0920CH07

7 संभावनाओं का गणित — प्रायिकता का परिचय

7.1 प्रायिकता क्या है?

जिस प्रकार हम लंबाई, क्षेत्रफल अथवा आयतन जैसी राशियों को मापते हैं, उसी प्रकार **प्रायिकता** भी एक प्रकार का मापन है। यद्यपि भौतिक राशियों के स्थान पर प्रायिकता का उपयोग किसी **घटना** के घटित होने की संभावना के मापन में किया जाता है। विशेष रूप से यह किसी विशेष घटना के होने को लेकर हमारी निश्चितता अथवा आत्मविश्वास को व्यक्त करने में सहायता करती है। उदाहरण के लिए, आप अपने मित्र से पूछ सकते हैं—

- क्या आज वर्षा होने वाली है?
- क्या हमारा विद्यालय कल अंतर्विद्यालयी हॉकी प्रतियोगिता में विजयी होगा?
- क्या मैं विद्यालयी सभा में प्रस्तुति देने हेतु मासिक लकी ड्रॉ में चयनित किया जाऊँगा?

[विद्यालय के सभी विद्यार्थियों के नाम कागज की पर्चियों पर लिखे जाते हैं और एक पर्ची यादृच्छिक रूप से चयनित की जाती है।]

ये घटनाएँ **यादृच्छिक** घटनाओं के उदाहरण हैं। हम इनके संभावित परिणामों से अवगत होते हैं (या तो वर्षा होगी या नहीं होगी; हमारे विद्यालय का दल हॉकी प्रतियोगिता में या तो जीतेगा या हार जाएगा या बराबरी पर रहेगा, विद्यालय-सभा में प्रस्तुति हेतु कोई एक विद्यार्थी अवश्य चयनित होगा)। परंतु हमें यह पूर्व में ज्ञात नहीं होता कि कौन-सा परिणाम निश्चित रूप से प्राप्त होगा अर्थात हर बार ऐसी घटना के घटित होने के अवसर पर **संभावना** या **यादृच्छिकता** का एक तत्त्व उपस्थित रहता है।

क्या हम इन परिणामों को 100 प्रतिशत निश्चितता के साथ बता सकते हैं? कोई भी इन प्रश्नों के विषय में **असंभव** या **निश्चित** जैसे शब्दों का उपयोग कर सकता है अथवा **कम संभव**, **अधिक संभव** या **समान रूप से संभव** जैसे वक्तव्यों का उपयोग कर सकता है। यह निर्णय संग्रहित किए गए विभिन्न प्रकार के **प्रमाणों** पर आधारित होते हैं। उदाहरण के लिए, एक मित्र यह कह सकता है कि "सूर्य तेज चमक रहा है इसलिए आज वर्षा की संभावना नहीं है", जबकि अन्य मित्र अवलोकन के पश्चात कह सकता है कि "आज बहुत गरमी है तो मेरे विचार से बाद में वर्षा हो सकती है।" दोनों ही स्थितियों में वे अपनी वर्तमान मौसम की स्थिति को आकलित कर वर्षा का अनुमान लगा रहे हैं। यह आज की वर्षा की स्थिति के लिए **व्यक्तिनिष्ठ प्रायिकता** है।

© NCERT not to be republished

जैसा कि आप पिछले पृष्ठ पर दिए गए उदाहरण में देख सकते हैं कि प्रायिकता **अनिश्चितता** अथवा **संभावना** से संबंधित है। हमारे तेजी से जटिल होते समाज की एक प्रमुख विशेषता यह है कि हमें उन प्रश्नों को हल करना होता है जिनके उत्तर निश्चित नहीं हैं अपितु उन उत्तरों के एक या उससे अधिक संभावित विकल्प होते हैं। इस प्रकार जीवन के अनेक पहलुओं में घटनाओं की प्रायिकता के **वस्तुनिष्ठ** आकलन को समझना अत्यंत महत्त्वपूर्ण है।

इस अध्याय में हम यह अध्ययन करेंगे कि प्रायिकता का आकलन और अधिक वस्तुनिष्ठ विधि अर्थात **प्रमाणों के संग्रहण** की विधि से कैसे कर सकते हैं, जिनका उपयोग किसी घटना की संभावना का वस्तुनिष्ठ आकलन करने के लिए किया जा सके। परंतु सर्वप्रथम हमें यादृच्छिकता और प्रायिकता का पैमाना जैसे कुछ शब्दों और विचारों को समझना चाहिए।

7.1.1 यादृच्छिकता क्या है?

यादृच्छिकता एक ऐसी परिस्थिति या क्रिया (जैसे सिक्के को उछालना अथवा पासा फेंकना) से संबंधित है जहाँ आप यह अनुमान नहीं लगा सकते कि निश्चित रूप से आगे क्या होगा! यद्यपि आप सभी संभावित परिणामों से अवगत हो सकते हैं किंतु आप यह नहीं कह सकते कि कौन-से परिणाम सुनिश्चित हैं। उदाहरण के लिए—

- **एक सिक्के को उछालना—** आप जानते हैं कि परिणाम चित (हेड) या पट (टेल) ही आ सकता है परंतु किसी उछाल में दोनों में से कौन-सा परिणाम आने वाला है, आप निश्चित नहीं कह सकते।
- **पासा फेंकना—** आप जानते हैं कि संभावित परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 या 6 हैं परंतु आप यह नहीं जानते कि किसी विशिष्ट अवसर में पासा फेंकने पर कौन-सा अंक आएगा।

ये प्रेक्षण (सामान्यतया प्रायिकता में इन्हें **प्रयोग** अथवा **परीक्षण** कहते हैं) अपनी अनिश्चितता के कारण यादृच्छिक कहलाते हैं। पिछले पृष्ठ पर बताया गया लकी ड्रॉ का उदाहरण, यादृच्छिक प्रेक्षण या प्रयोग का एक उदाहरण है क्योंकि इसके परिणाम का पूर्वानुमान नहीं लगाया जा सकता और प्रत्येक विद्यार्थी के चयनित होने की संभावना समान है। कुल मिलाकर आप यह बता सकते हैं कि क्या हो सकता है, न कि क्या होगा।

यादृच्छिक प्रेक्षण (रेंडम ऑब्जर्वेशन)— एक यादृच्छिक प्रयोग ऐसी प्रक्रिया है जिसकी आप पुनरावृत्ति कर सकते हैं (जैसे एक सिक्का उछालना) जहाँ प्रत्येक बार परिणाम भिन्न हो सकता है और आप परिणाम पहले से नहीं जान सकते हैं।

सोचिए और विचार कीजिए

ऐसी अनिश्चितता कभी-कभी उपयोगी हो सकती है! उदाहरण के लिए, एक क्रिकेट प्रतियोगिता में खिलाड़ियों का कौन-सा दल पहले बल्लेबाजी करेगा, यह निर्णय करने के लिए सिक्का उछाला जाना एक न्यायसंगत विधि है। क्या आप व्याख्या कर सकते हैं कि ऐसा क्यों है?

© NCERT not to be republished

प्रायिकता गणित की वह शाखा है जिसमें यादृच्छिकता और किसी यादृच्छिक परिस्थिति में एक विशिष्ट परिणाम होने की संभावनाओं का अध्ययन किया जाता है।

उदाहरण के लिए, जब आप सिक्का उछालते हैं तो चित आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ और पट आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ होती है, क्योंकि दोनों **समप्रायिक** अर्थात समान संभावना वाले परिणाम हैं। एक यादृच्छिक प्रयोग में प्रत्येक परिणाम की संभावना होती है परंतु आप केवल संभावनाओं को ज्ञात कर सकते हैं, सटीक परिणाम को नहीं।

क्या आपने कभी सोचा है कि ऐसा क्या है जो वर्षा जैसी घटना को यादृच्छिक बनाता है? वर्षा जैसी घटना यादृच्छिक इसलिए मानी जाती है क्योंकि यह वायुमंडल में अनेक जटिल कारकों (जैसे— तापमान, आर्द्रता, वायु प्रणाली और दबाव) पर निर्भर करती है और यह इन कारकों के प्रति इतनी संवेदनशील होती है कि पूर्ण निश्चितता से इसका अनुमान लगाना असंभव है। अत: पूर्ण रूप से यह ज्ञात करना असंभव है कि किसी निर्धारित दिन में वर्षा होगी या नहीं। वर्षा में यादृच्छिकता से अभिप्राय है कि वर्षा होने के सटीक स्थान और समय का सही अनुमान नहीं लगाया जा सकता किंतु हम आँकड़ों से निष्कर्षित प्रतिरूप और प्रायिकता के आधार पर विभिन्न स्थानों में वर्षा की प्रायिकता अथवा संभावना का आकलन कर सकते हैं।

सोचिए और विचार कीजिए

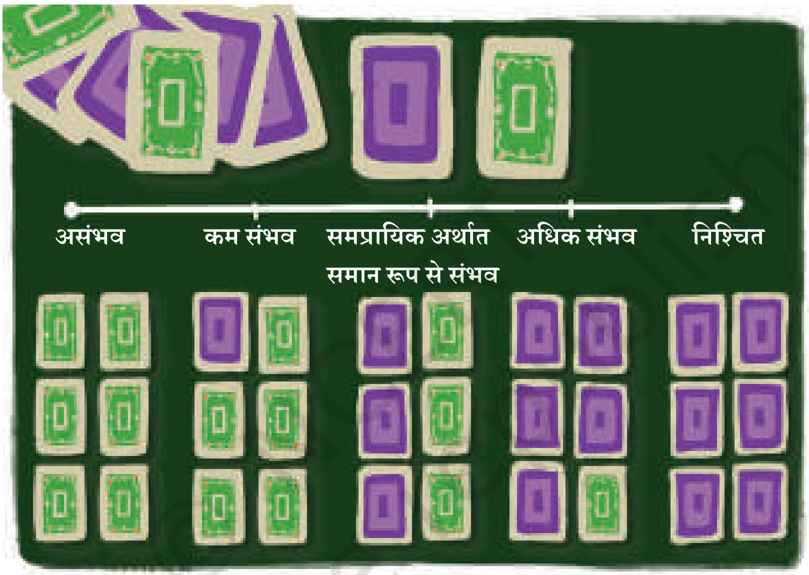
आप ₹1 का सिक्का उछालिए और अपने मित्र से इसके परिणाम का अनुमान लगाने को कहिए। क्या आप देखते हैं कि आपका मित्र चित या पट का अनुमान लगा सकता है परंतु निश्चित रूप से परिणाम ज्ञात नहीं कर सकता है? यही यादृच्छिकता है! सभी संभावित परिणाम ज्ञात होते हैं परंतु प्रत्येक विशिष्ट या व्यक्तिगत प्रयास अप्रत्याशित होता है।

7.1.2 प्रायिकता का पैमाना

किसी घटना के घटित होने की संभावना को प्रकट करने के लिए प्रायिकता को 0 से 1 तक के पैमाने पर मापा जाता है। यदि आपके विद्यालय द्वारा हॉकी प्रतियोगिता में विजयी होने की प्रायिकता 0.75 है तो इसका आशय यह है कि 75 प्रतिशत संभावना है कि आपका विद्यालय विजयी होगा। इसका अभिप्राय यह है कि आपके विद्यालय के विजयी होने की **अधिक संभावना** है। यदि हॉकी प्रतियोगिता में आपके विद्यालय के विजयी होने की प्रायिकता 0.5 है तो इसका आशय यह है कि आपके विद्यालय के विजयी होनी की संभावना 50 प्रतिशत है। इसका अभिप्राय यह है कि आपके विद्यालय का विजयी होना या न होना **समप्रायिक** (समान संभावना) है। दूसरी ओर यदि प्रायिकता 0 है तो इसका अर्थ यह है कि विजयी होना **असंभव** है (जैसे बिना खेले विजयी होना) और यदि प्रायिकता 1 है तो इसका आशय यह है कि आपका विद्यालय निश्चित रूप से विजयी होगा। अधिकांश घटनाओं की प्रायिकता 0 और 1 के मध्य होती है जो यह व्यक्त करता है कि उनके घटित होने की कितनी संभावना है।

© NCERT not to be republished

ताश के छह पत्तों की एक गड्डी की परिकल्पना कीजिए, जहाँ बैंगनी और हरे पत्तों की संख्या अज्ञात है। गड्डी से बैंगनी रंग के एक पत्ते को निकालने की प्रायिकता असंभव (यदि कोई भी पत्ता बैंगनी रंग का नहीं हो) से निश्चित (यदि सभी पत्ते बैंगनी रंग के हों) तक हो सकती है (चित्र 7.1 देखिए)। जिस प्रकार बैंगनी रंग के पत्तों की संख्या बढ़ती जाती है, उसी प्रकार गड्डी से एक बैंगनी रंग के पत्ते को चुनने की संभावना **प्रायिकता पैमाने** पर कम संभावित, समान संभावित से और अधिक संभावित की ओर सहजता के साथ बढ़ती जाती है। यह पैमाना हमें विभिन्न घटनाओं के घटित होने की संभावना को समझने और तुलना करने में सहायता प्रदान करता है, बिल्कुल वैसे ही जैसे हम संख्यारेखा का उपयोग करते हैं!



चित्र 7.1 — प्रायिकता पैमाना पर गड्डी से एक बैंगनी रंग के पत्ते का चयन करने की प्रायिकता

यहाँ घटनाओं और उनके घटित होने कि प्रायिकताओं के कुछ उदाहरण दिए गए हैं। चित्र 7.1 में प्रायिकता पैमाने के सापेक्ष उदाहरणों को देखिए और समझिए कि प्रायिकता को एक पैमाने पर कैसे मापते हैं।

घटना	इसका आशय है
एक पासे पर 6 से बड़ी संख्या आना	**असंभव**— पासे में केवल 1 से 6 तक की संख्याएँ होती हैं।
एक मानक पासे पर 3 आना	**कम संभावित**— परंतु असंभव नहीं है क्योंकि पासे का एक फलक 3 है।

एक सिक्का उछालने पर चित आना	**समप्रायिक संभावना**— चित या पट आने की संभावना समप्रायिक अर्थात समान है।
ताश के 52 पत्तों की एक गड्डी से 2 से 10 तक की संख्या वाला कोई एक पत्ता निकालना	**अधिक संभावित**— ताश के 52 पत्तों की एक गड्डी में 2 से 10 तक की संख्या वाले 36 पत्ते होते हैं।
सभी लाल मिठाइयों के थैले से 1 लाल मिठाई निकालना	**निश्चित**— सभी मिठाइयाँ लाल हैं।

प्रश्नावली 7.1

1. निम्नलिखित घटनाओं को एक पैमाने पर 0 (असंभव) से लेकर 1 (निश्चित) तक क्रमबद्ध कीजिए। प्रत्येक घटना को असंभव, कम संभव, समप्रायिक, अधिक संभव और निश्चित में वर्गीकृत कीजिए। कारण बताइए कि आपने प्रत्येक घटना को इस वर्ग में क्यों रखा है।
   (i) आगामी सोमवार रविवार के पश्चात आएगा।
   (ii) मुंबई में जुलाई महीने में बर्फबारी होगी।
   (iii) आज आपकी कक्षा से एक हाथी गुजरेगा।
   (iv) कल आप अपने विद्यालय में कम-से-कम एक मित्र का अभिवादन करेंगे।

7.2 प्रायिकता का वस्तुनिष्ठ मापन

वस्तुनिष्ठता के दृष्टिकोण से किसी घटना की प्रायिकता मापने की दो प्रमुख विधियाँ हैं—

1. **अनुभव से प्राप्त प्रमाणों का उपयोग**— इसमें वे आँकड़े सम्मिलित किए जा सकते हैं जो या तो एक प्रयोग को बार-बार दोहराकर संग्रहित किए गए हों अथवा पूर्व के प्रेक्षणों से प्राप्त सांख्यिकीय आँकड़ों का विश्लेषण करके संग्रहित किए गए हों। दोनों ही संदर्भों में संग्रहित प्रमाणों के आधार पर घटना की सापेक्षिक आवृत्ति की गणना करके प्रायिकता का आकलन किया जाता है। हम इसे **प्रायोगिक प्रायिकता** कहते हैं।
2. **सैद्धांतिक विधियों का उपयोग**— इस विधि में यह परिकल्पित है कि सभी **संभव परिणाम** समप्रायिक हैं (जहाँ ऐसा कोई विश्वसनीय कारण उपस्थित नहीं है जिससे किसी एक परिणाम के आने की संभावना दूसरे परिणाम से अधिक है)। तब संभव परिणामों की कुल संख्या के सापेक्ष अनुकूल परिणामों की संख्या के संदर्भ में तर्क देकर प्रायिकता का आकलन किया जाता है। हम इसे **सैद्धांतिक प्रायिकता** कहते हैं।

© NCERT not to be republished

7.2.1 प्रायोगिक प्रायिकता— प्रेक्षण अथवा प्रयोग करना

प्रयोग करना, प्रायिकता के वस्तुनिष्ठ आकलन के लिए एक अन्य विधि है। एक प्रयोग में, घटना प्रयोग का फल होती है और इसे **परिणाम** कहा जाता है। एक प्रयोग में सभी संभव परिणामों के समुच्चय को **प्रतिदर्श समष्टि** (सेंपल स्पेस) कहते हैं।

प्रतिदर्श समष्टि को कोष्ठकों में सूचीबद्ध किया जाता है और इसमें लिखे सभी परिणामों को नीचे दिए अनुसार अल्पविराम द्वारा पृथक किया जाता है।

उदाहरण 1— प्रयोग— एक सिक्का उछाला गया

संभावित परिणाम— चित (H) या पट (T) (चित्र 7.2 देखिए)

प्रतिदर्श समष्टि—{H, T}

प्रयोग— एक पासा फेंका गया

संभावित परिणाम— पासे के ऊपर वाला फलक 1, 2, 3, 4, 5 या 6 बिंदुओं को दर्शाता है (चित्र 7.3 देखिए)

प्रतिदर्श समष्टि— {1, 2, 3, 4, 5, 6}

चित्र 7.2 — एक सिक्के का चित और पट

चित्र 7.3 — षट्फलकीय पासा

प्रायोगिक प्रायिकता = $\frac{\text{घटना के घटित होने की संख्या}}{\text{परीक्षण की कुल संख्या}}$

उदाहरण 2— मान लीजिए, आप एक पासा 50 बार फेंकते हैं और उसमें ठीक 8 बार 4 प्राप्त होता है।

पासे पर 4 प्राप्त होने की प्रायोगिक प्रायिकता $\frac{8}{50} = 0.16$ अथवा 16% है।

हम यह भी कह सकते हैं कि 4 की **सापेक्षिक आवृत्ति** $\frac{8}{50} = 0.16$ है।

सापेक्षिक आवृत्ति आपको सैद्धांतिक पूर्वानुमानों की अपेक्षा वास्तविक आँकड़ों पर आधारित प्रायिकता को समझने में सहायता प्रदान करती है। जब आप प्रेक्षित परिणामों के साथ कार्य कर रहे होते हैं तब यह विशेषत: सांख्यिकी और आँकड़ों के विश्लेषण में उपयोगी होती है।

क्या आप जानते हैं? साँप-सीढ़ी के खेल का प्रारंभ प्राचीन भारत में हुआ है। यह **ज्ञान्-चौपड़** नामक पारंपरिक खेल से विकसित हुआ है जिसका उपयोग शैक्षणिक उपकरण के रूप में किया गया था। ज्ञान्-चौपड़ का उद्देश्य नैतिक शिक्षा देना था, इसमें प्रत्येक सीढ़ी एक गुण के प्रतीक को प्रस्तुत कर रही है और प्रत्येक साँप एक अवगुण का प्रतिनिधित्व कर रहा है। खेल के दौरान यह अच्छे और बुरे व्यवहार के परिणामों को दर्शाता है। ज्ञान्-चौपड़ के विभिन्न रूप भारत के भिन्न-भिन्न भागों में पाए गए हैं।

चित्र 7.4 — कपड़े पर बना एक जैन ज्ञान्-चौपड़ खेल, राष्ट्रीय संग्रहालय (19 वीं शताब्दी, भारत)

7.2.2 सैद्धांतिक प्रायिकता

सैद्धांतिक प्रायिकता में किसी घटना के घटित होने की संभावना का अध्ययन, सभी संभावित परिणामों के **समप्रायिक** होने के आधार पर किया जाता है। ऐसी अपेक्षा हम एक आदर्श और **पूर्णतया न्यायसंगत स्थिति** में करते हैं। इस स्थिति में किसी प्रकार के आँकड़े या प्रयोग की आवश्यकता नहीं होती है। सामान्यतया सैद्धांतिक प्रायिकता को P (घटना) अथवा P (परिणाम) के रूप में निरूपित किया जाता है।

सैद्धांतिक प्रायिकता (P) $= \dfrac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभावित परिणामों की संख्या}}$

उदाहरण 3— यदि आप एक आदर्श षट्फलकीय पासे को फेंकते हैं तो पासे पर 4 प्राप्त होने की सैद्धांतिक प्रायिकता क्या है?

हल—

अनुकूल परिणामों की संख्या = 1 (केवल संख्या 4)

सभी संभावित परिणामों की संख्या = 6 (1 से लेकर 6 तक की संख्याएँ)

P (पासे पर 4 प्राप्त होना) $= \dfrac{1}{6} = 0.1666... \approx 0.167$ अथवा 16.7%

उदाहरण 4— 'PROBABILITY' शब्द से एक अक्षर का यादृच्छिक रूप से चयन किया जाता है। 'B' अक्षर के चयनित होने की प्रायिकता क्या है?

© NCERT not to be republished

हल—

अनुकूल परिणामों की संख्या = 2 (‘PROBABILITY’ शब्द में दो ‘B’ हैं)
सभी संभावित परिणामों की संख्या = 11 (‘PROBABILITY’ शब्द में 11 अक्षर हैं)

P (अक्षर ‘B’ को चुनना) $= \frac{2}{11} = 0.1818... \approx 0.182$ अथवा 18.2%

7.2.3 प्रायिकता के माध्यम से सांख्यिकीय आँकड़ों का विश्लेषण

सांख्यिकीय आँकड़ों के माध्यम से प्रमाण संग्रह की विधि का उपयोग व्यापार जगत में विपणन, बिक्री का पूर्वानुमान लगाने, बीमा और विज्ञान एवं सामाजिक विज्ञान अनुसंधान में व्यापक रूप से किया जाता है।

उदाहरण 5— मान लीजिए, आप अज्ञात रूप में अपनी कक्षा के 50 विद्यार्थियों के प्रिय फल की सूचना संग्रहीत करते हैं। आइए, कल्पना करें कि परिणाम इस प्रकार होंगे— 20 विद्यार्थी आम पसंद करते हैं, 15 विद्यार्थी सेब पसंद करते हैं, 10 विद्यार्थी केला पसंद करते हैं और 5 विद्यार्थी अंगूर पसंद करते हैं।

आइए, एक खेल खेलें! मान लीजिए, हम कक्षा से यादृच्छिक रूप से एक विद्यार्थी का चयन करते हैं और उसके प्रिय फल का अनुमान लगाने का प्रयास करते हैं। उसका प्रिय फल आम होने की प्रायिकता क्या है? सांख्यिकीय प्रायिकता संग्रहित आँकड़ों पर आधारित होती है। अतः चयनित विद्यार्थी का प्रिय फल आम होने का तार्किक आकलन होगा—

आम के प्रिय फल होने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{विद्यार्थियों की संख्या जिनका प्रिय फल आम है}}{\text{विद्यार्थियों की कुल संख्या}} = \frac{20}{50} = 0.4.$$

अतः कक्षा में यादृच्छिक चयनित विद्यार्थी का प्रिय फल आम होने की संभावना 0.4 अथवा 40% है।

अब मान लीजिए, आप विद्यार्थियों के प्रिय फलों के आधार पर संपूर्ण विद्यालय के लिए फल विक्रय करना चाहते हैं। आपको प्रत्येक प्रकार के फल की मात्रा का अनुमान लगाने की आवश्यकता होगी, जिसे 1500 विद्यार्थियों के संपूर्ण विद्यालय के लिए क्रय करना है। सामान्यत: विद्यालय के सभी विद्यार्थियों अथवा समस्त **जनसंख्या** से आँकड़े एकत्रित करना अव्यावहारिक होगा। वास्तविक जीवन में सांख्यिकीय प्रायिकता का उपयोग सामान्यत: एक **प्रतिदर्श** (सैंपल) से एकत्रित आँकड़ों पर आधारित होता है। जनसंख्या अर्थात विद्यालय में कुल विद्यार्थियों की संख्या 1500 है और हमने एक कक्षा से 50 विद्यार्थियों के प्रतिदर्श से प्रमाण संग्रहित किए थे। आम के प्रिय फल होने की प्रायिकता के आकलन की गणना 0.4 की गई थी। अतः इसका अभिप्राय यह होगा कि हमें लगभग 600 आमों

© NCERT not to be republished

(1500 का 40%) को क्रय करने की आवश्यकता होगी और शेष फल, सेब, केला और अंगूर होंगे। यदि हम अपने आकलन में और अधिक आश्वस्त होना चाहते हैं तो हमें अपेक्षाकृत और अधिक बड़ा प्रतिदर्श चुनना होगा, उदाहरण के लिए, 100 विद्यार्थियों से पूछना और सुनिश्चित करना कि यह आकलन अधिक प्रतिनिधिक हो, जैसे कि विभिन्न कक्षाओं और श्रेणियों के विद्यार्थियों को सम्मिलित करना। सांख्यिकी में इस प्रक्रिया को **प्रतिचयन** (सैंपलिंग) कहा जाता है।

प्रतिचयन के विषय में और अधिक जानिए

प्रतिचयन के विषय में आप और अधिक जानना चाहते हैं? अभी तक हमने जो सीखा है, वह केवल प्रारंभ है!

जब हम प्रतिदर्श से आँकड़े एकत्रित कर रहे होते हैं तो कुछ अन्य महत्त्वपूर्ण विषयों पर विचार करना होता है, जैसे— आपका प्रतिदर्श कितना बड़ा होना चाहिए और यह कैसे सुनिश्चित किया जाए कि आपका प्रतिदर्श समस्त जनसंख्या को वास्तविक रूप से प्रस्तुत करता है। प्रतिदर्श के आकार और इसकी निष्पक्षता से यह सुनिश्चित होता है कि वह न्यायसंगत है और पक्षपात से मुक्त है और यह अपेक्षाकृत अधिक सटीक परिणाम प्राप्त करने में सहायता प्रदान करता है।

यदि आप यह जानने में रुचि रखते हैं और इस संदर्भ में और अधिक अन्वेषण करना चाहते हैं कि सांख्यिकी में प्रतिदर्श का आकार और प्रस्तुतीकरण क्यों महत्त्वपूर्ण होता है तो आप मुद्रित अथवा डिजिटल संसाधनों में इसका अध्ययन कर सकते हैं।

सारांशतः यह कहा जा सकता है कि **प्रायोगिक प्रायिकता,** परीक्षणों से संग्रहित वास्तविक आँकड़ों पर आधारित होती है, न कि अनुमानों पर। **सैद्धांतिक प्रायिकता** परिणामों के समप्रायिक होने के अनुमान (एक पूर्णतया न्यायसंगत परिस्थिति) पर आधारित है और प्रायोगिक आँकड़ों का उपयोग नहीं करती है। यहाँ तक कि पूर्णतया न्यायसंगत परिस्थिति में भी प्रायोगिक प्रायिकता और सैद्धांतिक प्रायिकता में अंतर हो सकता है, विशेषकर उन स्थितियों में जब प्रयासों की संख्या कम हो। प्रयासों की संख्या में वृद्धि होने के साथ प्रायोगिक प्रायिकता का मान सैद्धांतिक प्रायिकता के समीप आता जाता है— यह **बृहत् संख्याओं का नियम** कहलाता है।

सोचिए और विचार कीजिए

यदि मैं 8 बार निरंतर पासा फेंकने पर सदैव 4 पाता हूँ तो अगली बार 4 आने की प्रायिकता अभी भी केवल ≈ 0.16 है (माना पासा निष्पक्ष है)। प्रायिकता आपको यह नहीं बताती कि आगे क्या होगा, अपितु दीर्घावधि में क्या होगा, इसका अनुमान लगाती है।

© NCERT not to be republished

द्यूतकार का भ्रम

अधिकतर लोग सोचते हैं कि यदि कोई घटना यादृच्छिक रूप से एक श्रृंखला में कई बार घटित होता है (जैसे कि सिक्का उछालने पर लगातार छह बार चित का आना) तो अगली बार उसके विपरीत परिणाम (पट) आने की अधिक संभावना हो जाती है। किंतु वास्तव में पहले जो परिणाम प्राप्त हुए थे, सिक्का उसका कोई हिसाब नहीं रखता। प्रत्येक बार जब भी आप सिक्का उछालते हैं तो चित और पट की संभावना पहली बार सिक्का उछालने के समान ही बनी रहती है। सिक्के की कोई स्मृति नहीं होती है, अतः पूर्व की उछालों से आने वाले परिणाम में कोई परिवर्तन नहीं होता है। इसे **द्यूतकार (गेंबलर) का भ्रम** कहा जाता है।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि आप एक मानक सिक्के को उछालते हैं। उस पर लगातार छह बार चित आता है। आप यह अनुभव कर सकते हैं कि अगली बार सिक्का उछालने पर पट आ सकता है, क्योंकि पट कुछ समय के लिए नहीं आया है। जबकि अगली उछाल में पट आने की प्रायिकता अब भी पूर्व के समान ही 50% अथवा $\frac{1}{2}$ है। सिक्के में पूर्व की उछालों की कोई स्मृति नहीं होती है।

उदाहरण 6— मान लीजिए, आप साँप-सीढ़ी खेल रहे हैं और आगे बढ़ने के लिए एक षट्फलकीय निष्पक्ष पासा फेंकते हैं।

आपने अभी निरंतर तीन बार पासा फेंकने पर तीनों बार 6 प्राप्त किया।

अब आप सोचते हैं कि— "मैं अभी तीन बार छह प्राप्त कर चुका हूँ तो इसकी कोई संभावना नहीं है कि मैं अगली बार भी 6 प्राप्त करूँगा!"

यह विचार ही द्यूतकार का भ्रम है क्योंकि प्रत्येक बार जब पासा फेंका जाता है तो वह एक स्वतंत्र घटना होती है। पासे पर 6 आने की प्रायिकता सदैव ही $\frac{1}{6} \approx 0.166$ अथवा 16.6% होती है।

इसमें पूर्व की घटना के आधार पर कोई भी परिवर्तन नहीं होता है।

मूल विचार— संभावनाओं के अनेक खेलों के समान ही, साँप-सीढ़ी के खेल में प्रत्येक बार पासा फेंकना स्वतंत्र घटना है। द्यूतकार का यही भ्रम लोगों को यह मानने के लिए अभिप्रेरित करता है कि यहाँ कोई प्रतिरूप है जबकि वास्तव में, इस प्रकार की यादृच्छिकता की कोई स्मृति नहीं होती है।

न्यायसंगत एवं निष्पक्ष

जब हम सिक्के के विषय में बात करते हैं तो हम उसे न्यायसंगत मानते हैं अर्थात यह सममितीय है जिसके पास ऐसा कोई कारण या गुण नहीं है कि वह एक ओर की तुलना में दूसरी ओर अधिक बार गिरे। हम सिक्के के इस गुण को **'निष्पक्ष होना'** कहते हैं। 'यादृच्छिक रूप से सिक्का उछालना' जैसे तथ्य से हमारा आशय सिक्के को बिना किसी पक्षपात या हस्तक्षेप के स्वतंत्रतापूर्वक उछाला जाना है।

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 7.2

1. एक शिक्षक विभिन्न रंगों की मिठाइयों के एक बड़े थैले को आपस में मिलाती है और उसमें से यादृच्छिक रूप से 30 मिठाइयों के एक प्रतिदर्श का चयन करती है। वह प्रत्येक रंग की मिठाइयों की गिनती करती है, जिनकी संख्या इस प्रकार है—

   10 लाल मिठाइयाँ | 8 हरी मिठाइयाँ | 7 पीली मिठाइयाँ | 5 नीली मिठाइयाँ

   (i) प्रतिदर्श से यादृच्छिक रूप से हरी मिठाई निकालने की प्रायिकता की गणना कीजिए।

   (ii) यदि बड़े थैले में कुल 600 मिठाइयाँ हैं तो प्रतिदर्श के परिणामों के आधार पर आकलन कीजिए कि कितनी मिठाइयों के पीले रंग के होने की संभावना है?

2. एक विद्यालय में सर्वेक्षण कराया गया, जहाँ 40 विद्यार्थियों के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श से उनका प्रिय क्लब पूछा गया। प्रतिक्रियाएँ इस प्रकार हैं—

   14 विद्यार्थी — विज्ञान क्लब | 11 विद्यार्थी — कला क्लब

   9 विद्यार्थी — खेल क्लब | 6 विद्यार्थी — वाद-विवाद क्लब

   मान लीजिए कि पूरे विद्यालय में 800 विद्यार्थी हैं।

   (i) प्रतिदर्श से यादृच्छिक चयनित विद्यार्थी की प्राथमिकता कला क्लब के होने की प्रायिकता क्या है?

   (ii) प्रतिदर्श के परिणामों का उपयोग करके आकलन कीजिए कि पूरे विद्यालय में कितने विद्यार्थी खेल क्लब को प्राथमिकता देंगे।

3. एक सिक्के को 20 बार उछालिए और प्रत्येक बार परिणाम को अंकित कीजिए (चित अथवा पट)।

   (i) आपने कितनी बार चित प्राप्त किया?

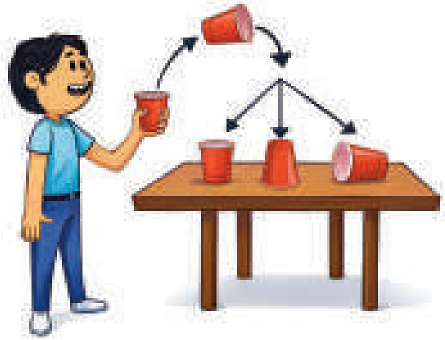
   (ii) आपने कितनी बार पट प्राप्त किया?

   (iii) चित प्राप्त करने की प्रायोगिक प्रायिकता की गणना कीजिए।

   (iv) यदि आप सिक्के को एक और बार उछालते हैं तब चित प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

4. कागज से निर्मित एक प्याले को हवा में 100 बार उछालिए। प्रत्येक बार उछालने के पश्चात एक कागज पर यह लिखते जाइए कि प्याला अपने निचले तल पर गिरता है, उल्टा होकर ऊपरी भाग पर गिरता है अथवा अपने पार्श्व पर गिरता है (चित्र 7.5 देखिए)। प्रायोगिक प्रायिकता का उपयोग करके परिणामों की प्रायिकता की गणना कीजिए।

5. एक निष्पक्ष षट्फलकीय पासे को फेंकने पर एक सम संख्या को प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?



चित्र 7.5 — कागज से निर्मित प्याले के गिरने की स्थितियाँ (बाएँ से दाएँ) — तल, उल्टा होकर ऊपरी भाग और पार्श्व भाग

6. मान लीजिए, आप एक षट्फलकीय पासे को 12 बार फेंकते हैं और तीन बार अंक '3' प्राप्त करते हैं।
   (i) पासे पर '3' आने की प्रायोगिक प्रायिकता क्या है?
   (ii) पासे पर '3' आने की सैद्धांतिक प्रायिकता क्या है?
   (iii) इन प्रायिकताओं में भिन्नता क्यों हो सकती है? यदि आप पासे को 60, 600 या 6000 बार फेंकें तो क्या प्राप्त होने की अपेक्षा करेंगे?

7.3 प्रायिकता के तत्त्व— प्रतिदर्श समष्टि और घटनाएँ

7.3.1 प्रतिदर्श समष्टि (सेंपल स्पेस)

स्मरण कीजिए, 'S' से निरूपित प्रतिदर्श समष्टि सभी संभावित परिणामों का समुच्चय होता है। प्रत्येक संभावित परिणाम को प्रतिदर्श समष्टि का तत्त्व कहा जाता है।

- प्रतिदर्श समष्टि 'S' में **प्रत्येक संभावित परिणाम** अवश्य ही सम्मिलित होना चाहिए।
- किसी परिणाम को **एक बार से अधिक सूचीबद्ध** नहीं किया जाना चाहिए।
- प्रतिदर्श समष्टि में तत्त्वों की संख्या को **प्रतिदर्श आकार** कहा जाता है और इसे 'n(S)' से निरूपित किया जाता है।

प्रतिदर्श समष्टि के उदाहरण

1. कल वर्षा होगी, इसके लिए प्रतिदर्श समष्टि S ={वर्षा होगी, वर्षा नहीं होगी} और प्रतिदर्श आकार n(S) = 2 हो सकता है।
2. एक प्रतियोगिता अर्थात एक प्रतियोगी दल के संभावित परिणाम के लिए प्रतिदर्श समष्टि S ={जीत, हार, ड्रॉ} और प्रतिदर्श आकार n(S) = 3 हो सकता है।
3. एक सिक्का उछालना—
   - प्रयोग— एक बार निष्पक्ष सिक्का उछालना।
   - प्रतिदर्श समष्टि— S = {चित (H), पट (T)}
   - प्रतिदर्श आकार = 2
4. एक पासा फेंकना—
   - प्रयोग— एक मानकीकृत षट्फलकीय पासा फेंकना।
   - प्रतिदर्श समष्टि— S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
   - प्रतिदर्श आकार = 6
5. दो सिक्कों को उछालना—
   - प्रयोग— एक साथ दो सिक्कों को उछालना।
   - प्रतिदर्श समष्टि— S = {HH, HT, TH, TT}
   - प्रतिदर्श आकार = 4

सिक्का 1	सिक्का 2	परिणाम
H	H	HH
H	T	HT
T	H	TH
T	T	TT

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

उपरोक्त उदाहरण 1 में जब हमने प्रतिदर्श समष्टि {वर्षा होगी, वर्षा नहीं होगी} का उपयोग किया था तो हमने वर्षा होगी या नहीं होगी, केवल इसी विषय पर विचार किया था। यद्यपि यदि हम वर्षा की विभिन्न मात्राओं, जैसे— फुहार, हल्की वर्षा अथवा भारी वर्षा को सम्मिलित करना चाहते हैं तो हमें अपने प्रतिदर्श समष्टि को {वर्षा नहीं, बूँदा-बाँदी, हल्की वर्षा, भारी वर्षा} में विस्तारित करने की आवश्यकता होगी, जिससे यह प्रश्न के लिए आवश्यक विवरण के स्तर के अनुरूप मेल खाता हो। यह सुनिश्चित करना आवश्यक है कि प्रतिदर्श समष्टि, प्रस्तुत विशिष्ट प्रश्न के अध्ययन के लिए पर्याप्त रूप से विस्तृत हो।

7.3.2 घटनाएँ

कोई **घटना** एक संभावित परिणाम अथवा परिणामों का संयोजन होती है जो तब घटित हो सकती है जब आप कोई यादृच्छिक गतिविधि करते हैं। यह सभी संभावित परिणामों से विशेष परिणामों का चयन करने जैसा है। कोई घटना, एक प्रतिदर्श समष्टि का उपसमुच्चय (सबसेट) होती है।

प्रतिदर्श समष्टि और घटनाओं के उदाहरण

1. दो सिक्कों को उछालना
   - प्रतिदर्श समष्टि— सभी संभावित परिणाम, जैसे— चित-चित, चित-पट, पट-चित, पट-पट। S = प्रतिदर्श समष्टि = {HH, HT, TH, TT}
   - घटना— 'कम-से-कम एक सिक्का चित प्रदर्शित करता है।' E = {HH, HT, TH}
2. षट्फलकीय पासा फेंकना
   - प्रतिदर्श समष्टि—1 से 6 तक अंकित सभी फलक। S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
   - घटना— 'पासे पर प्राप्त संख्या 4 से अधिक है।' E = {5, 6}
3. टोकरी से फल निकालना
   - प्रतिदर्श समष्टि— विभिन्न प्रकार के फल जो आप टोकरी से निकाल सकते हैं, जैसे— सेब, केला और संतरा। S = {सेब, केला, संतरा}
   - घटना— 'वह फल निकालना जो पीला हो।' E = {केला}

प्रश्नावली 7.3

1. जब एक षट्फलकीय पासा फेंका जाता है तो प्रतिदर्श समष्टि में संभावित परिणामों की कुल संख्या कितनी होगी?
2. निम्नलिखित प्रयोगों के लिए प्रतिदर्श समष्टि S लिखिए—

   (i) एक साथ एक पासा फेंकना और एक सिक्का उछालना।

© NCERT not to be republished

(ii) -5 और $+5$ के मध्य एक पूर्णांक का यादृच्छिक चयन करना।

(iii) एक बक्से में 5 हरी और 7 लाल गेंदें हैं। एक गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली गई।

3. एक ग्रामीण मेले में 3 लोकप्रिय नाश्ते उपलब्ध हैं— समोसा, पकौड़ा और भाजी। पेय पदार्थों में ग्रामीण व्यक्ति चाय या लस्सी का चयन कर सकते हैं।

(i) नाश्ते और पेय के सभी संभव संयोजन जो एक व्यक्ति मेले में चयनित कर सकता है, के प्रतिदर्श समष्टि सूचीबद्ध कीजिए।

(ii) 'समोसे को नाश्ते के रूप में चयनित करने' की घटना को सूचीबद्ध कीजिए।

7.4 वृक्ष आरेख

वृक्ष आरेख एक दृश्यांकन है जिसका उपयोग **बहु-चरणीय प्रयोग** के सभी संभावित परिणामों को सूचीबद्ध करने के लिए किया जाता है। एक बहु-चरणीय प्रयोग में स्वतंत्र परीक्षणों की एक शृंखला समाहित होती है, जैसे— एक सिक्के को दो बार उछालना अथवा एक पासे को तीन बार फेंकना। वृक्ष की प्रत्येक शाखा एक संभावित परिणाम को दर्शाती है और इन शाखाओं का आगे विभाजन आगामी घटनाओं के विभिन्न पथों को दर्शाता है।

एक वृक्ष आरेख निम्नलिखित के लिए उपयोगी है—

- बहु-चरणीय प्रयोगों का दृश्यांकन जहाँ आरंभ से समापन तक प्रत्येक पथ, एक पूर्ण परिणाम को दर्शाता है।
- एक प्रतिदर्श समष्टि के सभी परिणामों को सूचीबद्ध करना।

इस अध्याय में अभी तक हमने एकल-चरणीय प्रयोगों को देखा है। आइए, हम बहु-चरणीय प्रयोग का एक उदाहरण देखते हैं।

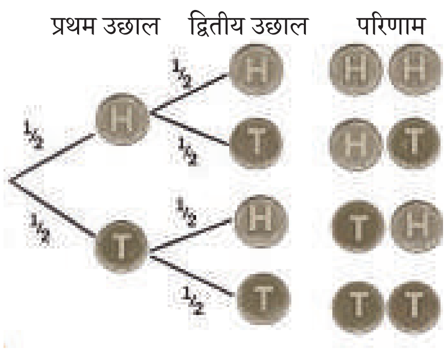
उदाहरण 7— प्रयोग— एक निष्पक्ष सिक्का दो बार उछालना।

वृक्ष आरेख (चित्र 7.6 देखिए)

एक बिंदु से प्रथम उछाल में प्राप्त प्रत्येक संभव परिणाम तक एक रेखा खींचिए। इनमें से प्रत्येक परिणाम से प्रत्येक संभव परिणाम तक दो रेखाएँ खींचिए। क्या आपने देखा कि वृक्ष आरेख 4 संभावित परिणामों को दर्शाता है?

अतः प्रतिदर्श समष्टि

S = {HH, HT, TH, TT}



चित्र 7.6 — एक निष्पक्ष सिक्का दो बार उछालने पर संभावित परिणाम दर्शाता वृक्ष आरेख

© NCERT not to be republished

इसके अतिरिक्त, प्रत्येक परिणाम की सैद्धांतिक प्रायिकता का उल्लेख परिणाम दर्शाने वाली शाखा पर किया गया है।

$$\text{सैद्धांतिक प्रायिकता (P)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभावित परिणामों की कुल संख्या}}$$

आइए, दो बार चित आने की घटना पर विचार करें। यह परिणाम HH द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

HH की प्रायिकता $= \frac{1}{4} = 0.25$ अथवा 25% है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप एक बार चित और एक बार पट आने की प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं?

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 7.4

1. A और B फलों की दो टोकरियाँ हैं। टोकरी A में एक सेब और दो संतरे हैं। टोकरी B में एक केला और एक आम है। आप यादृच्छिक रूप से प्रत्येक टोकरी से एक फल निकालते हैं—
   (i) फलों के सभी संभावित युग्मों को दर्शाता हुआ एक वृक्ष आरेख खींचिए।
   (ii) प्रतिदर्श समष्टि को सूचीबद्ध कीजिए।
   (iii) एक सेब और एक केला निकालने की प्रायिकता क्या होगी?
2. मान लीजिए, आपके पास एक बक्सा है जिसमें 3 लाल पेन, 4 काले पेन और 2 हरे पेन हैं। आपने बक्से में बिना देखे एक पेन निकाला और वापस उसी में रख दिया। अब आपका मित्र भी इसी कार्य को दोहराता है।
   (i) पेन के रंगों के संभावित परिणाम क्या हैं? क्या आप संभावित परिणामों को दर्शाता हुआ एक वृक्ष आरेख खींच सकते हैं?
   (ii) क्या आप वृक्ष आरेख का उपयोग कर अनुमान लगा सकते हैं कि आप और आपके मित्र द्वारा एक ही रंग के पेन निकालने की प्रायिकता क्या होगी?

अंतिम प्रश्नावली

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—
   (i) असंभव घटना की प्रायिकता ______ है।
   (ii) एक यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभव परिणामों के समुच्चय को ______ कहा जाता है।

(iii) एक निश्चित ही घटित होने वाली घटना की प्रायिकता ______ है।

(iv) निष्पक्ष सिक्का उछालने पर चित आने की प्रायिकता ______ है।

2. 50 विद्यार्थियों के एक सर्वेक्षण में 15 विद्यार्थियों ने कहा कि उन्हें फुटबॉल पसंद है। फुटबॉल पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 15 है और ________ (आवृत्ति/सापेक्षिक आवृत्ति) ______ है (भिन्न अथवा दशमलव में पूर्ति कीजिए)।

3. निम्नलिखित में किस प्रयोग के समप्रायिक परिणाम हैं? व्याख्या कीजिए।

(i) एक चालक कार को चालू करने का प्रयास कर रहा है। कार चालू होती है या नहीं होती है।

(ii) निष्पक्ष सिक्का एक बार उछालना।

(iii) निष्पक्ष षट्फलकीय पासा फेंकना।

(iv) एक थैली से यादृच्छिक रूप से एक कंचा निकालना, जिसमें 3 लाल कंचे और 7 नीले कंचे हों।

(v) एक बच्चे का जन्म हुआ है। यह एक लड़का है या लड़की है।

4. दी गई सूचनाओं के आधार पर प्रतिदर्श समष्टि लिखिए और प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(i) एक ही समय पर दो सिक्कों को उछाला जाता है। कम-से-कम एक चित आने की प्रायिकता क्या है?

(ii) 10 सर्वसम पत्ते 1 से 10 तक संख्यांकित करके एक बक्से में रखे गए हैं। एक पत्ता यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है। एक सम संख्या वाले पत्ते के आने की प्रायिकता क्या है?

(iii) एक पासा एक बार फेंका जाता है। 4 से बड़ी संख्या आने की प्रायिकता क्या है?

(iv) एक थैले में 3 लाल गेंदें, 2 नीली गेंदें और 1 हरी गेंद हैं। एक गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गेंद लाल नहीं होगी?

(v) तीन सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है। ठीक दो चित आने की प्रायिकता क्या है?

5. एक थैली में 3 टॉफियाँ हैं— स्ट्रॉबेरी, नींबू और पुदीना। एक टॉफी यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है। स्ट्रॉबेरी टॉफी निकालने की प्रायिकता क्या है?

6. एक बच्चे के पास 2 कमीजें (एक लाल और एक नीला) और 3 प्रकार की पतलूनें (जींस, खाकी और शॉर्ट्स) हैं। एक कमीज और एक पतलून मिलकर बनने वाली पोषाक के सभी संभव संयोजनों को सूचीबद्ध कीजिए। अपने उत्तर को सारणी रूप में प्रस्तुत कीजिए।

© NCERT not to be republished

7. एक टायर कंपनी 1000 मामलों में प्रतिस्थापन (रिप्लेसमेंट) से पूर्व दूरियों को अभिलेखित करती है—

दूरी (किलोमीटर में)	4000 से कम	4001 से 9000	9001 से 14000	14000 से अधिक
मामलों की संख्या	20	210	325	445

यादृच्छिक चयनित टायर की आयु की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जब दूरी—

(i) 4000 किलोमीटर से कम हो।

(ii) 4000 से 14000 किलोमीटर के मध्य हो।

(iii) 14000 किलोमीटर से अधिक हो।

8. 'PEACE' शब्द के अक्षरों को पत्तों पर लिखा गया है। लीला बिना देखे एक पत्ता निकालती है—

(i) इसके P, E या C होने की प्रायिकता क्या है?

P E A C E

(ii) इसके E न होने की प्रायिकता क्या है?

*9. संयोग के एक खेल में एक तीर घूमता है (आकृति 7.7 देखिए), जो रुकने के पश्चात 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 और 8 में से किसी एक संख्या को इंगित करता है और ये सभी परिणाम समप्रायिक हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह तीर इंगित करेगा—

(i) 8?

(ii) एक विषम संख्या?

(iii) 2 से बड़ी संख्या?

(iv) 9 से छोटी संख्या?

(v) 3 का एक गुणज?

चित्र 7.7

*10. एक टोकरी में 4 लाल और 5 नीले रंग की गेंदें हैं। एक गेंद निकाली जाती है और अलग रख दी जाती है, इसके पश्चात दूसरी गेंद निकाली जाती है। संभावित परिणामों और प्रायिकता को दर्शाने के लिए एक वृक्ष आरेख खींचिए। वृक्ष आरेख का उपयोग करके निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

(i) एक लाल और उसके पश्चात एक नीले रंग की गेंद को निकालने की प्रायिकता क्या है?

(ii) 2 नीली गेंदें निकालने की प्रायिकता क्या है?

© NCERT not to be republished

*11. मैंने षट्फलकीय पासे के एक युग्म को फेंका। एक ऐसी घटना लिखिए, जिसकी प्रायिकता 0 हो और एक ऐसा परिणाम लिखिए, जिसकी प्रायिकता 1 हो।

*12. नीचे दी गई सूचना के आधार पर प्रतिदर्श समष्टि लिखिए और प्रायिकता की गणना कीजिए—

(i) दो पासे फेंके गए। इसकी क्या प्रायिकता है कि प्राप्त अंकों का योग 5 से बड़ी अभाज्य संख्या हो?

(ii) एक थैले में 4 लाल, 3 हरे और 2 नीले रंग की गेंदें हैं। दो गेंदों को बिना प्रतिस्थापन के निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों गेंदों के रंग भिन्न हैं?

(iii) तीन सिक्कों को उछाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि पहला सिक्का चित प्रदर्शित करता हो और कुल मिलाकर दो चित प्राप्त हों।

(iv) 1, 2, 3 और 4 संख्याओं को बिना पुनरावृत्ति के उपयोग करके एक 4-अंकीय संख्या बनाई गई है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह संख्या सम है?

(v) एक विद्यार्थी 3 प्रश्नों की एक बहु-विकल्पीय परीक्षा में सम्मिलित होता है, जहाँ प्रत्येक प्रश्न के 4 विकल्प (A, B, C, D) हैं और उनमें से केवल एक विकल्प सही है। इसकी क्या प्रायिकता है कि विद्यार्थी अनुमान लगाकर 2 सही उत्तर प्राप्त करे?

*13. एक बक्से में 4 गेंदें हैं जिन पर 1 से 4 तक अंक लिखे हैं। निम्नलिखित प्रयोगों के लिए वृक्ष आरेख का उपयोग करते हुए एक प्रतिदर्श समष्टि लिखिए—

(i) एक गेंद निकाली जाती है और उस पर लिखित अंक को एक कागज पर लिख लिया जाता है। तत्पश्चात गेंद को वापस बक्से में रख दिया जाता है और एक दूसरी गेंद निकाली जाती है और उस पर लिखित अंक को लिख लिया जाता है।

(ii) एक गेंद निकाली जाती है और लिख ली जाती है। पहली गेंद के बिना प्रतिस्थापन के परीक्षक दूसरी गेंद निकालता है और उसे लिख लेता है।

(iii) इन दोनों प्रतिदर्श समष्टियों के आकार क्या हैं?

*14. एक सिक्का उछालने और 1 से 6 तक संख्यांकित ताश के 6 पत्तों के समूह से एक पत्ता निकालने का प्रयोग एक साथ करने के लिए एक प्रतिदर्श समष्टि के तत्त्वों को सूचीबद्ध कीजिए।

*15. तीन सिक्कों को उछाला जाता है और चित आने की संख्या को अंकित किया जाता है। निम्नलिखित में कौन-सा समुच्चय इस प्रयोग के लिए एक प्रतिदर्श समष्टि है? अन्य समुच्चय, प्रतिदर्श समष्टि के रूप में योग्य क्यों नहीं माने जाते हैं—

(i) $\{1, 2, 3\}$

(ii) $\{0, 1, 2\}$

(iii) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

(iv) $\{0, 1, 2, 3\}$

© NCERT not to be republished

*16. मान लीजिए, आप यादृच्छिक रूप से चित्र 7.8 में दर्शाए अनुसार आयताकार क्षेत्र में रंग की एक बूँद गिराते हैं। इसकी क्या प्रायिकता होगी कि यह बूँद 1 मीटर व्यास वाले वृत्त में गिरेगी?

चित्र 7.8

सारांश

- प्रायिकता एक घटना की संभावना का मापन है।
- प्रायिकता को 0 (असंभावना की ओर संकेत है) से लेकर 1 (निश्चितता का संकेत है) के एक पैमाने पर व्यक्त किया जाता है जो किसी घटना के घटित होने की संभावना को प्रस्तुत करता है। एक घटना E की प्रायिकता का निरूपण P(E) के रूप में किया जाता है जहाँ $0 \leq P(E) \leq 1$ है।
- प्रायोगिक प्रायिकता का निर्धारण एक प्रयोग करके किया जाता है और उसकी गणना निम्नलिखित रूप में की जाती है—

  $$\text{प्रायोगिक प्रायिकता} = \frac{\text{घटना घटित होने की संख्या}}{\text{प्रयासों की कुल संख्या}}$$

- सैद्धांतिक प्रायिकता एक निष्पक्ष परिस्थिति में सभी संभावित एवं समप्रायिक परिणामों पर आधारित होती है।

  एक घटना A की सैद्धांतिक प्रायिकता—

  $$P(A) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभावित परिणामों की संख्या}}$$

- प्रतिदर्श समष्टि एक यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभावित परिणामों का समुच्चय होता है। इसे समुच्चय S = {परिणाम$_1$, परिणाम$_2$, ..., परिणाम$_n$} के रूप में प्रस्तुत किया जाता है।
- एक घटना, एक यादृच्छिक प्रयोग के किसी एक परिणाम अथवा संभावित परिणामों का समूह होती है। यह सभी संभावित परिणामों में से कुछ परिणामों को चुनने जैसा है।
- वृक्ष आरेख एक यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभावित परिणामों को सूचीबद्ध और दृश्यांकित करने में सहायता प्रदान करता है। ये यादृच्छिक प्रयोगों से संबंधित घटनाओं की प्रायिकता की गणना करने में भी हमारी सहायता करते हैं।

© NCERT not to be republished