष निकाला कि π का मान 3 से अधिक होना चाहिए और उन्होंने π का मान $3 + \frac{1}{8} = 3.125$ लिया।



चित्र 6.6 — मेसोपोटामियाई षट्भुज-वृत्त तुलना। क्या आप देख सकते हैं कि यह क्यों $\pi > 3$ दर्शाता है?

250 सामान्य संवत पूर्व तक, सिरैक्यूज के आर्किमिडीज ने इस प्रश्न को और आगे तक लेकर गए है। उन्होंने π के मान को वृत्त के अंतर्गत और परिगत रचित बहुभुजों के परिमाप के मध्य में 'समाविष्ट' कर दिया। 'अंतर्गत' और 'परिगत' षट्भुजों का उपयोग करके आर्किमिडीज ने दर्शाया कि π का मान 3 और $2\sqrt{3} \approx 3.46$ के मध्य है। इसी प्रकार, 96-भुजा वाले बहुभुज तक कार्य करते हुए आर्किमिडीज ने पाया कि $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ होता है।



चित्र 6.7 — आर्किमिडीज-विधि में 'अंतर्गत' और 'परिगत' बहुभुजों का उपयोग किया गया है। क्या आप देख सकते हैं कि अंतर्गत और परिगत षट्भुजों का यह चित्र हमें बताता है कि क्यों π का मान 3 और $2\sqrt{3}$ के मध्य है?
*(**संकेत** — बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग कीजिए।)*

© NCERT not to be republished

लगभग 150 सामान्य संवत में एलेक्जेंड्रिया के टॉलेमी ने आर्किमिडीज के अभिकलन को अपनी खगोलीय सारणी में उपयोग करने के लिए परिष्कृत किया और π का मान $\frac{377}{120} \approx 3.14167$ दिया।

इसके कुछ ही समय पश्चात, चीन में **लियू हुई** (263 सामान्य संवत) के 'वृत्त-काटने की विधि' (सर्कल कटिंग मैथड) ने **ज़ू चोंगज़ी** (480 सामान्य संवत) द्वारा इस संदर्भ में दी गई दो बड़ी सफलताओं का आधार तैयार किया। ज़ू ने बहुभुज सन्निकटन विधि को 24,576 भुजाओं तक विस्तारित किया! उन्होंने इसका उपयोग π के लिए $\frac{22}{7} \approx 3.1428$ का 'यूएलू—yuelü' (सन्निकट अनुपात) और $\frac{355}{113} \approx 3.1415929$ का 'मियू—Miü' (निकटस्थ अनुपात) ज्ञात करने के लिए किया। परिमेय भिन्न $\frac{355}{113}$ का मान π के इतना निकट था कि यह 800 से अधिक वर्षों तक विश्व में π के लिए सबसे सटीक मान बना रहा। अब यह ज्ञात हुआ है कि 15,000 से कम 'हर' वाला कोई भी परिमेय भिन्न π के मान के इतना निकट नहीं हो सकता, जितना यह भिन्न है!

499 सामान्य संवत में आर्यभट ने π के लिए $\frac{62832}{20000} = 3.1416$ का मान दिया। महत्त्वपूर्ण बात यह है कि उन्होंने इस मान को 'आसन्न' अर्थात 'समीप' या 'सन्निकट' बताया। इस पर अधिक ध्यान देने से ज्ञात होता है कि इस अनुपात को केवल एक सरल भिन्न के रूप में नहीं लिखा जा सकता। इस दौरान **ब्रह्मगुप्त** (628 सामान्य संवत) ने π के लिए $\sqrt{10} = 3.1622$ मान का उपयोग करने का सुझाव दिया। यद्यपि यह थोड़ा कम सटीक था, परंतु उन्होंने इसकी गणितीय सहजता और समीकरण में इसका सरलता से उपयोग किए जा सकने के कारण इसे चुना, π के मान के लिए $\sqrt{10}$ एक ऐसा चयन था, जो कई शताब्दियों पश्चात तक भी अरब जगत और मध्यकालीन यूरोप में इसका मुख्य सन्निकट मान बना रहा।

बाद के वर्षों में, कई महान गणितज्ञों ने π का अध्ययन किया, जिसमें इसके सन्निकटन भी सम्मिलित थे, परंतु कोई भी सन्निकटन ज़ू के दिए मान $\frac{355}{113}$ जितना सटीक नहीं था अथवा बीजगणित सररलीकरण, $\frac{22}{7}$, 3.1416 और $\sqrt{10}$ जितना सरल नहीं था, जब तक कि संगमग्राम के माधव का कार्य नहीं आया, जिन्होंने इसे सदैव के लिए परिवर्तित कर दिया। माधव को अनुभव हुआ कि यह मात्र एक संख्या नहीं थी, जिसे भिन्न और दूसरे परिमित बीजगणितीय व्यंजकों से सन्निकटित किया जा सके, किंतु यह एक सीमा थी जिस तक पहुँचना था। इस प्रकार माधव ने π के लिए पहला सटीक सूत्र ढूँढ़ा—

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

क्या यह एक सुदर और आकर्षक सूत्र नहीं है? माधव का सूत्र जो 'अनंत श्रेणी' के रूप में दिया गया था, गणित के लिए एक क्रांतिकारी परिवर्तन था। वृत्त को ज्यामितीय रूप में काटने से लेकर संख्याओं के विश्लेषणात्मक योग की ओर बढ़ते हुए माधव ने गणित की उस शाखा को जन्म दिया,

© NCERT not to be republished

जिसे 'कलन' या 'कलनशास्त्र' के नाम से जाना जाता है। उनकी अनंत श्रेणी ने उन्हें π के मान की गणना 11 दशमलव स्थान (3.14159265358) तक कर पाने में मुख्य भूमिका निभाई और यह प्रमाणित किया कि किसी वृत्त की परिधि और उसके व्यास के मध्य का संबंध गणित के एक पूर्णतया नए क्षेत्र के लिए द्वार था।

समय के साथ कुशल और कुशल अनंत श्रेणियाँ विकसित हुईं, जिनसे π का मान और अधिक दशमलव स्थानों तक भी शीघ्रता से मिलने लगा। माधव के पश्चात इस प्रश्न पर मुख्य सफलताएँ नीलकंठ (लगभग 1500), माचिन (1706), रामानुजन (1914) और रामानुजन के विचार को कुशलतापूर्वक आगे बढ़ाने वाले चुडनोव्स्की बंधुओं (1988) को मिली। वर्तमान में उनकी कलन-विधि का उपयोग करके, हम π को नील (सैकड़ों ट्रिलियन) अंकों तक जानते हैं! हम आगे की कक्षाओं में कलनशास्त्र के क्षेत्र के संबंध में और अधिक जानेंगे।

1706 में वेल्श के गणितज्ञ विलियम जोन्स ने C/D अनुपात को दर्शाने के लिए ग्रीक अक्षर π का उपयोग किया क्योंकि π परिमाप के लिए उपयोग किए जाने वाले ग्रीक शब्द 'पेरिमिट्रोज' का पहला अक्षर है। इस प्रतीक चिह्न को स्विस-जर्मन गणितज्ञ लियोनहार्ड यूलर (उच्चारण 'ऑइलर') ने प्रसिद्धि दिलाई थी। हम तब से उसी चिह्न का उपयोग करते आ रहे हैं!

6.3 π अपरिमेय है

π के अंक बिना किसी दिखने वाले प्रतिरूप के निरंतर चलते रहते हैं। आप पहले से ही जानते हैं कि 'भिन्न' एक लयबद्ध प्रतिरूप के साथ दशमलव प्रसार को दर्शाते हैं, जैसे —

$$\frac{1}{3} = 0.33333..., \frac{1}{11} = 0.09090909..., \frac{1}{7} = 0.142857\ 142857...$$

परंतु π के लिए ऐसा कोई प्रतिरूप नहीं दिखता है! इससे यह बोध हुआ कि इसे दो पूर्णांकों के अनुपात के रूप में नहीं लिखा जा सकता। ऐसी संख्याओं को 'अपरिमेय' कहा जाता है। स्मरण रखिए कि एक परिमेय संख्या वह संख्या होती है जिसे किसी 'भिन्न' के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ a, b पूर्णांक हैं और b, 0 के समान नहीं है, जैसे — संख्याएँ $1\frac{2}{3}$, $\frac{-7}{11}$ और 1.4 हैं।

कक्षा 8 में आपने अध्ययन किया था कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। उनके लेखों से ऐसा अनुमान होता है कि आर्यभट और ज़ू चोंगजी ने π को अपरिमेय माना था। शताब्दियों पश्चात (1761) गणितज्ञ लैम्बर्ट ने दर्शाया कि ऐसा ही है अर्थात π अपरिमेय है। परंतु इसे प्रमाणित करने के लिए उन्नत गणित की आवश्यकता होती है, जिसे हम बहुत बाद में सीखेंगे।

चूँकि π अपरिमेय है इसलिए π के लिए कोई 'सर्वोत्तम भिन्न' नहीं है। यदि π के निकट मान का कोई भिन्न विद्यमान है तो हम उससे निकटतम दूसरा भिन्न भी ढूँढ़ सकते हैं।

© NCERT not to be republished

प्रसिद्ध भिन्न $\frac{22}{7}$ अधिकतर व्यावहारिक उपयोग के लिए पर्याप्त है। परंतु यह ध्यान रखना आवश्यक है कि π, $\frac{22}{7}$ के समान नहीं है (ये 'निकट है किंतु समान नहीं है')। इसलिए हम $\pi \approx \frac{22}{7}$ तथा $\pi \neq \frac{22}{7}$ भी लिखते हैं। इसी प्रकार, हम $\sqrt{2} \approx 1.414$ तथा $\sqrt{2} \neq 1.414$ लिख सकते हैं।

जैसा कि आपने पूर्व में ध्यान दिया होगा कि π के लिए एक बहुत सटीक सन्निकटन $\frac{355}{113}$ है।

रोचक तथ्य

π के कुछ आरंभिक दशमलव अंक स्मरण रखने की एक रोचक विधि यहाँ दी गई है—

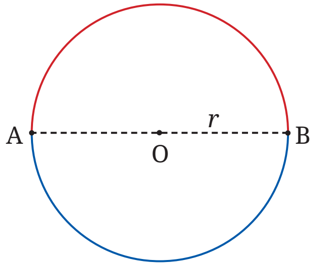
How I wish I could recollect pi.

उपरोक्त अंग्रेजी कथन के प्रत्येक शब्द में अक्षरों की संख्या गिनिए (3, 1, 4, 1, 5, 9, 2) और आपको π के अंक प्राप्त हो जाएँगे! इसलिए $\pi \approx 3.141592...$ है।

चूँकि $\pi \approx 3.14$ और $\pi \approx \frac{22}{7}$ भी है इसलिए 14 मार्च (उत्तरी अमेरिका में '3-14' लिखा जाता है) को प्रत्येक वर्ष **पाई दिवस** के रूप में मनाया जाता है और 22 जुलाई (भारत में '22-7' लिखा जाता है) को प्रत्येक वर्ष **पाई सन्निकटन दिवस** के रूप में मनाया जाता है।

© NCERT not to be republished

6.4 वृत्त की चाप की लंबाई



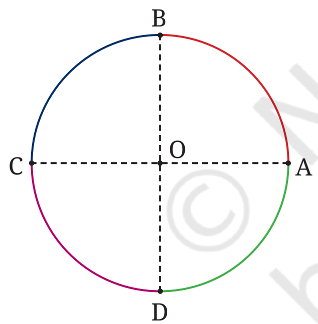
चित्र 6.8 — दो अर्द्धवृत्त मिलकर एक पूर्ण वृत्त बनाते हैं।

d व्यास वाले एक वृत्त की परिधि πd है। चूँकि व्यास, त्रिज्या का दोगुना है, इसलिए हम वृत्त की परिधि को $2\pi r$ भी लिख सकते हैं, जहाँ r त्रिज्या है।

समान त्रिज्या r वाले **अर्द्धवृत्त** की लंबाई क्या होगी (चित्र 6.8 देखिए)?

यदि हम वृत्त के व्यास AB के सापेक्ष प्रतिबिंबित करते हैं तो लाल अर्द्धवृत्त और नीला अर्द्धवृत्त अपना स्थान परिवर्तित कर लेते हैं। इससे स्पष्ट होता है कि उनके अर्द्धवृत्तीय चाप की लंबाई समान है, जो कि $2\pi r \div 2 = \pi r$ है।

आकृति को वृत्त के व्यास AB के सापेक्ष प्रतिबिंबित करने के स्थान पर हम संपूर्ण वृत्त को केंद्र O के चारों ओर 180° के कोण से घुमाने अर्थात वृत्त को आधा घुमाकर भी कल्पना कर सकते हैं। इसका प्रभाव भी वही रहता है और हमें अर्द्धवृत्तीय चाप की लंबाई के लिए समान सूत्र ही प्राप्त होता है।



चित्र 6.9 — चार चतुर्थांश वृत्त मिलकर एक पूर्ण वृत्त निर्मित करते हैं

समान त्रिज्या वाले **चतुर्थांश वृत्त** की लंबाई क्या होगी (चित्र 6.9)?

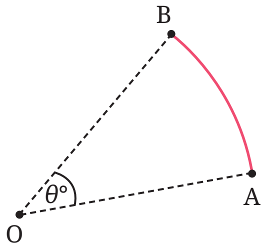
कल्पना कीजिए कि संपूर्ण आकृति को 90°, दक्षिणावर्त या वामावर्त घुमाया जाए। इस प्रकार, प्रत्येक चतुर्थांश वृत्त घूमता है और दूसरे चतुर्थांश वृत्त को ढक लेता है। इसलिए प्रत्येक चतुर्थांश वृत्त के चाप की लंबाई एक समान होती है और यह $2\pi r \div 4 = \frac{\pi r}{2}$ के समान होती है।

निम्नलिखित बिंदुओं पर ध्यान दीजिए—

- अर्द्धवृत्त की लंबाई का सूत्र $2\pi r \times \frac{180^\circ}{360^\circ}$ भी लिखा जा सकता है।
- एक चतुर्थांश वृत्त की लंबाई का सूत्र $2\pi r \times \frac{90^\circ}{360^\circ}$ भी लिखा जा सकता है।

© NCERT not to be republished

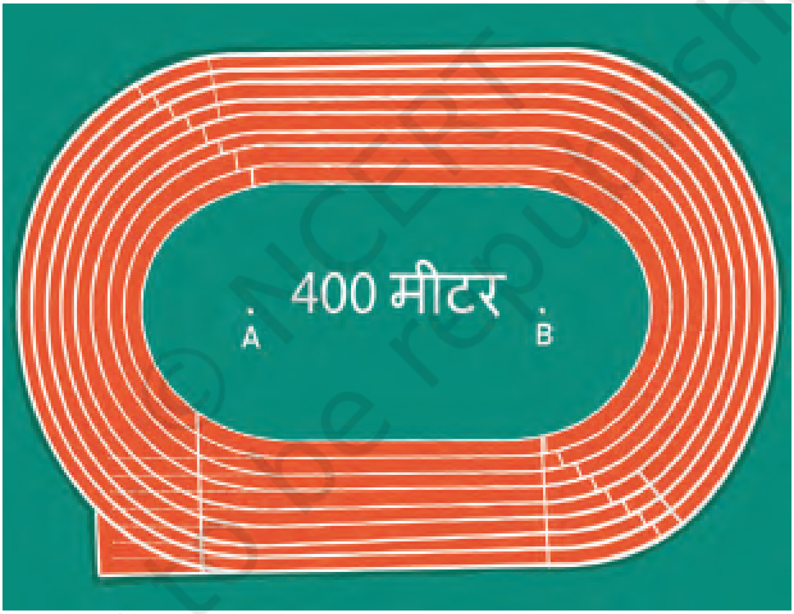
इनसे हम किसी वृत्त के चाप की लंबाई के सूत्र का अनुमान वृत्त के केंद्रबिंदु पर बनने वाले कोण (अर्थात वह कोण जो यह 'अंतरित' करता है) के पदों में भी लगा सकते हैं।



चित्र 6.10 — वृत्त के चाप की लंबाई

यदि चाप AB है तथा यह वृत्त के केंद्र O पर $\theta°$ का कोण अंतरित करती है तो चाप की लंबाई $2\pi r \times \frac{\theta°}{360°}$ है।

400 मीटर दौड़-पथ पर विस्तृत दृष्टि



चित्र 6.11 — दौड़-पथ का योजनाबद्ध चित्र

चित्र 6.11 में 400 मीटर का दौड़-पथ दर्शाया गया है। आप यहाँ 84.39 मीटर के दो सीधे खंड और दो वक्रीय खंड देख सकते हैं जो उभयनिष्ठ केंद्र (बिंदु A और B) वाले अर्द्धवृत्त हैं; दोनों ओर बने सबसे आंतरिक अर्द्धवृत्त की त्रिज्या 36.5 मीटर है। प्रत्येक पथ की चौड़ाई 1.22 मीटर है।

मान लीजिए कि एक धाविका किसी दौड़-पथ का एक संपूर्ण चक्कर लगाती है। वह कुल कितनी दूरी दौड़कर तय करती है?

- मान लीजिए कि वह आंतरिक सीमा-रेखा से 0.3 मीटर के अंतर पर दौड़ती है।
- वह 84.39 मीटर लंबाई के दो सीधे खंडों में दौड़ती है, जो कुल 168.78 मीटर हैं।
- वह (36.5 + 0.3) मीटर अर्थात 36.8 मीटर त्रिज्या के दो अर्द्धवृत्त पर भी दौड़ती है।
- दोनों समान अर्द्धवृत्त मिलकर एक पूर्ण वृत्त बनाते है।
- इसकी परिधि $2 \times \pi \times 36.8 = 2 \times 3.1416 \times 36.8 = 231.22$ मीटर है।
- अतः धाविका द्वारा दौड़ी गई कुल दूरी $168.78 + 231.22 = 400$ मीटर है।

अब दो धाविकाओं के बारे में विचार कीजिए, एक सबसे आंतरिक दौड़-पथ में और दूसरी धाविका दूसरे दौड़-पथ पर दौड़ती है। सीधी रेखा वाले खंड पर दोनों धाविकाएँ एक समान दूरी दौड़ती हैं किंतु वक्रीय खंडों पर दूसरे दौड़-पथ की धाविका अधिक दूरी तक दौड़ती है क्योंकि उसके अर्द्धवृत्त की त्रिज्या बड़ी है। इसी को समान करने के लिए सांतरण की आवश्यकता होती है।

सोचिए और विचार कीजिए

पहले और दूसरे दौड़-पथ की त्रिज्या में क्या अंतर है? दूसरे दौड़-पथ में धावक के लिए कितने सांतरण की आवश्यकता है, यह ज्ञात करने के लिए चित्र 6.11 का उपयोग कीजिए। क्या दूसरे और तीसरे दौड़-पथ के मध्य भी समान सांतरण की आवश्यकता होगी?

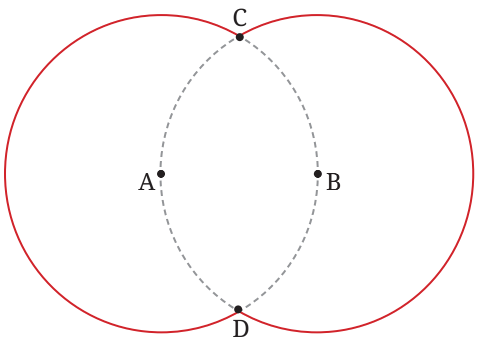
6.5 परिमाप पर आधारित प्रश्न, पहेलियाँ और विरोधाभास

हम इस भाग को परिमाप के संदर्भ से जुड़े कुछ रोचक प्रश्नों पर प्रकाश डालकर पूर्ण करेंगे।

उदाहरण 1 — समान त्रिज्या वाले दो वृत्त इस प्रकार स्थित किए गए हैं कि प्रत्येक वृत्त दूसरे वृत्त के केंद्र से होकर गुजरता है (चित्र 6.12)।

यह दिया गया है कि प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या r इकाई है, r इकाई की दृष्टि से दोनों वृत्तों से मिलकर बने आकार का परिमाप ज्ञात कीजिए। (वृत्तों के अंदर बने बिंदुगत वक्रों को छोड़ दीजिए।)

© NCERT not to be republished



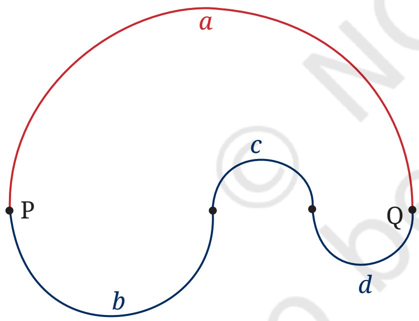
चित्र 6.12

यहाँ केंद्र A और B वाले दो सर्वांगसम वृत्त दिए गए हैं। प्रत्येक वृत्त दूसरे वृत्त के केंद्र से होकर गुजरता है। ये वृत्त बिंदु C और D पर प्रतिच्छेद करते हैं। हमें यहाँ दर्शाए गए दो लाल चापों की कुल लंबाई, त्रिज्या r इकाई के पदों में ज्ञात करनी है।

A, B, C शीर्ष वाले त्रिभुज पर विचार कीजिए। चूँकि AB = r, AC = r, BC = r और त्रिभुज समबाहु है इसलिए $\angle CAB = 60° = \angle CBA$ है।

इसी प्रकार, $\angle BAD = 60° = \angle ABD$ है, इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि $\angle CAD = 120° = \angle CBD$ है।

इसलिए प्रत्येक बिंदुगत चाप उस वृत्त की परिधि का $\frac{1}{3}$ होती है जिस पर वह विद्यमान होती है। इसलिए दो लाल चापों की कुल लंबाई $2 \times \frac{2}{3} \times 2\pi r = \frac{8}{3}\pi r$ है।



चित्र 6.13

उदाहरण 2— चित्र 6.13 में, हम बिंदु P और Q और उन्हें जोड़ने वाले दो पथ देखते हैं। प्रथम पथ अर्द्धवृत्त a से बना है। द्वितीय पथ तीन अर्द्धवृत्तों (b, c और d) से मिलकर बना है। कौन-सा पथ लंबा है? एक पथ का चयन कीजिए— (i) पथ a लंबा है। (ii) पथ $b + c + d$ लंबा है। (iii) दोनों पथों की लंबाई समान है। (आगे अध्ययन करने से पूर्व इसका उत्तर देने का प्रयास कीजिए।)

आइए, इस समस्या को बीजगणित की सहायता से हल करते हैं। मान लीजिए कि अर्द्धवृत्तों a, b, c, d की त्रिज्याएँ क्रमशः a', b', c' और d' हैं। इसलिए अर्द्धवृत्त a की लंबाई $\frac{1}{2}(2\pi)\, a' = \pi a'$ है। इसी प्रकार, अर्द्धवृत्तों b, c और d की लंबाइयाँ क्रमशः $\pi b'$, $\pi c'$ और $\pi d'$ हैं। अतः द्वितीय पथ की लंबाई $\pi(b' + c' + d')$ है और प्रथम पथ की लंबाई $\pi a'$ है।

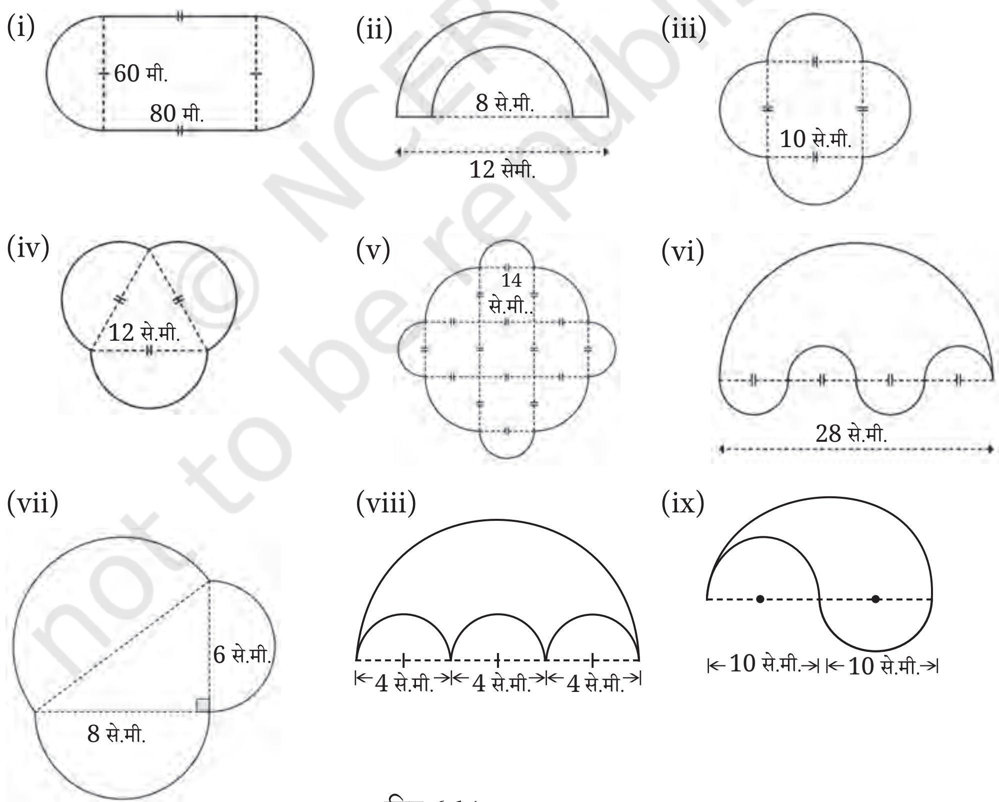
$b' + c' + d'$ अथवा a' में कौन-सा पथ लंबा है? क्या आप देख रहे हैं कि दोनों पथों में से कोई भी लंबा नहीं है? सभी पथ समान हैं! चूँकि PQ की लंबाई $2a'$ है और यह $2b' + 2c' + 2d'$ के समान भी है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि $a' = b' + c' + d'$ है, अतः दोनों पथों की लंबाई समान है!

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 6.1

किसी अन्य निर्देश की अनुपस्थिति में, सन्निकटन $\pi = \frac{22}{7}$ का उपयोग कीजिए।

1. एक वृत्त का परिमाप 44 सेंटीमीटर है। इसकी त्रिज्या क्या होगी?
2. निम्नलिखित वृत्तों की परिधि की गणना 3 दशमलव स्थानों तक कीजिए— (i) त्रिज्या 7 सेंटीमीटर (ii) त्रिज्या 10 सेंटीमीटर (iii) त्रिज्या 12 सेंटीमीटर
3. वृत्त की चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए यदि— (i) त्रिज्या 3.5 सेंटीमीटर है और केंद्र पर कोण 60° है तथा (ii) वृत्त की त्रिज्या 6.3 मीटर है और केंद्र पर कोण 120° है।
4. 14 सेंटीमीटर त्रिज्या और 75° त्रिज्यखंड कोण वाले वृत्त के त्रिज्यखंड (अर्थात एक वक्र भाग और दो सीधी रेखा वाले भाग) का परिमाप ज्ञात कीजिए।
5. निम्नलिखित आकृतियों का परिमाप (चापों को आवश्यकतानुसार वृत्त का एक-चौथाई, आधा या तीन-चौथाई मानकर) ज्ञात कीजिए (चित्र 6.14(i) से 6.14(ix))—

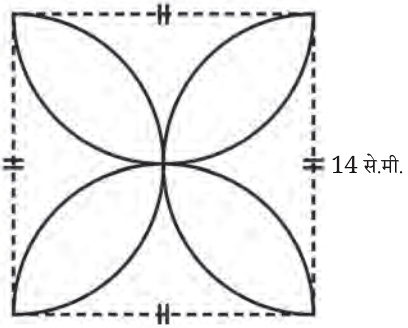


चित्र 6.14

© NCERT not to be republished

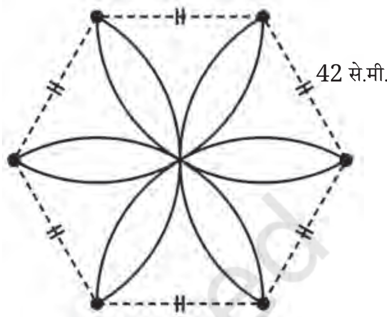
6. यदि कार के पहिए का व्यास 56 सेंटीमीटर है तो — (i) पहिए का एक चक्कर पूर्ण करने के लिए कार को कितनी दूरी तय करनी होगी? (ii) यदि कार 10 किलोमीटर की दूरी तय करती है तो पहिया कितने चक्कर लगाता है?
7. दिए गए प्रत्येक फूल की समस्त पंखुड़ियों का कुल परिमाप ज्ञात कीजिए —

(i)



चित्र 6.15(क) — चापों के केंद्र, वर्ग की भुजाओं के मध्यबिंदु हैं।

(ii)



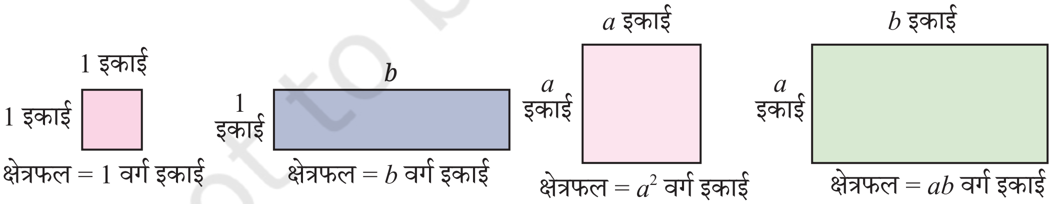
चित्र 6.15(ख) — चापों के केंद्र, षट्भुज के शीर्ष हैं।

8. दो वृत्तों के परिमाप का अनुपात 5:4 है। उनकी त्रिज्या का अनुपात क्या है?

6.6 आयत का क्षेत्रफल

अब हम परिमाप से क्षेत्रफल अर्थात किसी समतल सतह पर द्वि-विमीय क्षेत्र द्वारा घेरे गए 'स्थान के माप' की ओर बढ़ते हैं।

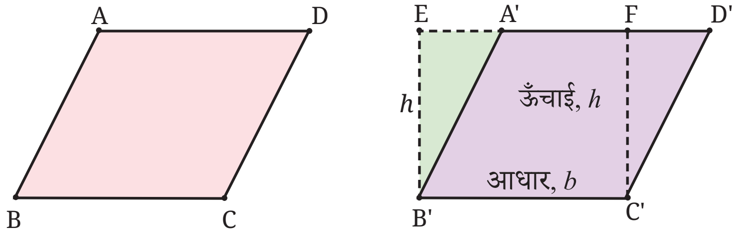
माप सदैव किसी के सापेक्ष होती है जिसे हम इकाई कहते हैं। क्षेत्रफल के लिए इकाई 1×1 वर्ग है; इसमें क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाई लिया जाता है। कक्षा 8 से आप यह जानते हैं कि a इकाई और b इकाई भुजाओं वाले आयत का क्षेत्रफल ab वर्ग इकाई होता है (चित्र 6.16)।



चित्र 6.16 — वर्ग और आयत का क्षेत्रफल

6.7 समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

कक्षा 8 से आपको समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र ज्ञात है।

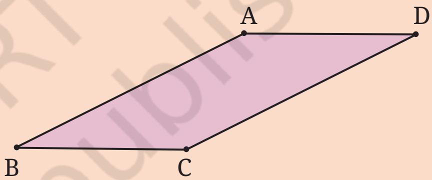


चित्र 6.17 — समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल। यहाँ A'B'C'D', ABCD की प्रतिकृति है।

चित्र 6.17 में प्रदर्शित किया गया है कि समांतर चतुर्भुज ABCD को समान आधार b और समान ऊँचाई h वाले आयत EB'C'F (दाईं ओर; यहाँ समांतर चतुर्भुज A'B'C'D' ABCD की प्रतिकृति है) में कैसे रूपांतरित किया जा सकता है। यद्यपि दोनों आकृतियाँ भिन्न हैं, फिर भी उनका क्षेत्रफल समान है। अतः समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, आधार × ऊँचाई = bh के समान होता है।

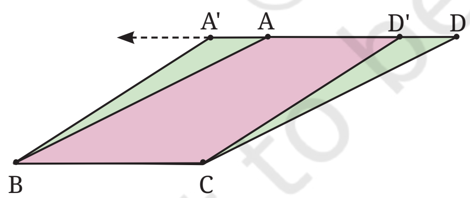
सोचिए और विचार कीजिए

यदि समांतर चतुर्भुज संकरा हो (चित्र 6.18) और C से AD पर डाले गए लंब का पाद भुजा AD पर न हो तो क्या होगा? तब यह चतुर्भुज रचना क्षेत्रफल ज्ञात करने के कार्य को नहीं साधती है। रचना में इस 'अंतराल' को हम कैसे दूर करेंगे?



चित्र 6.18

यहाँ 'संकरे समांतर चतुर्भुज' के प्रश्न को हल करने के लिए एक संकेत दिया गया है।



चित्र 6.19 — संकरा समांतर चतुर्भुज

भुजा DA पर D के निकट एक बिंदु D' चुनें और DA को विस्तारित करते हुए एक बिंदु A' का चयन करें, जहाँ A'A = D'D हो (चित्र 6.19)। तब A'BCD' एक समांतर चतुर्भुज है और चूँकि $\Delta CDD' \cong \Delta BAA'$, इसलिए इसका क्षेत्रफल ABCD के क्षेत्रफल के समान ही है। इस चरण को आवश्यकतानुसार कई बार दोहराइए।

सोचिए और विचार कीजिए

किसी आयत का क्षेत्रफल उसकी भुजाओं की लंबाई ज्ञात होने पर ज्ञात किया जा सकता है। क्या समांतर चतुर्भुज के लिए भी यही सत्य है? अर्थात क्या भुजाओं की लंबाई ज्ञात होने पर समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है? क्यों अथवा क्यों नहीं?

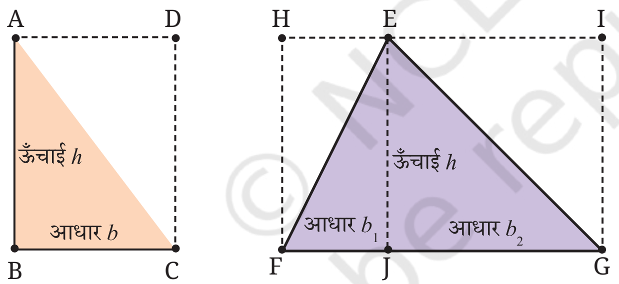
© NCERT not to be republished

(**संकेत** — यदि हम समांतर चतुर्भुज की आसन्न भुजाओं की लंबाई स्थिर रखते हुए उनके मध्य के कोण को घटाते या बढ़ाते हैं तो समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल पर क्या प्रभाव पड़ता है?)

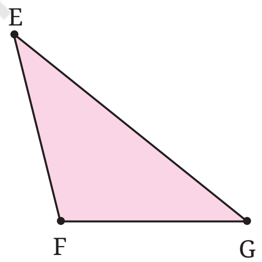
6.8 त्रिभुज का क्षेत्रफल

अब हम त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र ज्ञात करेंगे। (आपने यह सूत्र कक्षा 8 में देखा होगा, परंतु हम इसे संक्षेप में पुनः समझ लेंगे।) सूत्र ज्ञात करने के लिए एक विधि यह है कि सर्वप्रथम समकोण त्रिभुज के लिए तथा उसके पश्चात अन्य त्रिभुजों पर विचार कीजिए। दोनों ही स्थितियों में हम त्रिभुज को एक आयत के अंतर्गत रखते हैं, तत्पश्चात हम आयत के क्षेत्रफल के सूत्र का उपयोग करते हैं। (चित्र 6.20(क) देखिए। ध्यान दीजिए कि FG = FJ + JG, अतः $b = b_1 + b_2$ है।) परिणामस्वरूप, हमें ज्ञात होता है कि b इकाई आधार और h इकाई ऊँचाई वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल b इकाई आधार और h इकाई ऊँचाई वाले आयत के क्षेत्रफल का आधा होता है अर्थात क्षेत्रफल $\frac{1}{2}\,bh$ वर्ग इकाई के समान होता है।

पूर्व के समान आप सोच रहे होंगे कि क्या हमारे तर्क में कुछ कमी है? यदि कोण EFG अधिकोण हो और त्रिभुज का आकार चित्र 6.20(ख) में प्रदर्शित त्रिभुज EFG जैसा हो तब हम क्या करेंगे? इस प्रश्न का उत्तर ज्ञात कीजिए।

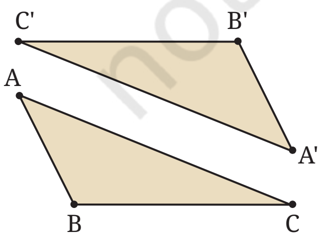


चित्र 6.20(क) — त्रिभुज का क्षेत्रफल

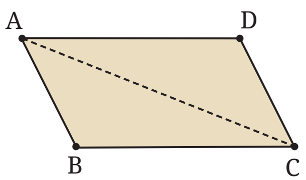


चित्र 6.20 (ख)

त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र ज्ञात करने की एक उत्तम विधि यह देखना है कि त्रिभुज की दो सर्वांगसम प्रतियों को एक साथ संयोजित करके एक समांतर चतुर्भुज बनाया जा सकता है।



चित्र 6.21(क)



चित्र 6.21(ख)

चित्र 6.21(क) में त्रिभुज ABC और A'B'C' सर्वांगसम हैं। इन्हें चित्र 6.21(ख) में दर्शाए अनुसार संयोजित करने पर एक समांतर चतुर्भुज निर्मित होता है।

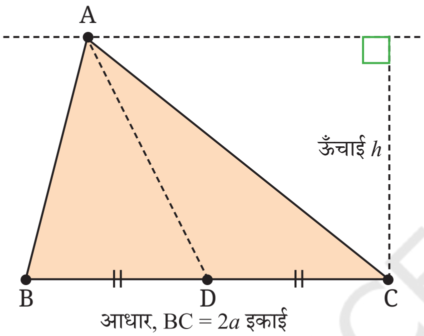
© NCERT not to be republished

क्या आपने देखा कि क्यों दो त्रिभुजों को एक साथ रखकर समांतर चतुर्भुज बनाया गया है? (यदि आप आकृतियों में कोणों का अध्ययन करेंगे (जैसे ∠B'C'A' और ∠BCA) तो आप देखेंगे कि ऐसा क्यों होता है। वह प्रक्रिया स्मरण रखिए, जिससे हम यह ज्ञात करते हैं कि कौन-सी दो रेखाएँ समांतर हैं।

जैसा कि हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई = bh है।

इसलिए त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र $\frac{1}{2}$ × (आधार × ऊँचाई) = $\frac{1}{2}$ bh है।

त्रिभुज की माध्यिका की अवधारणा — उपरोक्त सूत्र के आधार पर हम त्रिभुज की माध्यिका के विषय में एक बहुत ही सुंदर और सरल निष्कर्ष पर पहुँच जाते हैं।



चित्र 6.22

चित्र 6.22 में AD, त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है अर्थात माध्यिका त्रिभुज के शीर्ष के विपरीत रेखाखंड के शीर्ष बिंदुओं के मध्यबिंदु को मिलाने वाली रेखाखंड होती है।

मान लीजिए कि ΔABD और ΔACD के आधार समान हैं (BD = DC) और उनकी ऊँचाई (h) समान है। त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र का उपयोग करते हुए देखते हैं कि उनके क्षेत्रफल समान हैं अर्थात $\frac{ah}{2}$ वर्ग इकाई!

हम इसे एक प्रमेय के रूप में देख सकते हैं।

प्रमेय — *एक त्रिभुज की माध्यिका त्रिभुज को दो समान क्षेत्रफलों वाले त्रिभुजों में विभाजित करती है।*

क्या यह आश्चर्यजनक है? अवश्य ही होना चाहिए। अंततः ΔABD और ΔACD (सामान्यत:) विभिन्न आकार के हैं (अर्थात आपस में सर्वांगसम भी नहीं है), परंतु हमने अभी सिद्ध किया है कि दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान हैं।

सोचिए और विचार कीजिए

ΔABD और ΔACD समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुज हैं, आप आश्चर्यचकित होंगे कि एक सरल रेखा से ΔABD को ऐसे दो या अधिक टुकड़ों में विभाजित कर सकते हैं जो ΔACD को संपूर्णतया ढक ले? आपके विचार में क्या यह संभव है?

यह संभव है, ऐसा कहकर हम आपको अचंभित होने से रोक सकते हैं परंतु हम आपको यह नहीं बताएँगे कि त्रिभुज के कम-से-कम कितने टुकड़ों की आवश्यकता होगी। यह पता लगाने का प्रयास स्वयं कीजिए!

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

मान लीजिए कि दो समान क्षेत्रफलों वाले बहुभुज P और Q दिए गए हैं। क्या उनमें से एक को सीधी रेखा से दो या अधिक भागों में इस प्रकार बाँटना संभव है और फिर उन कटे हुए भागों को इस प्रकार से व्यवस्थित करना संभव है कि वे सभी भाग मिलकर दूसरे बहुभुज को भी पूरा ढक लें? अपने चारों ओर की आकृतियों के उदाहरण सोचिए—

1. समान क्षेत्रफल वाले वर्ग और गैर-वर्गाकार आयत,
2. भिन्न-भिन्न आकृति वाले दो त्रिभुज जिनका क्षेत्रफल समान है।
3. समान क्षेत्रफल वाला एक त्रिभुज और एक वर्ग इसे आप अपनी कल्पना से तैयार कीजिए। आप इसके विषय में अपनी परिकल्पना तैयार कीजिए।

40 इकाई परिमाप वाले विभिन्न आयतों के विषय में विचार कीजिए (भुजाओं का पूर्णांक होना आवश्यक नहीं है)।

1. इस प्रकार के कितने आयत हो सकते हैं?
2. इनमें से कोई ऐसा है जिसका क्षेत्रफल सबसे अधिक हो? इसकी विमाएँ क्या होंगी?
3. क्या इन सभी आयतों में से ऐसा कोई एक आयत है जिसका क्षेत्रफल सबसे कम है? उसकी विमाएँ क्या होंगी? क्या इस प्रकार का कोई भी उत्तर आपको आश्चर्यचकित करता है?

6.8.1 हीरोन का सूत्र

आप त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई से भली-भाँति परिचित हैं। क्या त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालने का कोई और भी सूत्र है? हाँ, अन्य प्रकार से भी क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं। अब हम हीरोन के सूत्र पर चर्चा करेंगे, जिसको यूनान देश के गणितज्ञ और आविष्कारक हीरोन ने ज्ञात किया था। उन्होंने इसे प्राचीन में मिस्र देश के नील नदी के किनारे स्थित शहर अलेक्जेंड्रिया के संग्रहालय में पढ़ा था।

इस सूत्र के अनुसार, यदि ΔABC की भुजाओं की लंबाई $BC = a$, $CA = b$ और $AB = c$ है तो इसका क्षेत्रफल इस प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है। सर्वप्रथम हम इसका अर्द्ध-परिमाप ज्ञात करेंगे, जो कि इसके परिमाप का आधा होगा अर्थात $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, तत्पश्चात त्रिभुज (ΔABC) का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ द्वारा ज्ञात करते हैं।

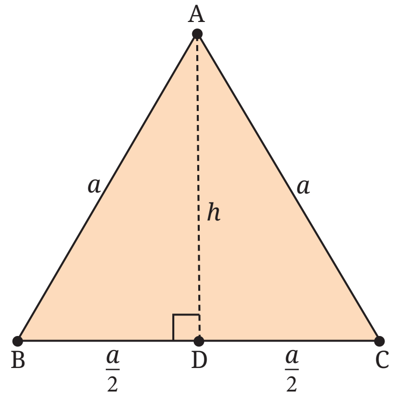
अब मुझे पूर्ण विश्वास है कि आपको भी यह सूत्र बहुत ही आश्चर्यजनक और विचित्र लगेगा। आइए, अब कुछ ज्ञात उदाहरणों की सहायता से इसकी जाँच करते हैं।

उदाहरण 3 — एक समबाहु त्रिभुज की भुजा a इकाई है।

© NCERT not to be republished

सभी तीनों भुजाओं की लंबाई a इकाई है तो इसका अर्द्ध-परिमाप $s = \frac{1}{2}(a+a+a) = \frac{3}{2}a$ इकाई है।

अब हीरोन के सूत्र का उपयोग करके त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{\frac{3}{2}a\left(\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{1}{2}a\right)} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ वर्ग इकाई होगा।



चित्र 6.23

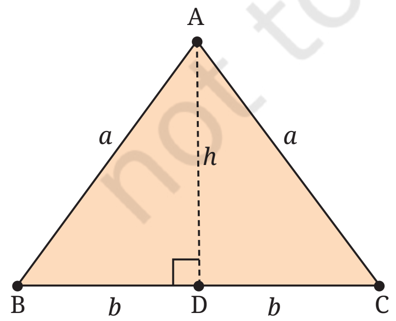
अब इसका $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई सूत्र द्वारा परीक्षण करते हैं। मान लीजिए, त्रिभुज की ऊँचाई h इकाई है तब बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

$$a^2 - h^2 = \frac{a^2}{4}, \quad \therefore h^2 = \frac{3a^2}{4}, \quad \therefore h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

इसलिए क्षेत्रफल $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ वर्ग इकाई एक समान सूत्र है।

ध्यान दीजिए— '$\therefore$' प्रतीक पर ध्यान दीजिए। यह प्रतीक प्राय: गणितज्ञों द्वारा उपयोग में लाया जाता है तथा इस प्रतीक ($\therefore$) का तात्पर्य 'इसलिए' है।

उदाहरण 4 — एक समद्विबाहु त्रिभुज की प्रत्येक समान भुजा a इकाई और आधार $2b$ इकाई है। इसका अर्द्ध-परिमाप s = $\frac{1}{2}(a+a+2b) = a+b$ इकाई है। हीरोन सूत्र के अनुसार, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{(a+b)(a+b-a)(a+b-a)(a+b-2b)} = b\sqrt{a^2-b^2}$ वर्ग इकाई है।



चित्र 6.24

अब इसका $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई सूत्र द्वारा परीक्षण करते हैं। मान लीजिए, त्रिभुज की ऊँचाई h इकाई है तब बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

$$a^2 - h^2 = b^2, \quad \therefore h^2 = a^2 - b^2, h = \sqrt{a^2 - b^2}$$

इसलिए त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{a^2 - b^2} \times 2b = b\sqrt{a^2 - b^2}$$

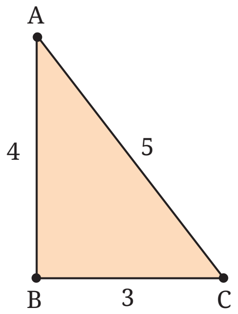
वर्ग इकाई पूर्व के समान है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 5 — एक त्रिभुज की भुजाएँ 3 इकाई, 4 इकाई और 5 इकाई हैं।

अर्द्ध-परिमाप $s = \frac{1}{2}(3+4+5) = 6$ इकाई है। हीरोन के सूत्र का उपयोग करके त्रिभुज का क्षेत्रफल है—

$= \sqrt{6\times(6-3)\times(6-4)\times(6-5)} = \sqrt{6\times3\times2} = 6$ वर्ग इकाई



चित्र 6.25

अब इसका $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई सूत्र द्वारा परीक्षण करते हैं। चित्र 6.25 देखिए कि $3^2 + 4^2 = 5^2$ है। अत: बौधायन-पाइथागोरस कर्ण प्रमेय के विलोम के अनुसार ΔABC, B पर समकोण है।

आधार = 3 इकाई, ऊँचाई = 4 इकाई

अत: पहले की भाँति क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई) $= \frac{1}{2}(3 \times 4) = 6$ वर्ग इकाई होगा।

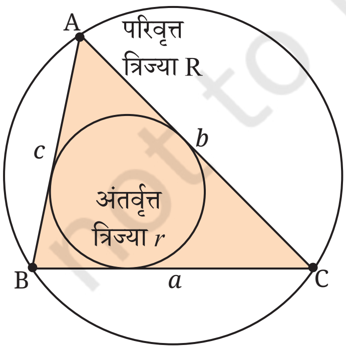
प्रत्येक स्थिति में हम एक समान सही परिणाम पाते हैं।

अब आप सोच रहे होंगे कि हीरोन का सूत्र कैसे सिद्ध होगा। इसके कई प्रमाण ज्ञात हुए हैं। उनमें से एक बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय और 'दो वर्गों के अंतर' का सूत्र $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ बारंबार उपयोग हुआ है। हम कक्षा 10 में भी इसमें से कुछ प्रमाणों का अध्ययन करेंगे।

त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए ऐसे अन्य दो और सूत्र भी हैं। दोनों का संबंध वृत्तों से है। आइए, चित्र 6.26 देखते हैं।

किसी भी त्रिभुज ABC के तीनों शीर्षों से होकर गुजरने वाला केवल एक ही वृत्त होता है, जिसे ΔABC का **परिवृत्त** कहते हैं।

इसी प्रकार, ΔABC में एक वृत्त ऐसा भी है जो त्रिभुज के ठीक मध्य में स्थित है और त्रिभुज की तीनों भुजाओं को भी स्पर्श करता है। इसे ΔABC का **अंतर्वृत्त** कहते हैं।



चित्र 6.26

माना कि ΔABC की भुजाएँ a, b और c हैं। परिवृत्त की त्रिज्या R है और अंतर्वृत्त की त्रिज्या r है तब क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित दो सूत्र प्राप्त होते हैं—

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{abc}{4R}$

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{r(a+b+c)}{2}$

© NCERT not to be republished

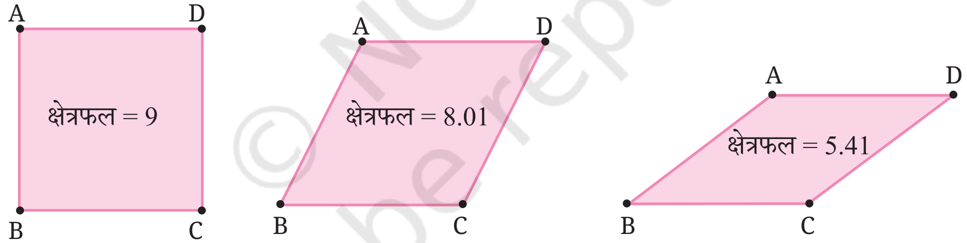
दोनों सूत्रों में एक आकर्षक समरूपता है। दूसरे सूत्र के प्रमाण के लिए एक ऐसे परिणाम की आवश्यकता है जिसका अध्ययन आप कक्षा 10 में करेंगे।

चक्रीय चतुर्भुज के क्षेत्रफल के लिए ब्रह्मगुप्त का सूत्र

हमने देखा कि त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लंबाई दी गई है तो उसका क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे। अब स्वाभाविक प्रश्न यह उठता है कि चतुर्भुज की चार भुजाओं की लंबाई दिए जाने पर उसका क्षेत्रफल कैसे निकालेंगे?

पूर्व में हमने पूछा था कि क्या हम समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं जब केवल भुजाओं की लंबाई ज्ञात हो? उत्तर है— नहीं। इसी प्रकार, क्या हम चार भुजा वाली आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते है जब हमें एक भुजा की लंबाई ज्ञात है। नीचे दी गई आकृतियाँ इस प्रश्न का उत्तर प्रदान करती हैं।

चित्र 6.27 में प्रश्न यह है कि किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसकी भुजाएँ 3, 3, 3, 3 (यह एक समचतुर्भज है) हैं। जैसा कि आप देख सकते हैं कि तीनों आकृतियों का क्षेत्रफल भिन्न है। (हमने इन आकृतियों को 'जियोज्रेबा' की सहायता से निर्मित किया है और इनका क्षेत्रफल 'एरिया टूल' की सहायता से ज्ञात किया है। कृपया इस अभ्यास को स्वयं करने का प्रयास कीजिए या चार छड़ों को उनके सिरों से जोड़कर आकृतियाँ बनाने का प्रयास कीजिए।)



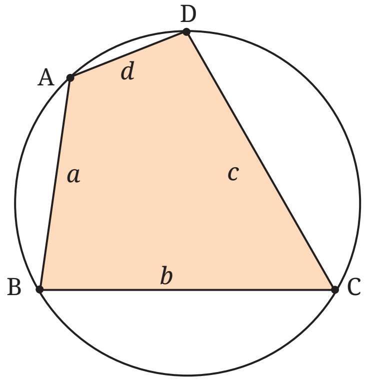
चित्र 6.27 — किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल केवल उसकी भुजाओं की लंबाई ज्ञात होने से नहीं निकला जा सकता है।

अत: केवल चार भुजाओं की लंबाई से चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात नहीं कर सकते। इसके लिए हमें और अधिक जानकारी की आवश्यकता होती है, जैसे — चतुर्भुज के त्रिभुज का एक कोण, एक विकर्ण की लंबाई अथवा वह कोण जहाँ विकर्णों द्वारा एक-दूसरे को प्रतिच्छेदित किया जाता है।

अथवा आकृति का एक प्रमुख ज्यामितीय गुण भी हो सकता है।

ऐसा ही एक गुणधर्म यह है कि जब चतुर्भुज, चक्रीय चतुर्भुज होता है। 628 सामान्य संवत में भारतीय गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त (598–668 सामान्य संवत) ने **चक्रीय चतुर्भुज** के लिए एक अद्भुत सूत्र का अन्वेषण किया।

© NCERT not to be republished



चित्र 6.28 — चक्रीय चतुर्भुज

सूत्रानुसार यदि एक चक्रीय चतुर्भुज की चारों भुजाओं की लंबाई a, b, c, d और अर्द्ध-परिमाप

$s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ है तो चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ होगा।

यह एक अद्भुत और आकर्षक सूत्र है।
क्या यह सूत्र हमें त्रिभुज के क्षेत्रफल के लिए हीरोन सूत्र का स्मरण नहीं करवाता है?

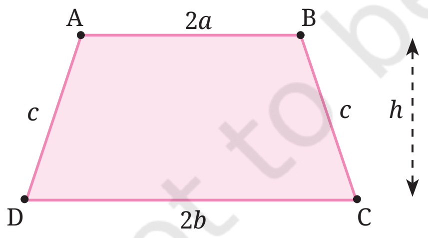
हम यह सत्यापित कर सकते हैं कि यह सूत्र विभिन्न विशेष विषयों में सही ढंग से कार्य करता है।

उदाहरण 6 — आयत के विषय में ब्रह्मगुप्त के सूत्र को सत्यापित कीजिए। सभी आयत चक्रीय होते हैं, अत: ब्रह्मगुप्त का सूत्र लागू होना चाहिए।

मान लीजिए कि आयत की भुजाएँ a और b हैं तब सूत्र $s = \frac{1}{2}(2a+2b) = a+b$ होगा, अत: सूत्रानुसार —

क्षेत्रफल $= \sqrt{(a+b-a)(a+b-b)(a+b-a)(a+b-b)} = \sqrt{ab \cdot ab} = ab,$ जो कि सत्य है। अन्य विशेष स्थितियों में इस सूत्र का उपयोग करके देखिए।

उदाहरण 7 — समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज के विषय में ब्रह्मगुप्त के सूत्र का सत्यापन कीजिए।



चित्र 6.29 समद्विबाहु समलंब

सभी समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज चक्रीय होते हैं, अत: ब्रह्मगुप्त सूत्र लागू होना चाहिए। आकृति का परिमाप $2a + 2b + 2c$ है तो $s = a + b + c$ है। अत: सूत्र के अनुसार क्षेत्रफल

$\sqrt{(s-2a)(s-2b)(s-c)(s-c)}$ होना चाहिए।

चूँकि $s-2a = c+b-a,$

$s - 2b = c + a - 2b,$ $s - c = a + b$ है,

उपरोक्त सूत्र सरल होकर

$(a+b)\sqrt{(c+b-a)(c+a-b)} = (a+b)\sqrt{c^2-(b-a)^2}$ होता है।

यदि हम आधार CD पर B से एक लंब बनाने की कल्पना करें तो उसकी लंबाई (बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय को स्मरण करते हुए) $\sqrt{c^2-(b-a)^2}$ होती है। अत: क्षेत्रफल $(a+b)h$ होता है। ठीक यही सूत्र हमें तब भी प्राप्त होता है जब हम स्मरण करते हैं कि समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल समांतर भुजाओं के योग का आधा और उनके मध्य की दूरी के गुणनफल के समान होता है।

गणित में विशेष स्थितियाँ और व्यापकीकरण

'विशेष स्थिति' की अवधारणा प्राय: उच्च गणित में देखने को मिलती है। एक विशेष स्थिति तब उत्पन्न होती है जब हम कोई अतिरिक्त शर्त को सम्मिलित करने पर व्यापक परिणाम प्राप्त होता है। हम यहाँ कुछ उदाहरण प्रस्तुत कर रहे हैं।

व्यापक परिणाम को विशेष स्थिति का **व्यापकीकरण** भी कहा जाता है। व्यापकीकरण की प्रक्रिया गणित का एक अत्यंत महत्त्वपूर्ण भाग होती है।

उदाहरण — वर्ग, आयत का एक विशेष रूप (गुण) होता है।

अत: वर्ग के क्षेत्रफल का सूत्र ($A = a^2$), आयत के क्षेत्रफल के सूत्र ($A = ab$) की विशेष स्थिति होती है, यदि $b = a$ है।

इसी प्रकार, वर्ग के परिमाप का सूत्र, आयत के परिमाप के सूत्र का एक विशेष गुण अर्थात स्थिति है।

उदाहरण — एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज की भी विशेष स्थिति है।

अत: सभी समकोण त्रिभुजों से संबधित किसी भी प्रमेय से हम एक विशेष स्थिति निकाल सकते हैं, जो समद्विबाहु समकोण त्रिभुज पर लागू होती है।

एक समकोण त्रिभुज ABC लीजिए, जिसमें $\angle C = 90°$ है। अब हमारे पास $a^2 + b^2 = c^2$ होगा (यह बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय है)। आइए, इसका एक विशेष उदाहरण लें, जिसमें $a = b$ हो (यह त्रिभुज के समद्विबाहु होने के अनुरूप है)। इस प्रकार, हमें $a^2 + b^2 = c^2$ अर्थात $c^2 = 2a^2$, फलत: $c = a\sqrt{2}$ प्राप्त होगा। व्यापक प्रमेय ($a^2 + b^2 = c^2$) एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज ($a = b$ के साथ) के लिए इस विशेष स्थिति ($c = a\sqrt{2}$) में परिवर्तित हो जाती है।

यहाँ पर एक अन्य उदाहरण दिया गया है। बीजगणित से निम्नलिखित सर्वसमिकाओं की तुलना कीजिए—

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

क्या आपने ध्यान दिया कि पहली सर्वसमिका, दूसरी सर्वसमिका की विशेष स्थिति है (दूसरी सर्वसमिका में $c = 0$ रखें) और दूसरी सर्वसमिका, पहली सर्वसमिका का एक व्यापकीकरण है।

आगामी वर्षों में आपको विशेष स्थितियों और व्यापकीकरण के कई अन्य उदाहरण देखने को मिलेंगे।

© NCERT not to be republished

ब्रह्मगुप्त का सूत्र हीरोन के सूत्र का व्यापकीकरण

हीरोन और ब्रह्मगुप्त के सूत्र में दिखने वाली समानता मात्र कोई संयोग नहीं है। कैसे? ब्रह्मगुप्त का सूत्र, हीरोन के सूत्र का व्यापकीकरण है अर्थात हम हीरोन के सूत्र को ब्रह्मगुप्त के सूत्र का एक विशेष रूप मान सकते हैं।

भुजा a, b और c वाले त्रिभुज को चतुर्भुज ABCD की विशेष स्थिति माना जा सकता है। इसमें चौथी भुजा की लंबाई शून्य ($d = 0$) है। अत: AB = a, BC = b, CD = c है। इसका अर्थ है कि शीर्ष A और D सम्पाती हैं।

(यदि शीर्ष ग्रह का प्रतिनिधित्व करते हैं तो यह दो ग्रहों के आपस में टकराने और एक विशाल ग्रह के निर्माण की स्थिति होगी। वास्तव में सौरमंडल के प्रारंभिक इतिहास में ऐसा घटित हुआ था।)

चूँकि कोई भी त्रिभुज चक्रीय होता है (यदि कोई भी तीन बिंदु एक सीधी रेखा में नहीं हैं तो हम उनके द्वारा एक वृत्त की रचना कर सकते हैं), यह चतुर्भुज भी चक्रीय है। अत: ब्रह्मगुप्त का सूत्र इस चतुर्भुज पर भी लागू होना चाहिए।

आइए, देखते हैं कि इससे क्या परिणाम निकलता है। सर्वप्रथम हम चतुर्भुज पर एक अर्द्ध-परिमाप ज्ञात करते हैं (ध्यान रहे कि $d = 0$ है) —

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c+0) = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

हम देखते हैं कि s दिए गए त्रिभुज के अर्द्ध-परिमाप के समान है। अब ब्रह्मगुप्त सूत्र के अनुसार,

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ चूँकि } d = 0 \text{ है।}$$

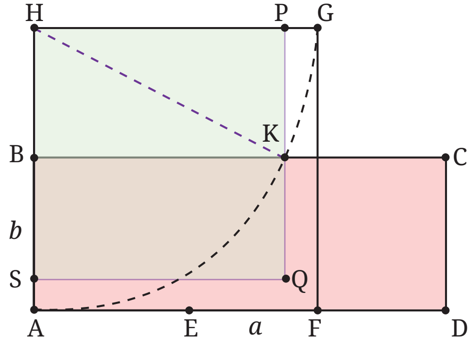
यही है हीरोन सूत्र!

इस प्रकार, हीरोन के सूत्र को ब्रह्मगुप्त के सूत्र की एक विशेष स्थिति माना जा सकता है।

6.9 आयत को वर्ग बनाना

प्राचीन काल में 'किसी आकृति को वर्ग' करने का अर्थ था, उस 'आकृति के क्षेत्रफल में समान क्षेत्रफल वाली एक वर्गाकार आकृति बनाना'। आकृति आयत, त्रिभुज या वृत्त हो सकती थी। हम यहाँ पर देखते हैं कि कैसे प्रारंभिक भारतीय गणितज्ञ बौधायन ने एक आयत को वर्गाकार बनाया। उनके *शुल्बसूत्र* (800 सामान्य संवतपूर्व) से प्राप्त यह रचना दर्शाती है कि a इकाई और b इकाई भुजाओं वाले आयत को वर्गाकार कैसे बनाया जाए जबकि ($a > b$) है। इसका अर्थ है कि हमें एक वर्गाकार आकृति बनानी होगी, जिसका क्षेत्रफल ab वर्ग इकाई होगा। यहाँ बौधायन की रचना का एक सरलीकृत रूप दिया गया है (चित्र 6.30) —

© NCERT not to be republished



चित्र 6.30 — आयत ABCD जिसकी भुजाएँ $AD = a$, $AB = b$ हैं

- दिया गया है कि एक आयत ABCD जिसमें AD $= a$, AB $= b$ जहाँ पर $a > b$ है।
- AD पर बिंदु E इस प्रकार निर्धारित कीजिए कि AE = AB हो।
- ED के मध्यबिंदु AF का पता लगाइए।
- वर्ग AFGH खींचिए, जिसकी भुजा AF हो और शीर्ष H, AB को आगे बढ़ाने पर प्राप्त हो।
- H को केंद्र मानकर चाप AG खींचिए। मान लीजिए कि चाप AG भुजा BC को K पर काटती है।
- K से होकर AH के समांतर एक रेखा खींचिए। मान लीजिए कि यह रेखा GH को P पर काटती हो।
- HP को भुजा मानकर वर्ग HPQS बनाइए तब वर्ग HPQS का क्षेत्रफल आयत ABCD के क्षेत्रफल के समान होगा।

यह समझने का प्रयत्न कीजिए कि यह विधि कैसे काम करती है। इससे आपको ज्ञात होगा कि यह सूत्र $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$ है।

*यह विधि लाभदायक क्यों है?

आइए, चित्र 6.30 का संदर्भ लेते हैं। AE $= b$ से हमें $AF = \frac{AE + AD}{2} = \frac{a+b}{2}$ प्राप्त होता है।

अत: $HG = \frac{a+b}{2} = HK$, क्योंकि HK वृत्त की त्रिज्या है।

दूसरा, $BH = AH - AB = AF - AB = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$ है।

अब हम समकोण त्रिभुज HKP पर विचार करते हैं। बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करके हमें यह प्राप्त होता है कि —

$$HP^2 = HK^2 - BH^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} - \frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = ab \text{ है।}$$

इसलिए वर्ग HPQS और आयत ABCD दोनों के क्षेत्रफल समान हैं।

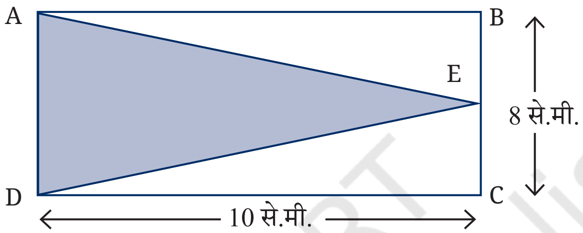
© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

किसी दिए गए त्रिभुज से वर्ग बनाने के लिए आप किस प्रक्रिया का उपयोग करेंगे? यहाँ पर आपको एक ऐसा वर्ग बनाना है जिसका क्षेत्रफल किसी दिए गए त्रिभुज के क्षेत्रफल के समान हो। ध्यानपूर्वक विचार कीजिए कि आप इसे कैसे करेंगे।

प्रश्नावली 6.2

1. आकृति 6.31 में त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए—

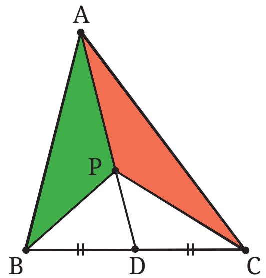


चित्र 6.31

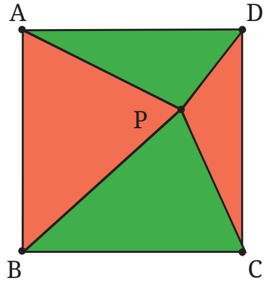
2. एक समलंब चतुर्भुज की समांतर भुजाएँ 40 सेंटीमीटर और 20 सेंटीमीटर हैं। यदि इसकी दोनों असमांतर भुजाएँ समान हों और प्रत्येक 26 सेंटीमीटर हो तो समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी भुजाओं की लंबाई 8 सेंटीमीटर और 11 सेंटीमीटर है तथा उसका परिमाप 32 सेंटीमीटर है।
4. एक त्रिभुजाकार भूखंड की भुजाओं का अनुपात 3:5:7 है और इसका परिमाप 300 मीटर है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. एक समचतुर्भुज के एक विकर्ण की लंबाई दूसरे विकर्ण की लंबाई से दोगुनी है। यदि समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 128 वर्ग सेंटीमीटर है तो इसके छोटे विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए।
6. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। P और Q भुजा AB पर स्थित कोई दो बिंदु हैं तो ΔPCD और ΔQCD के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. समांतर चतुर्भुज PQRS के विकर्ण PR पर स्थित कोई O बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि PSO और PQO त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान हैं।
8. यदि एक चतुर्भुज की भुजाओं के मध्यबिंदु को क्रम से जोड़ा जाए तो सिद्ध कीजिए कि इस प्रकार बने समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल दिए गए चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होगा। (आप सोच रहे होंगे कि क्या इस प्रकार बना चतुर्भुज हमेशा समांतर चतुर्भुज ही होता है। यदि हाँ, तो क्यों? इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर चतुर्भुज वाले अध्याय में मिलेंगे।)

© NCERT not to be republished

9. ΔABC में BC का मध्यबिंदु D है (चित्र 6.32)। माध्यिका AD खींची गई है। बिंदु P बिंदु रेखाखंड AD पर स्थित कोई बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि ΔABP का क्षेत्रफल ΔACP के क्षेत्रफल के समान है।

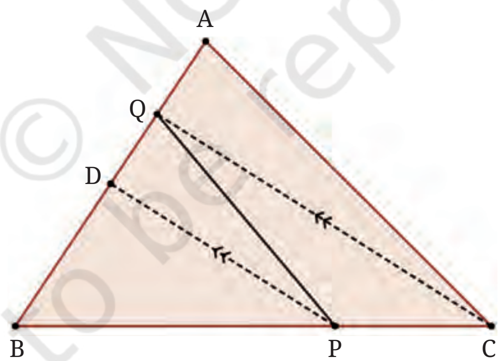


चित्र 6.32



चित्र 6.33

10. एक वर्ग ABCD दिया गया है, माना कि P इसके अंदर एक बिंदु है। PA, PB, PC और PD को मिलाइए (चित्र 6.33)। लाल रंग के क्षेत्र (ΔPAB और ΔPCD) तथा हरे रंग के क्षेत्र (ΔPBC और ΔPDA) के क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?
11. ΔABC में D भुजा AB का मध्यबिंदु है। P भुजा BC पर स्थित कोई बिंदु है और Q भुजा AB पर स्थित एक बिंदु है, जहाँ $CQ \parallel PD$ है। PQ को मिलाया गया है (चित्र 6.34)। सिद्ध कीजिए कि क्षेत्रफल $(\Delta BPQ) = \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (ΔABC) है।



चित्र 6.34

6.10 वृत्त का क्षेत्रफल

वृत्त एक अत्यंत सरल आकृति है। यदि हमारे घर एक रस्सी है और उसे बाँधने के एक खूँटी दी गई है तो इसे बनाना सरल है। मनुष्य सहस्त्रों वर्षों से अपनी बस्तियों, इमारतों और औजारों में वृत्ताकार आकृति का उपयोग करते आ रहे हैं।

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

मनुष्य वृत्ताकार आकृतियों का इतना अधिक उपयोग क्यों करते थे? क्या यह केवल व्यावहारिक कारणों से था अथवा इसके पीछे अन्य कारण भी हो सकते थे? मनुष्य ने वृत्ताकार आकृतियों के लिए किस प्रकार की वस्तुएँ अन्वेषित की हैं?

आरंभिक काल में मनुष्यों के समक्ष वृत्त द्वारा घेरे गए क्षेत्रफल A को जानने की चुनौती थी। उदाहरण के लिए, उन्हें यह पता लगाने की आवश्यकता रही होगी कि एक बेलनाकार मीनार (जिसके अनुप्रस्थ काट वृत्ताकार हो) में कितना अनाज रखा जा सकता है अथवा एक वृत्ताकार बगीचा अथवा वृत्ताकार भवन कितना क्षेत्रफल घेरता है। उन्हें इस प्रकार के आँकड़ों की आवश्यकता अपने शहरों को बनाने की योजना बनाने, कर प्रबंधन आदि के लिए होती थी।

प्रारंभिक समाजों में यह बात भली-भाँति समझ में आती थी कि क्षेत्रफल A परिधि C के **वर्ग** के समानुपाती होता है। आइए, देखते हैं कि ऐसा क्यों होता है।

- मान लीजिए कि हमें एक वर्ग दिया गया है। इसकी भुजा a है और इसका परिमाप $P = 4a$ है तथा क्षेत्रफल $A = a^2$ है, अत: अनुपात $P^2 : A = (4a^2) : a^2 = 16a^2 : a^2 = 16 : 1$ है। इसलिए सभी वर्गों के लिए अनुपात $P^2 : A = 16 : 1$ है। यह अनुपात वर्ग के आकार पर निर्भर नहीं करता है— यह सभी वर्गों के लिए समान है।
- एक समबाहु त्रिभुज पर चर्चा कीजिए, जिसकी भुजा a है। इसका परिमाप $P = 3a$ और इसका क्षेत्रफल $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ है। अत: $P^2 : A = (3a)^2 : \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 9a^2 : \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 36 : \sqrt{3}$ होगा।

अत: सभी समबाहु त्रिभुजों के लिए $P^2 : A$ का अनुपात $36 : \sqrt{3}$ है। यह अनुपात समबाहु त्रिभुज के आकार पर निर्भर नहीं करता, अपितु यह सभी समबाहु त्रिभुजों के लिए समान है।

- इसी प्रकार, जैसे हम विभिन्न आकृतियों के लिए पैमाना बदलते हैं, अनुपात $P^2 : A$ स्थिर रहता है। अनुपात का मान केवल आकृति पर निर्भर करता है, उसके पैमाने पर नहीं करता है।

इस तर्क के आधार पर हम कह सकते है कि वृत्त के लिए भी C = परिधि और A = क्षेत्रफल है तो $C^2 : A$ का अनुपात कोई अचर होना चाहिए। परंतु क्या यह अचर अथवा स्थिरांक है?

1500 सामान्य संवत पूर्व से भी बहुत पहले ही बेबीलोनियों ने वास्तविक माप के माध्यम से यह ज्ञात कर लिया था कि C^2 स्थिरांक 12 के लगभग समान है अर्थात $C^2 : A \approx 12 : 1$ है। अत: वृत्त के क्षेत्रफल का सूत्र $A \approx \frac{C^2}{12}$ था।

लगभग 1500 सामान्य संवत पूर्व प्राचीन मिस्रवासियों ने एक और ऐसा सूत्र तैयार किया, जो उपर्युक्त वर्णित सूत्र से मेल खाता है परंतु अधिक उपयुक्त क्षेत्रफल $A \approx \left(\frac{8d}{9}\right)^2$ है, जहाँ पर d वृत्त का व्यास है।

चूँकि $d = 2r$ है, इसे इस प्रकार भी लिखा जा सकता है—

$A \approx \left(\frac{64}{81}\right)4r^2$ अर्थात क्षेत्रफल $A \approx \left(\frac{256}{81}\right)r^2$

रोचक तथ्य यह है कि यही सूत्र बौधायन *शुल्बसूत्र* (800 सामान्य संवत पूर्व) में एक वर्ग के निर्माण की ज्यामितीय विधि के माध्यम से प्रकट होता है, जिसका क्षेत्रफल लगभग एक वृत्त के समान है।

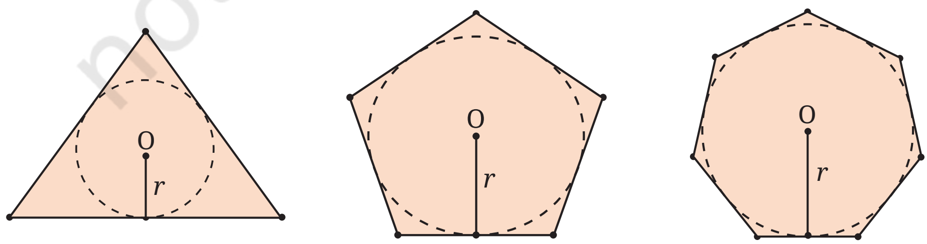
वर्तमान में उपयोग में होने वाला परिचित सूत्र

प्राचीन यूनानी यह भी जानते थे कि $\frac{A}{r^2}$ एक अचर अर्थात स्थिरांक है किंतु वे यह नहीं जानते थे कि अचर क्या होता है। दो अलग-अलग सभ्यताओं ने इस अचर का मान लगभग $\frac{256}{81}$ माना।

अंतत: 250 सामान्य संवत पूर्व में आर्किमिडीज ने दर्शाया कि स्थिरांक π है। (अर्थात वही अचर जो वृत्त के परिमाप के सूत्र में आता है), अत: $A = \pi r^2$ है। उन्होंने सूत्र को इस प्रकार व्यक्त किया कि "वृत्त का क्षेत्रफल एक समकोण त्रिभुज के क्षेत्रफल के समान होता है, जिसकी भुजाएँ वृत्त की त्रिज्या और परिधि के समान होती हैं।"

वृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ परिधि $\times$ त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$

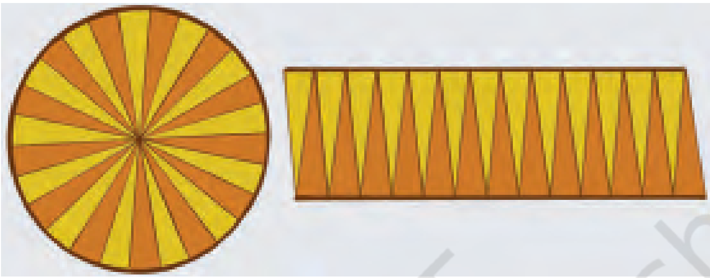
आर्किमिडीज द्वारा यह प्रमाण बहुत ही बुद्धिमत्तापूर्ण ढंग से दिया गया है। यह सभी नियमित बहुभुजों के एक साझा गुण पर आधारित है— एक नियमित बहुभुज द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल बहुभुज के भीतर ठीक से बैठ जाने वाले वृत्त की परिधि के आधे और त्रिज्या के गुणनफल के समान होता है (चित्र 6.36)। (इस सूत्र का प्रमाण त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र के प्रमाण का विस्तार है, जिसे उसके अंतर्वृत्त की त्रिज्या के संदर्भ में व्यक्त किया जाता है।)



चित्र 6.36 — नियमित बहुभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ *बहुभुज का परिमाप* $\times$ *त्रिज्या*

आर्किमिडीज ने एक 'विचार प्रयोग' किया, उन्होंने स्वयं से पूछा कि यदि नियमित बहुभुज की भुजाओं की संख्या बढ़ती जाती है तो क्या होता है? उन्होंने विभिन्न विवरणों पर कार्य किया और इस परिणाम पर पहुँचे कि $A = \pi r^2$ है।

यह संभवत: सबसे दृश्यमान और सरलता से समझ में आने वाला विवरण है कि क्यों त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 होता है। वृत्त के क्षेत्रफल का यह सुंदर दृश्यांकन सर्वप्रथम 'नीलकंठ सोमयाजी' (लगभग 1500) द्वारा *आर्यभटीय* पर की गई अपनी टिप्पणी में किया गया है।



(क) (ख)

चित्र 6.37 — टुकड़ों को पुनर्व्यवस्थित करके एक समांतर चतुर्भुज जैसी रचना निर्मित की जा सकती है

© NCERT not to be republished

जैसे-जैसे टुकड़े छोटे होते जाते हैं (चित्र 6.37(ख) में), चाप एक रेखा के और पास होती जाती हैं। इस प्रकार, आगे चलकर यह आकृति एक समांतर चतुर्भुज के आकार की बन जाती है, जिसमें—

आधार = परिधि का आधा (क्यों?) = πr,

ऊँचाई = त्रिज्या r है।

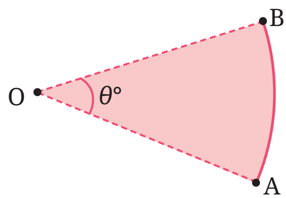
इससे यह तर्क देने में सहायता मिलती है कि वृत्त का क्षेत्रफल, समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के समान होता है।

वृत्त का क्षेत्रफल = समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई = πr^2

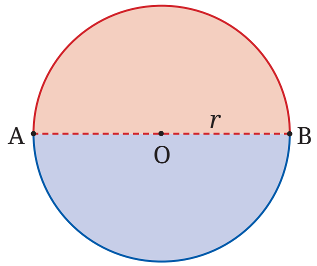
6.10.1 वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

वृत्त का त्रिज्यखंड वह क्षेत्र होता है जो एक चाप और उसके शीर्षबिंदुओं को जोड़ने वाली दोनों त्रिज्याओं से मिलकर बनता है।

वृत्त के त्रिज्यखंड के भीतर का क्षेत्रफल उसी प्रकार ज्ञात किया जा सकता है जिस प्रकार हमने वृत्ताकार चाप की लंबाई ज्ञात की थी। चित्र 6.39 और 6.40 का अवलोकन कीजिए।



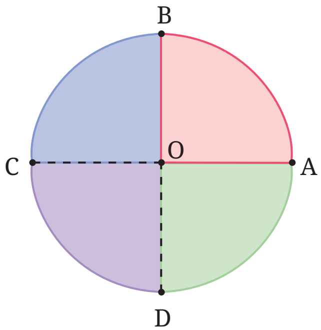
चित्र 6.38 — एक वृत्त का त्रिज्यखंड



चित्र 6.39 — अर्द्धवृत्ताकार चक्रिका (डिस्क) का क्षेत्रफल

समरूपता से हम देखते हैं कि अर्द्धवृत्ताकार चक्रिका (डिस्क) का क्षेत्रफल $\left(\frac{180}{360}\right)^{\text{th}} = \frac{1}{2}$ वृत्त का क्षेत्रफल अर्थात $\frac{1}{2}\pi r^2$ है।

इस परिणाम को समझने के लिए हम वृत्त की परावर्तन समरूपता का उपयोग कर सकते हैं।



चित्र 6.40 — चतुर्थांश वृत्ताकार चक्रिका (डिस्क) का क्षेत्रफल

समरूपता से हम देखते हैं कि एक-चौथाई अर्थात चतुर्थांश वृत्ताकार चक्रिका (डिस्क) का क्षेत्रफल $\left(\frac{90}{360}\right)^{\text{th}} = \frac{1}{4}$ वृत्त का क्षेत्रफल अर्थात $\frac{1}{4}\pi r^2$ है।

हम परिणाम को समझने के लिए वृत्त की चौथाई समरूपता का भी उपयोग कर सकते हैं।

उपरोक्त का विश्लेषण करने पर हमें व्यापक त्रिज्यखंड के लिए त्वरित वांछित सूत्र प्राप्त हो जाता है।

चक्रिका के त्रिज्यखंड के क्षेत्रफल का सूत्र उसके द्वारा वृत्त के केंद्र पर बनाए गए कोण के संदर्भ में —

यदि चाप AB है और यह वृत्त के केंद्र O पर θ° का कोण बनाती है तो त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल होगा —

$$\pi r^2 \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$$

ध्यान दीजिए कि हमने इन सूत्रों को प्राप्त करने के लिए वृत्त की घूर्णन सममिति का उपयोग कैसे किया है।

त्रिज्यखंड से संबंधित, वृत्ताकार क्षेत्र का एक भाग होता है, जिसे **खंड** कहते हैं। वृत्त का खंड वह क्षेत्र होता है जो एक चाप और उसके शीर्षबिंदुओं को मिलाने वाली जीवा से मिलकर बनता है।

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 6.3

किसी अन्य निर्देश की अनुपस्थिति में, सन्निकटन $\pi = \frac{22}{7}$ का उपयोग कीजिए।

1. यदि त्रिज्यखंड का कोण 60° है तो 7 सेंटीमीटर त्रिज्या वाले वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. उस वृत्त के एक चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 44 सेंटीमीटर है।
3. एक घड़ी की मिनट की सूई की लंबाई 7 सेंटीमीटर है। 10 मिनट में सूई द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।
4. 10 सेंटीमीटर त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा केंद्र पर 90° का कोण बनाती है। संगत क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए— (i) लघु त्रिज्यखंड (जो मध्यबिंदु पर 90° का कोण बनाता है) (ii) दीर्घ त्रिज्यखंड (जो मध्यबिंदु पर 270° का कोण बनाता है)। ($\pi \approx 3.14$ का उपयोग कीजिए।)
5. 15 सेंटीमीटर त्रिज्या वाले एक वृत्त की एक जीवा वृत्त के केंद्र पर 60° का कोण बनाती है। वृत्त के संगत लघु एवं दीर्घ खंडों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. एक कार में दो वाइपर लगे हैं जो एक-दूसरे को आपस में आच्छादित नहीं करते हैं। प्रत्येक वाइपर के ब्लेड की लंबाई 28 सेंटीमीटर है और यह 120° के कोण पर घूमता है। ब्लेड के प्रत्येक चक्र में साफ किए गए कुल क्षेत्रफल को ज्ञात कीजिए।

*7. त्रिज्या r वाले एक वृत्त की एक जीवा वृत्त के केंद्र पर 60° का कोण बनाती है। दर्शाइए कि वृत्त के संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल $r^2\left(\frac{\neq}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ के समान है।

*8. एक समबाहु त्रिभुज r त्रिज्या वाले एक वृत्त में अंतर्निहित है। दर्शाइए कि त्रिभुज के क्षेत्रफल और वृत्त के क्षेत्रफल का अनुपात $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0.413$ के समान है।

*9. एक वर्ग r त्रिज्या वाले एक वृत्त में अंतर्निहित है। दर्शाइए कि वर्ग के क्षेत्रफल और वृत्त के क्षेत्रफल का अनुपात $\frac{2}{\pi} \approx 0.637$ के समान है।

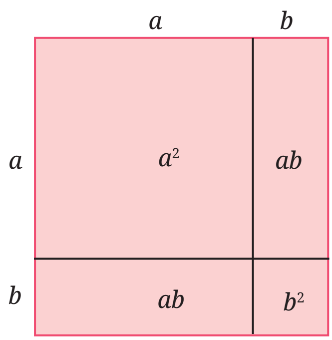
*10. एक r त्रिज्या वाले वृत्त में एक षट्भुज अंतर्निहित है। दर्शाइए कि षट्भुज के क्षेत्रफल और वृत्त के क्षेत्रफल का अनुपात $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = 0.827$ के समान है। क्या आप समझ सकते हैं कि इसका उत्तर, प्रश्न 8 के उत्तर के ठीक दोगुना क्यों है?

© NCERT not to be republished

अंतिम प्रश्नावली

नीचे दिए गए प्रश्नों में किसी अन्य निर्देश की अनुपस्थिति में, π का सन्निकट मान $\frac{22}{7}$ उपयोग कीजिए।

1. बीजगणित में सर्वसमिकाओं को कभी-कभी क्षेत्रफल के संबंधों के रूप में दर्शाया जा सकता है। उदाहरण के लिए—



चित्र 6.41 — एक सर्वसमिका के क्षेत्रफल का प्रतिदर्श

प्रदर्शित चित्र सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ के अनुरूप है। क्या आप बता सकते हैं, कैसे?

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ और $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ सर्वसमिकाओं के अनुरूप आकृतियाँ बनाइए।

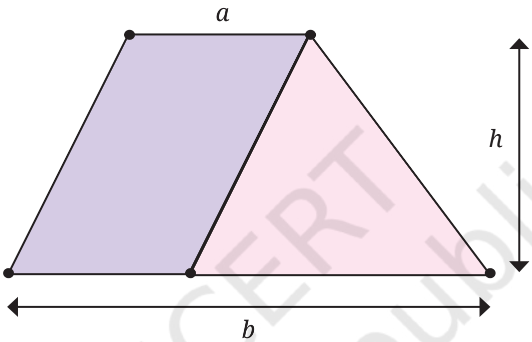
2. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 40 सेंटीमीटर है। इसकी समान भुजाएँ 15 सेंटीमीटर लंबी हैं। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक समद्विबाहु त्रिभुज का आधार 10 सेंटीमीटर है और इसका क्षेत्रफल 60 वर्ग सेंटीमीटर है। समान भुजाओं की लंबाई क्या होगी?
4. एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल 54 वर्ग सेंटीमीटर है। इसकी एक भुजा की लंबाई 12 सेंटीमीटर है। इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।
5. एक त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात 2:3:4 है और इसका परिमाप 45 सेंटीमीटर है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. एक त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई 7 सेंटीमीटर, 24 सेंटीमीटर और 25 सेंटीमीटर है। त्रिभुज का क्षेत्रफल दो भिन्न-भिन्न विधियों से ज्ञात कीजिए।
7. यदि किसी साइकिल के पहिए का व्यास 60 सेंटीमीटर है तो पहिए के 100 बार घूर्णन के पश्चात साइकिल चालक कितनी दूरी तय करेगा?
8. उस वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 66 सेंटीमीटर है।

© NCERT not to be republished

9. एक कार के पहिए की बाहरी त्रिज्या 28 सेंटीमीटर है। पहिए के एक पूर्ण घूर्णन के पश्चात कार कितनी दूरी तय करती है और एक किलोमीटर की यात्रा के दौरान पहिया कितनी बार घूमता है, इसकी गणना कीजिए।

*10. दो आयतों का क्षेत्रफल और परिमाप समान है। क्या इसका अर्थ यह है कि वे दोनों एक-दूसरे के सर्वांगसम हैं।

11. आप जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल आधार × ऊँचाई होता है। इस सूत्र और आकृति का उपयोग करते हुए दर्शाइए कि समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल समांतर भुजाओं के योग का आधा और ऊँचाई का गुणनफल, अर्थात $\frac{1}{2}(a + b)h$ होता है।



चित्र 6.42 — समलंब चतुर्भुज — भुजाएँ a और b, ऊँचाई h

12. एक समलंब चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में विभाजित करके दर्शाइए कि इसका क्षेत्रफल समांतर भुजाओं के योग का आधा और ऊँचाई का गुणनफल होता है (जैसा कि सूत्र में ऊपर दिया गया है)।

13. दर्शाइए कि समलंब चतुर्भुज की दो समान प्रतियों का उपयोग करके समांतर चतुर्भुज कैसे निर्मित कर सकते हैं। इससे हमें समलंब चतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र कैसे प्राप्त होगा?

14. दर्शाइए कि पतंग का क्षेत्रफल उसके विकर्णों के गुणनफल का आधा होता है। इन दोनों तरह से दर्शाइए— (i) बीजगणित का उपयोग करके (ii) ज्यामिति का उपयोग करके

15. सर्वांगसम आकृतियों को आपस में जोड़ने से संबंधित तीन प्रश्न दिए गए हैं—

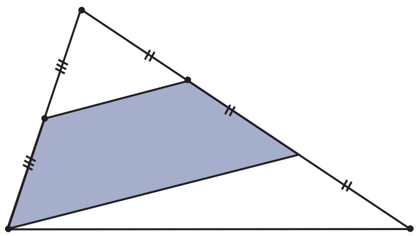
(i) आयत ABCD की भुजाएँ a और b हैं और आयत PQRS की भुजाएँ $2a$ और $2b$ हैं। दर्शाइए कि PQRS का क्षेत्रफल ABCD के क्षेत्रफल का चार गुना है। क्या इसका अर्थ यह है कि आयत ABCD की चार प्रतिआकृतियाँ आयत PQRS में समाहित हो सकती हैं? परीक्षण करके देखिए!

© NCERT not to be republished

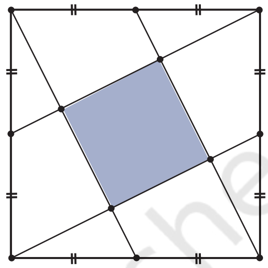
(ii) ΔABC की भुजाएँ a, b, c हैं और ΔPQR की भुजाएँ $2a$, $2b$, $2c$ हैं। दर्शाइए कि ΔPQR का क्षेत्रफल ΔABC के क्षेत्रफल का चार गुना है। क्या इसका यह अर्थ है कि ΔPQR में ΔABC की 4 प्रतिआकृतियाँ समाहित हो सकती हैं? परीक्षण करके देखिए!

(iii) ΔABC की भुजाएँ a, b, c हैं और ΔPQR की भुजाएँ $3a$, $3b$, $3c$ हैं। दर्शाइए कि ΔPQR का क्षेत्रफल ΔABC के क्षेत्रफल का नौ गुना है। क्या इसका यह अर्थ है कि ΔPQR में ΔABC की नौ प्रतिआकृतियाँ समाहित हो सकती हैं? परीक्षण करके देखिए!

*16.

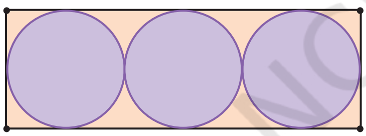


चित्र 6.43 — त्रिभुज का कितना भाग छायांकित है?

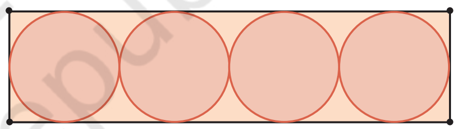


चित्र 6.44 — वर्ग का कितना भाग छायांकित है?

17.



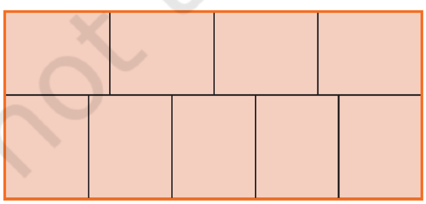
चित्र 6.45 — आयत का कितना भाग वृत्तों द्वारा आच्छादित है?



चित्र 6.46 — आयत का कितना भाग वृत्तों द्वारा आच्छादित है?

18. उपरोक्त दी गई सूचनाओं का उपयोग करते हुए दर्शाई गई विधि से आप वृत्तों द्वारा घेरे गए क्षेत्रफल के विषय में अनुमान लगाइए। आप अपने अनुमान का विशिष्ट स्थितियों के लिए परीक्षण कीजिए — 10 वृत्त, 20 वृत्त, 50 वृत्त। आप अपने अनुमान को सिद्ध कीजिए।

*19.

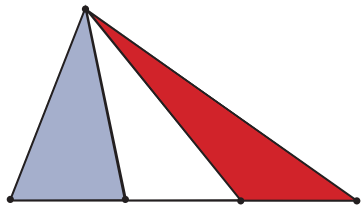


चित्र 6.47 — नौ एक समान आयत एक साथ रखे हुए हैं

चित्र में नौ एक समान आयतों को जोड़कर एक बड़ा आयत निर्मित किया गया है, जिसका क्षेत्रफल 72 वर्ग सेंटीमीटर है। प्रत्येक छोटे आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

*20.

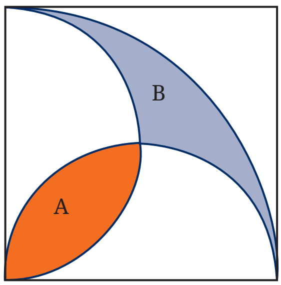


चित्र 6.48 — एक शीर्ष से विपरीत भुजा के विभाजन बिंदुओं तक जाने वाली रेखाएँ

दर्शाइए कि छायांकित नीले त्रिभुज और छायांकित लाल त्रिभुज का क्षेत्रफल समान है।

नीले त्रिभुज को कुछ टुकड़ों (भागों) में काटने और उन भागों को इस प्रकार से व्यवस्थित करने की विधि ढूँढ़िए, जिससे लाल त्रिभुज आच्छादित हो जाए।

*21.

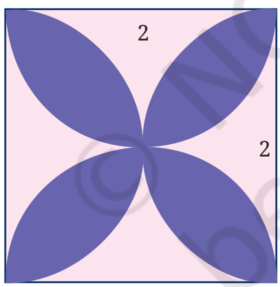


चित्र 6.49 — एक चतुर्थांश वृत्त और दो अर्द्धवृत्त

चित्र में एक वर्ग के भीतर एक चतुर्थांश वृत्त दर्शाया गया है। इसका केंद्र एक शीर्ष पर है और यह दो आसन्न शीर्षों से होकर गुजरता है। दो आसन्न भुजाओं पर व्यास के रूप में दो अर्द्धवृत्त हैं। ये छायांकित क्षेत्र A और B बनाते हैं।

दर्शाइए कि A और B के पास समान क्षेत्र है।

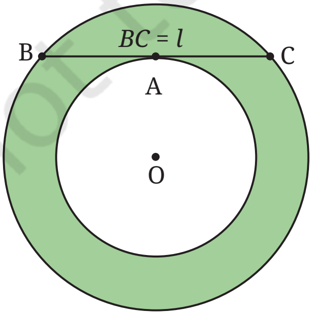
*22.



चित्र 6.50

चित्र 6.50 में 2 इकाई भुजा वाले वर्ग के भीतर चार अर्द्धवृत्त खींचे गए हैं। इन अर्द्धवृत्तों के केंद्र, भुजाओं के मध्यबिंदु हैं। ये चार पंखुड़ियों वाला एक पुष्प बनाते हैं (जिन्हें नीले रंग से दर्शाया गया है)। इस पुष्प का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

*23.

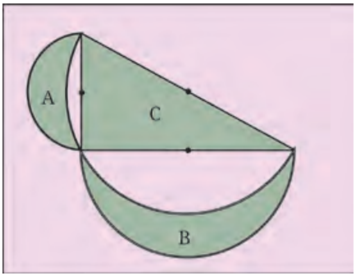


चित्र 6.51

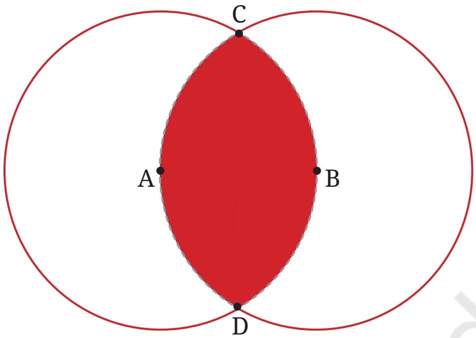
चित्र 6.51 में हम दो सकेंद्रिय वृत्तों में देखते हैं कि उनका एक ही केंद्र O है। बड़े वृत्त की एक जीवा BC खींची गई है जो छोटे वृत्त को बिंदु A पर स्पर्श करती है। BC की लंबाई l है। दर्शाइए कि दोनों वृत्तों के मध्य स्थित हरे भाग का क्षेत्रफल $\frac{1}{4}\pi l^2$ है।

not to be republished © NCERT

*24. चित्र 6.52 में समकोण त्रिभुज की भुजाओं पर अर्द्धवृत्त खींचे गए हैं, जैसा आकृति में दर्शाया गया है। दर्शाइए कि क्षेत्रफल (A) + क्षेत्रफल (B) = क्षेत्रफल (C) है।



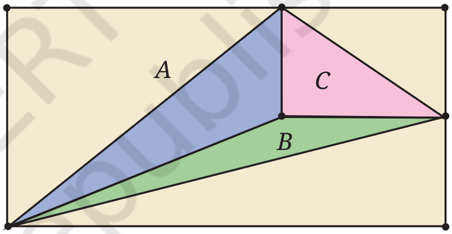
चित्र 6.52



चित्र 6.53 — त्रिज्या r के दो सर्वांगसम वृत्त

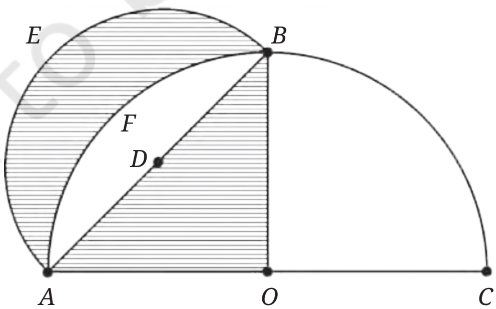
*25. चित्र 6.53 में दो वृत्त दर्शाए गए हैं जो एक-दूसरे के केंद्रों से होकर गुजरते हैं। दोनों वृत्तों द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल उभयनिष्ठ त्रिज्या r के पदों में ज्ञात कीजिए।

*26. चित्र 6.54 में हम एक आयत के भीतर तीन त्रिभुज देख रहे हैं। दर्शाइए कि इन त्रिभुजों का क्षेत्रफल $\frac{2(A+C)(B+C)}{C}$ है।



चित्र 6.54

*27. चित्र में हम एक-चौथाई वृत्त, एक अर्द्धवृत्त और एक त्रिभुज द्वारा निर्मित दो छायांकित क्षेत्र देखते हैं—



चित्र 6.55

दर्शाइए कि दोनों छायांकित क्षेत्रों का क्षेत्रफल समान है।

© NCERT not to be republished

सारांश

- π सभी वृत्तों के लिए परिधि और व्यास का स्थिर अनुपात है तथा यह $\frac{22}{7}$ अथवा 3.14 के समान होता है।
- वृत्त की परिधि $C = 2\pi r$ होती है जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।
- वृत्त की चाप की लंबाई $l = 2\pi r \times \frac{\theta°}{360°}$ है, जहाँ θ केंद्रीय कोण है।
- त्रिभुज का क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई होता है।
- त्रिभुज के क्षेत्रफल को उसकी भुजाओं a, b, c के पदों में व्यक्त करने का हीरोन का सूत्र — क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, जहाँ $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ है।
- वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 होता है।
- π का अनुमानित मान — आर्किमिडीज — $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$; चोंगजी — $\pi \approx \frac{355}{113}$; आर्यभट — $\pi = 3.1416$; माधव का सटीक सूत्र — $\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$
- *π एक अपरिमेय संख्या है।*
- वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $\pi r^2 \times \frac{\theta°}{360°}$ होता है, जिसमें θ केंद्रीय कोण है।
- ब्रह्मगुप्त द्वारा चक्रीय चतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र भुजाओं a, b, c, d के पदों में इस प्रकार है — क्षेत्रफल $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, जहाँ $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ है।

© NCERT not to be republished