8 अगले पद का पूर्वानुमान — अनुक्रमों और श्रेढ़ियों का अन्वेषण

0920CH08

8.1 अनुक्रम से परिचय

हम अपने चारों ओर सभी स्थानों पर विभिन्न प्रकार के प्रतिरूप अर्थात पैटर्न देखते हैं, चाहे वह प्रकृति में हो, कला में हो, संगीत में हो, वित्त में हो अथवा दैनिक जीवन के कई अन्य संदर्भों में प्रतिरूप, विश्व को समझने में और आगे क्या आएगा, यह पूर्वानुमान लगाने में सहायता करते हैं। गणित में अनुक्रम, प्रतिरूपों के विशेष प्रकार हैं, जो संख्याओं या अन्य वस्तुओं को एक विशेष क्रम में व्यवस्थित करने पर बनते हैं। अनुक्रमों को समझकर हम उन रोचक विचारों का अन्वेषण कर सकते हैं, जो संख्याओं के आगे बढ़ने, कम होने या दोहराए जाने से संबंधित होते हैं, अपितु हम इन विचारों का उपयोग वास्तविक जीवन की समस्याओं को हल करने में भी कर सकते हैं।

इस अध्याय में हम संख्याओं के अनुक्रमों में प्रतिरूपों का अन्वेषण करेंगे। तत्पश्चात हम उन नियमों का पता लगाएँगे, जो हमें अनुक्रम की आगामी संख्याओं का पूर्वानुमान लगाने में सहायता करते हैं। आइए, हम कुछ संख्याओं के अनुक्रम से प्रारंभ करते हैं, जिन्हें आप कक्षा 6, 7 और 8 में देख चुके हैं।

1, 2, 3, 4, 5, 6, …	(प्राकृत संख्याएँ)
1, 3, 5, 7, 9, 11, ...	(विषम संख्याएँ)
1, 3, 6, 10, 15, 21, ...	(त्रिभुजाकार संख्याएँ)
1, 4, 9, 16, 25, 36, ...	(वर्ग संख्याएँ)

तीन बिंदु ... यह दर्शाते हैं कि अनुक्रम अपरिमित रूप से चलता रहता है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप ऊपर दिए गए अनुक्रमों में प्रत्येक अनुक्रम में प्रतिरूप की व्याख्या कर सकते हैं? क्या आप इन अनुक्रमों में अग्रिम कुछ संख्याओं का पूर्वानुमान लगा सकते हैं?

आइए, आगे बढ़ने से पहले **अनुक्रम** को संख्याओं की एक क्रमिक सूची के रूप में परिभाषित करते हैं, जहाँ प्रत्येक संख्या अनुक्रम का एक **पद** है। इस प्रकार वर्ग संखाओं के अनुक्रम में 1 पहला पद है, 4 दूसरा पद है, 25 पाँचवाँ पद है एवं इसी प्रकार आगे भी पद हैं। इसके अतिरिक्त, अनुक्रम परिमित या अपरिमित हो सकते हैं। ऊपर दिए गए अनुक्रम अपरिमित अनुक्रम हैं, किंतु अनुक्रम 6, 12,

not to be republished © NCERT

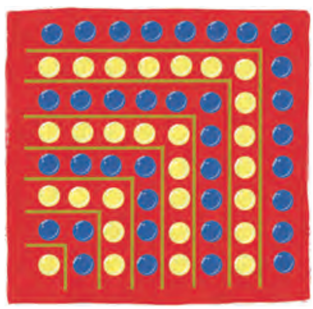
24, 48, 96 एक परिमित अनुक्रम हैं, जिसमें 5 पद हैं। क्या आप अन्य परिमित अनुक्रमों पर विचार कर सकते हैं, जिन्हें आप अपने दैनिक जीवन में देखते हैं?

जैसा कि आप जानते हैं कि प्राकृत संख्याओं के अनुक्रम में प्रत्येक संख्या (या पद) पिछली संख्या से एक अधिक है। विषम संख्याओं के अनुक्रम में दो क्रमागत पदों के मध्य 2 का अंतर है। त्रिभुजाकार संख्याओं के अनुक्रम में क्रमागत पदों (पहले 6 पदों में) के मध्य अंतर 2, 3, 4, 5 और 6 है। हम त्रिभुजाकार संख्याओं को प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में लिख सकते हैं, जैसे $1 = 1$, $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ और इसी प्रकार आगे भी इन्हें लिखा जा सकता है। इस प्रकार त्रिभुजाकार संख्याओं के अनुक्रम में प्रत्येक पद, उस पद-संख्या तक की सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल है। उदाहरण के लिए, 15 पाँचवीं त्रिभुजाकार संख्या है, जो $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ के समान है। इसे चित्र 8.1 में आरेख द्वारा प्रदर्शित किया गया है, जिसमें प्रत्येक त्रिभुजाकार संख्या को बिंदुओं की त्रिभुजाकार व्यवस्था द्वारा प्रदर्शित किया गया है। क्या आप इस अनुक्रम के आगामी दो पदों के लिए प्रतिरूप की रचना कर सकते हैं?

चित्र 8.1 — प्रथम पाँच त्रिभुजाकार संख्याएँ

आइए, अब हम वर्ग संख्याओं के अनुक्रम 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... पर ध्यान देते हैं। ध्यान दीजिए कि क्रमागत पदों (प्रथम छह पदों में) के मध्य अंतर 3, 5, 7, 9 और 11 हैं। साथ ही, $1 = 1$, $4 = 1 + 3$, $9 = 1 + 3 + 5$, $16 = 1 + 3 + 5 + 7$ है और इसी प्रकार संख्याएँ आगे भी हैं। वर्ग संख्याओं के अनुक्रम में प्रत्येक पद, उस पद-संख्या के बराबर क्रमिक विषम संख्याओं (1 से प्रारंभ करते हुए) का योगफल है।

विषम संख्याओं और वर्ग संख्याओं के मध्य इस रोचक संबंध को चित्र 8.2 में आरेख द्वारा प्रदर्शित किया गया है। क्या आप इस संबंध की व्याख्या कर सकते हैं? आप कक्षा 6 की पाठ्यपुस्तक के अध्याय 1 की सहायता से इनमें से कुछ विचारों का स्मरण कर सकते हैं।



चित्र 8.2 — वर्ग संख्याएँ और विषम संख्याएँ

© NCERT not to be republished

प्रश्न — अनुक्रम 1, 4, 7, 10, 13, ... पर विचार कीजिए। क्या आप आगामी चार पदों का पूर्वानुमान लगा सकते हैं? क्या आप इस अनुक्रम में दिए गए पद तक आने वाले सभी पदों का योग करने पर प्राप्त अनुक्रम के पहले 10 पद बता सकते हैं?
(**संकेत** — प्रथम पद 1 है। दूसरा पद 1 + 4 = 5 है, तीसरा पद 1 + 4 + 7 = 12 है और आगे भी इसी प्रकार पद प्राप्त किए जा सकते हैं।)

कुछ अनुक्रमों में (अब तक व्याख्या किए गए अनुक्रमों के समान) पद किसी निश्चित प्रतिरूप, सूत्र या क्रम का पालन करते हैं। इन नियमों की व्याख्या करने में कोई सरल संकेतक सहायक हो सकता है, जो अनुक्रम की व्याख्या करता हो। हम किसी अनुक्रम के पहले पद को प्रदर्शित करने के लिए t_1, दूसरे पद को प्रदर्शित करने के लिए t_2 और इसी प्रकार के संकेतक आगे भी उपयोग कर सकते हैं। इस संकेतक में अधोलिखित संख्या, पद-संख्या के अनुरूप होती है। इस प्रकार, विषम संख्याओं के अनुक्रम के लिए $t_1 = 1, t_2 = 3, t_3 = 5, t_4 = 7$ और इसी प्रकार पद चलते रहते हैं। यह संकेतक पद की स्थिति को वास्तविक पद से मिलाने में सहायता करता है। उदाहरण के लिए $t_4 = 7$ बताता है कि चौथी स्थिति पर पद 7 है। हमें एक ही समय पर एक से अधिक अनुक्रम के विषय में चर्चा करने की आवश्यकता हो सकती है। इसके लिए हम अंग्रेजी के विभिन्न वर्णों का उपयोग कर सकते हैं। इस प्रकार, अनुक्रम के लिए हम एक $t_1, t_2, t_3, ...$, आगामी अनुक्रम के लिए $s_1, s_2, s_3, ...$ और तीसरे अनुक्रम के लिए $u_1, u_2, u_3, ...$ और इसी प्रकार आगे भी संकेतकों का उपयोग कर सकते हैं।

प्रश्न — क्या आप त्रिभुजाकार संख्याओं के अनुक्रम हेतु t_5, t_6, t_7 और t_8 लिख सकते हैं?

अनुक्रम अनेक प्रकार के हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, पद भिन्न या ऋणात्मक पूर्णांक हो सकते हैं। अभी तक हमने जिन अनुक्रमों पर चर्चा की है, उनमें पद बढ़ते हुए क्रम में हैं, किंतु ऐसे अनुक्रम जैसे कि $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$ भी हो सकते हैं, जहाँ $t_1 = 1$ है और आगे आने वाले पद इकाई भिन्न हैं, जो घटते क्रम में हैं। हम ऐसे अनुक्रम भी देख सकते हैं, जैसे कि –7, –3, 1, 5, 9, ... जहाँ $S_1 = -7$ है और क्रमागत पदों के मध्य 4 का अंतर है। ध्यान दीजिए कि जब हम संकेतक t_n का उपयोग किसी पद को बताने के लिए करते हैं, तो n सदैव एक ऋणेतर पूर्णांक है किंतु पद, ऋणात्मक संख्या या वास्तव में कोई भी वास्तविक संख्या हो सकता है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप अन्य प्रकार के अनुक्रम के विषय में विचार कर सकते हैं? पाँच विभिन्न प्रकार के अनुक्रम की सूची बनाइए और अपने मित्रों के साथ अनुक्रम के गुणों पर चर्चा कीजिए।

8.2 अनुक्रम के लिए व्यापक सूत्र

संकेतक t_n (या s_n या u_n) का उपयोग करते हुए हम किसी अनुक्रम की nवीं स्थिति पर स्थित पद अर्थात nवें पद के लिए एक व्यापक सूत्र लिख सकते हैं। **व्यापक सूत्र** से पद का मान ज्ञात करने के लिए पद की स्थिति संख्या n का उपयोग किया जाता है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 1 — व्यंजक $u_n = 2n - 1$ पर विचार कीजिए। यह व्यंजक बताता है कि अनुक्रम का nवाँ पद $2n - 1$ सूत्र द्वारा दिया जाता है। जब हम व्यंजक $2n - 1$ में n को 1, 2, 3, ... से विस्थापित करते हैं, तो हमें $u_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$, $u_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$, $u_3 = 2 \times 3 - 1 = 5$ आदि प्राप्त होते हैं।

इस प्रकार, $u_n = 2n - 1$ विषम संख्याओं के अनुक्रम के nवें पद के लिए व्यापक सूत्र है।

सोचिए और विचार कीजिए

किसी अनुक्रम के nवें पद हेतु व्यापक सूत्र होना क्यों उपयोगी है?

व्यापक सूत्र का उपयोग करते हुए, हम अनुक्रम के 20वें पद, 53वें पद, 300वें पद या अनुक्रम के किसी भी पद का मान, सूत्र में n के उचित मान को विस्थापित करके प्राप्त कर सकते हैं। यदि हमारे पास व्यापक सूत्र होता है तो हम अनुक्रम के किसी भी पद का मान, उस पद से पिछले पदों का मान ज्ञात किए बिना ही जान सकते हैं।

प्रश्न — सूत्र $u_n = 2n - 1$ का उपयोग करते हुए, विषम संख्या अनुक्रम के 53वें, 108वें तथा 1170वें पद को ज्ञात कीजिए?

व्यापक सूत्र अन्य प्रकार से भी उपयोगी है। हम इस सूत्र का उपयोग यह जाँचने के लिए कर सकते हैं कि क्या कोई विशेष संख्या अनुक्रम का पद है या नहीं और साथ ही उस पद की स्थिति भी ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, विषम संख्या 137 पर विचार कीजिए। यह ज्ञात करने के लिए कि विषम संख्या अनुक्रम में यह संख्या कौन-सी स्थिति पर है, हमें समीकरण $u_n = 137$ को हल करना होगा। इसका अर्थ — $2n - 1 = 137$ या $n = 69$ है। इस प्रकार, 137 विषम संख्या अनुक्रम का 69वाँ पद है।

उदाहरण 2 — एक अन्य उदाहरण में उस अनुक्रम पर विचार कीजिए, जो व्यापक सूत्र $s_n = 5n - 2$ के द्वारा बनाया जाता है। क्या आप इस अनुक्रम के प्रथम 6 पद लिख सकते हैं? इस अनुक्रम का 100वाँ पद क्या है? इस अनुक्रम का 1000वाँ पद क्या है?

आइए, जाँच करते हैं कि क्या संख्याएँ 308 और 473 इस अनुक्रम के पद हैं।

हम $s_n = 308$ को हल करते हैं, जो $5n - 2 = 308$ है। इससे $5n = 310$ या $n = 62$ प्राप्त होता है। इस प्रकार 308, इस अनुक्रम का 62वाँ पद है। इसी प्रकार, $5n - 2 = 471$ को हल करने पर $5n = 473$, $n = 94.6$ प्राप्त होता है। चूँकि 94.6 एक प्राकृत संख्या नहीं है, अत: हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि 471 इस अनुक्रम का पद नहीं है। क्या आप बता सकते हैं कि n को प्राकृत संख्या क्यों होना चाहिए?

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप वर्ग संख्याओं के अनुक्रम के nवें पद को प्रदर्शित करने वाला सूत्र ज्ञात कर सकते हैं?

प्रारंभिक दस अभाज्य संख्याओं का अनुक्रम — 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 है। क्या आप इस अनुक्रम में कोई प्रतिरूप देखते हैं? क्या आप किसी सूत्र पर विचार कर सकते हैं, जिससे अगली कुछ अभाज्य संख्याओं का पूर्वानुमान लगाया जा सके?

© NCERT not to be republished

प्रश्न — व्यंजक $t_n = 3n - 7$ पर विचार कीजिए।

(i) इस अनुक्रम का पहला, दूसरा, तीसरा, 12वाँ, 18वाँ और 50वाँ पद ज्ञात कीजिए।

(ii) अनुक्रम का कौन-सा पद 332 है?

(iii) क्या 557 इस अनुक्रम का कोई पद है? क्यों या क्यों नहीं?

8.3 अनुक्रम के लिए पुनरावर्ती सूत्र

अब तक हमने किसी अनुक्रम के nवें पद के लिए व्यापक सूत्र के रूप में n के पदों में एक सूत्र का उपयोग किया है। अनुक्रम के लिए सूत्र लिखने के अन्य प्रकार भी हैं। अनुक्रम 1, 4, 7, 10, 13, ... पर विचार कीजिए। इसका nवाँ पद $t_n = 3n - 2$ है। (इसे आप स्वयं ही जाँचिए।) ध्यान दीजिए कि प्रत्येक पद अपने पूर्व पद से 3 अधिक है। $t_2 = t_1 + 3$, $t_3 = t_2 + 3$, $t_4 = t_3 + 3$ और इसी प्रकार पद आगे भी हैं। व्यापक रूप में हम कह सकते हैं कि $t_n = t_{n-1} + 3$, जहाँ $n \geq 2$ है अथवा हम अनुक्रम की व्याख्या $t_1 = 1, t_n = t_{n-1} + 3$ के रूप में भी कर सकते हैं, जहाँ n का मान 2, 3, 4, ... हो सकता है। इस प्रकार किसी अनुक्रम के पदों को उनसे पहले आए पदों से संबद्ध करते हुए अनुक्रम की व्याख्या करना **पुनरावर्ती सूत्र** कहलाता है। यदि आपको अनुक्रम के पूर्व पद ज्ञात हों तो इस सूत्र का उपयोग करके आप आगामी पद ज्ञात कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि पुनरावर्ती सूत्र का उपयोग करके अगले पद को ज्ञात करने के लिए हमें अनुक्रम के पूर्व पद ज्ञात होने चाहिए।

उदाहरण 3 — नीचे दिए गए अनुक्रम के प्रथम चार पद पुनरावर्ती सूत्र द्वारा ज्ञात कीजिए।

$u_1 = 1, u_n = 2u_{n-1} + 3$, जब $n \geq 2$ हो। क्या 133 इस अनुक्रम का कोई पद है?

हम उत्तरोत्तर रूप से n के मान 2, 3, 4 आदि विस्थापित करते जाएँगे और प्रत्येक पद के मान की गणना करेंगे।

$$u_2 = 2u_1 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5$$
$$u_3 = 2u_2 + 3 = 2 \times 5 + 3 = 13$$
$$u_4 = 2u_3 + 3 = 2 \times 13 + 3 = 29$$

इस प्रकार, अनुक्रम के प्रथम चार पद 1, 5, 13, 29 हैं। अनुवर्ती पदों की गणना करते हुए, हम जाँच सकते हैं कि क्या 133 इस अनुक्रम का कोई पद है।

उदाहरण 4 — नीचे दिए गए अनुक्रम के प्रथम चार पद पुनरावर्ती सूत्र द्वारा ज्ञात कीजिए। $s_1 = 3, s_n = s_{n-1}(s_{n-1} - 1)$, जहाँ $n \geq 2$ है।

n को 2, 3, 4 आदि से विस्थापित कर एवं गणना करके प्रत्येक पद का मान निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात किया जाता है—

$$s_2 = s_1(s_1 - 1) = 3 \times (3 - 1) = 3 \times 2 = 6$$
$$s_3 = s_2(s_2 - 1) = 6 \times (6 - 1) = 6 \times 5 = 30$$
$$s_4 = s_3(s_3 - 1) = 30 \times (30 - 1) = 30 \times 29 = 870$$

इस प्रकार, अनुक्रम के प्रथम चार पद 3, 6, 30, 870 हैं।

© NCERT not to be republished

विरहांक-फिबोनाची अनुक्रम

किसी भी पुनरावर्ती सूत्र या नियम में केवल एक ही पूर्व पद सम्मिलित नहीं होता है, इसमें दो या दो से अधिक पूर्व पद सम्मिलित हो सकते हैं।

ऐसे अनुक्रम का सबसे प्रसिद्ध उदाहरण $V_1, V_2, V_3, \ldots$ है, जहाँ $V_1 = 1, V_2 = 2$ और $V_n = V_{n-1} + V_{n-2}$ है, जब $n \geq 3$ हो। गणना करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$V_3 = V_2 + V_1 = 2 + 1 = 3$$
$$V_4 = V_3 + V_2 = 3 + 2 = 5$$
$$V_5 = V_4 + V_3 = 5 + 3 = 8$$

अत: अनुक्रम प्राप्त होता है—

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

जिसमें प्रत्येक पद, पूर्व के दो पदों का योग करने पर प्राप्त होता है।

क्या आप इस अनुक्रम के आगामी दो पद लिख सकते हैं?

क्या आप विगत कक्षाओं में अध्ययन किए इस अनुक्रम को पहचानते हैं? बिल्कुल सही, यह विरहांक-फिबोनाची अनुक्रम है! इसे सर्वप्रथम आचार्य कवि विरहांक द्वारा सातवीं शताब्दी में अपनी कृति *वृत्तजातिसमुच्चय* में लिखा गया था। उन्होंने इसका अन्वेषण प्राकृत मीटर और कविता के संदर्भ में किया था। इसका विस्तृत अध्ययन भाषाविद-गणितज्ञ गोपाल (लगभग 1135 सामान्य संवत) और हेमचंद्र (लगभग 1150 सामान्य संवत) द्वारा किया गया। आगे चलकर इस अनुक्रम का अध्ययन इटली के गणितज्ञ फिबोनाची (लगभग 1200 सामान्य संवत) द्वारा भी किया गया।

विरहांक अनुक्रम संपूर्ण गणित एवं विज्ञान विषयों में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। हम आगामी कक्षाओं में पुन: इस अनुक्रम को कई बार देखेंगे।

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 8.1

1. उस अनुक्रम के प्रथम पाँच पदों को ज्ञात कीजिए, जिसका nवाँ पद निम्नलिखित प्रकार से दिया गया है—

   (i) $t_n = 3n - 4$ (ii) $t_n = 2 - 5n$ (iii) $t_n = n^2 - 2n + 3$ जहाँ $n \geq 1$ हो।

2. अनुक्रम $t_n = 5n - 3$ हो, जबकि $n \geq 1$ के 10वें एवं 15वें पदों को ज्ञात कीजिए।
3. निर्धारित कीजिए कि क्या 97 और 172 अनुक्रम $t_n = 5n - 3$ के पद हैं, जबकि $n \geq 1$ है।
4. अनुक्रम $t_n = 5n - 3$ जहाँ $n \geq 1$ है, में कौन-सा पद 607 है?
5. एक अनुक्रम $t_1 = -5, t_{n+1} = t_n + 3$ पुनरावर्ती सूत्र द्वारा दर्शाया जाता है, जब $n \geq 1$ हो। अनुक्रम के प्रथम पाँच पद ज्ञात कीजिए। क्या इस अनुक्रम का एक पद 52 है? यदि हाँ, तो यह अनुक्रम का कौन-सा पद है?

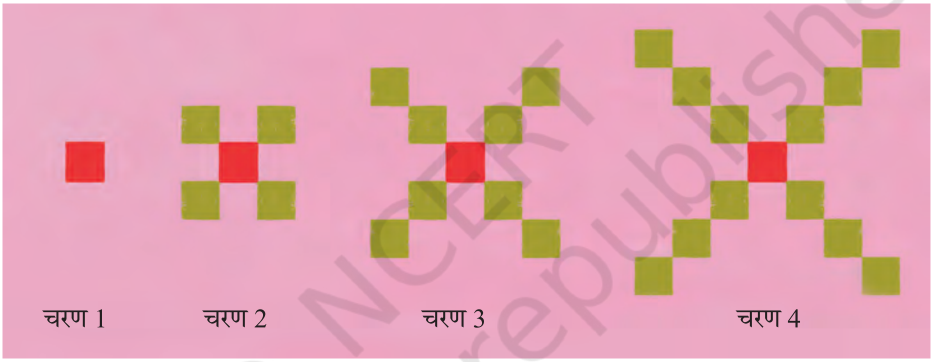
6. मान लीजिए, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 4$ और $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ हो, जबकि $n \geq 4$ है। T_4, T_5, T_6, T_7, और T_8 ज्ञात कीजिए।

8.4 समानांतर श्रेढ़ियाँ

अब तक हमने अध्ययन किया कि अनुक्रम, संख्याओं की ऐसी क्रमिक सूची है, जो किसी विशेष सूत्र का पालन करती है। यद्यपि, ऐसे अनुक्रम भी हो सकते हैं, जैसे कि अभाज्य संख्याओं का अनुक्रम, जिसके सूत्र में कोई नियमितता (समरूपता) नहीं होती।

हम इस अनुभाग में, एक विशेष प्रकार के अनुक्रमों का अन्वेषण करेंगे, जो **समानांतर श्रेढ़ी** कहलाते हैं।

आइए, चित्र 8.3 में दिए गए वर्गों के बढ़ते हुए प्रतिरूप को देखते हैं। चित्र में प्रतिरूप के प्रथम चार चरणों को दर्शाया गया है।



चित्र 8.3 — वर्गों का बढ़ता हुआ प्रतिरूप

यदि हम प्रत्येक चरण में छोटे वर्गों की संख्या गिनते हैं तो हमें अनुक्रम 1, 5, 9, 13 प्राप्त होता है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप अनुक्रम के 5वें और 6वें चरण में वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं? क्या आप चरण 10, 11 और 12 में वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं? क्या आप चरण 20 में वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं? क्या आप किसी भी चरण में वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं?

हम देखते हैं कि प्रत्येक चरण में, पिछले चरण के प्रतिरूप के कोने के बिंदुओं से 4 वर्ग जुड़ जाते हैं। आगामी चरणों में वर्गों की संख्या को इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$1,\ 1 + 4,\ 1 + 4 + 4,\ 1 + 4 + 4 + 4,\ \ldots$$

© NCERT not to be republished

इसे पुन: इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$1, 1 + 1 \times 4, 1 + 2 \times 4, 1 + 3 \times 4, \ldots$$

यदि हम इन व्यंजकों को किसी अनुक्रम के पदों की तरह मानते हैं, तो हमें प्राप्त होता है—

$$t_1 = 1, t_2 = 1 + 1 \times 4, t_3 = 1 + 2 \times 4, t_4 = 1 + 3 \times 4$$

और इसी प्रकार आगे भी पद चलते रहते हैं। अत: हम nवें पद को $t_n = 1 + (n - 1) \times 4$ के रूप में लिख सकते हैं, जिसे हल करने पर $t_n = 4n - 3$ प्राप्त होता है।

चित्र 8.3 में वर्गों की संख्या को प्रदर्शित करने वाले अनुक्रम में प्रारंभिक छह पद 1, 5, 9, 13, 17, 21 हैं। हम देखते हैं कि दो क्रमिक पदों के बीच अंतर अचर मान 4 है। ऐसे अनुक्रम जिनमें दो क्रमिक पदों के बीच अंतर अचर हो समानांतर श्रेढ़ियाँ (APs) कहलाते हैं।

सोचिए और विचार कीजिए

इस अध्याय में अब तक हमने जिन अनुक्रमों पर चर्चा की है, उन पर विचार कीजिए। उनमें से कौन-सी समानांतर श्रेढ़ियाँ हैं और कौन-सी नही हैं? क्या आप अपने कथन को सिद्ध कर सकते हैं?

ध्यान दीजिए कि ऊपर दिए गए अनुक्रम के nवें पद $t_n = 1 + (n - 1) \times 4$ में 1 अनुक्रम का प्रथम पद है और 4 'सार्व अंतर' है। इसी प्रकार, अनुक्रम 1, 4, 7, 10, ... का nवाँ पद $t_n = 1 + (n - 1) \times 3$ है, जिसमें 1 प्रथम पद है और 3 सार्व अंतर है। अनुक्रम 11, 7, 3, –1, –5, ... में संख्याओं में 4 की कमी होती जाती है। यह भी एक समानांतर श्रेढ़ी है, जिसमें प्रथम पद 11 है और सार्व अंतर – 4 है।

सामान्यत: किसी समानांतर श्रेढ़ी (AP) की व्याख्या इस प्रकार की जा सकती है—

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots, a + (n - 1) \times d$$

जहाँ 'a' **प्रथम पद** है और 'd' **सार्व अंतर** है। इस प्रकार, $t_n = a + (n - 1) \times d$, a और d के स्थिर मान के लिए समानांतर श्रेणी के nवें पद के लिए व्यंजक है।

8.4.1 समानांतर श्रेढ़ी का दृश्यांकन

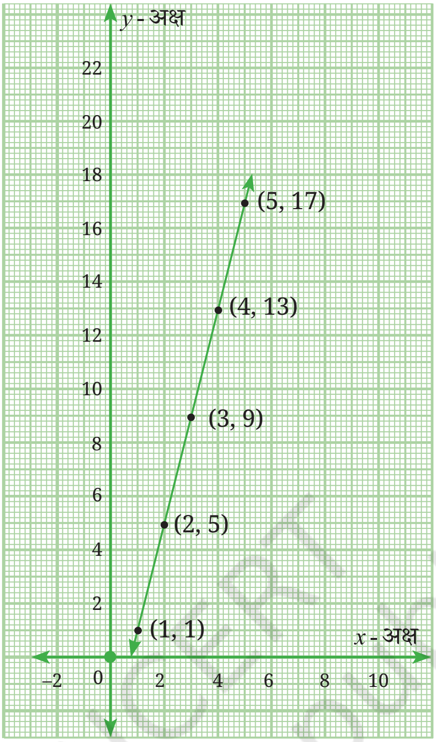
आइए, चित्र 8.3 में वर्गों के बढ़ते प्रतिरूप पर वापस चलते हैं और प्रत्येक चरण में छोटे वर्गों की संख्या को प्रदर्शित करने वाली तालिका तैयार करते हैं।

चरण संख्या	1	2	3	4	5	...	n
वर्गों की संख्या	1	5	9	13	17	...	$4n - 3$

आइए, ऊपर दी गई तालिका में दी हुई जानकारी का उपयोग करते हुए क्रमिक युग्म (x, y) बनाते हैं, जिसमें x चरण संख्या को और y संगत वर्गों की संख्या को प्रदर्शित करता है। जब हम तालिका से प्राप्त क्रमिक युग्मों (1, 1), (2, 5), (3, 9), (4, 13), (5, 17) को आलेख पत्रक पर प्रदर्शित करते हैं

© NCERT not to be republished

तो हम देखते हैं कि वे एक सरल रेखा पर स्थित हैं। इसे चित्र 8.4 में दर्शाया गया है।



चित्र 8.4 — रैखिक प्रतिरूप द्वारा प्रदर्शित वर्गों का बढ़ता प्रतिरूप

प्रश्न — सत्यापित कीजिए कि नीचे दिए गए अनुक्रम समानांतर श्रेढ़ियाँ हैं और उनके nवें पद लिखिए। इन अनुक्रमों से प्राप्त क्रमिक युग्मों को आलेख पत्रक पर प्रदर्शित करने पर आप क्या अवलोकन करते हैं?

(i) 2, 5, 8, 11, … (ii) –5, –1, 3, 7, …

प्रश्न — सूत्र $t_n = a + (n - 1) \times d$ का उपयोग करते हुए नीचे दी गई समानांतर श्रेढ़ियों के nवें पद ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \ldots$ (ii) 1.5, 3.5, 5.5, 7.5, …

ध्यान दीजिए कि $t_n = a + (n - 1) \times d$, किसी समानांतर श्रेढ़ी के nवें पद को ज्ञात करने के लिए व्यापक सूत्र है। क्या हम पुनरावर्ती सूत्र को भी ज्ञात कर सकते हैं? हाँ, यह सूत्र $t_1 = a$, $t_n = t_{n-1} + d$ है जबकि $n \geq 2$ है।

समानांतर श्रेढ़ी 1, 5, 9, 13, 17, ... पर पुन: विचार कीजिए। चूँकि प्रत्येक पद पूर्व पद से 4 अधिक है, तो इस अनुक्रम को लिखने की अन्य विधि है $t_1 = 1$, $t_n = t_{n-1} + 4$ जहाँ $n \geq 2$ है। आप स्वयं ही सत्यापित कीजिए कि इस पुनरावर्ती सूत्र से अनुक्रम के पद प्राप्त होते हैं।

प्रश्न — पूर्व के प्रश्नों में समानांतर श्रेढ़ियों के लिए पुनरावर्ती सूत्र ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 5 — एक व्यक्ति शहर में घूमने के लिए एक टैक्सी किराए पर लेता है। टैक्सी कंपनी एक निश्चित आरक्षण शुल्क (बुकिंग) ₹200 लेती है और ₹40 प्रत्येक किलोमीटर (कि.मी.) यात्रा के लिए लेती है। आइए 1 कि.मी., 2 कि.मी., 3 कि.मी., आदि यात्रा के लिए कुल किराए को प्रदर्शित करने वाला अनुक्रम लिखते हैं। यदि वह व्यक्ति 10 कि.मी. लंबी यात्रा करता है तो कुल किराया कितना होगा?

चूँकि निर्धारित बुकिंग राशि ₹200 है, तो 1 कि.मी.की यात्रा के बाद किराया ₹200 + ₹40 = ₹240 होगा, 2 कि.मी.की यात्रा के बाद किराया ₹200 + ₹80 = ₹280 होगा और 3 कि.मी.की यात्रा के बाद किराया ₹200 + ₹120 = ₹320 होगा। अनुक्रम 240, 280, 320, ... एक समानांतर श्रेढ़ी है जिसमें प्रथम पद 240 है और सार्व अंतर 40 है। अनुक्रम का nवाँ पद $240 + (n - 1) \times 40 = 240 + 40n - 40 = 200 + 40n$ है, जहाँ n कि.मी.में तय की गई यात्रा को प्रदर्शित करता है।

8.5 आरंभिक *n* प्राकृत संख्याओं का योग

इस अनुभाग में, हम प्रथम n प्राकृत संख्याओं के योग के लिए एक सरल किंतु महत्वपूर्ण सूत्र का निगमन करेंगे। इसे प्रारंभ करने के लिए, क्या आप प्रथम दस प्राकृत संख्याओं का योगफल उनका वास्तव में योग किए बिना ज्ञात कर सकते हैं।

आइए, एक विशिष्ट दृष्टिकोण से प्रयास करते हैं। मान लीजिए S प्रथम दस प्राकृत संख्याओं के योगफल को प्रदर्शित करता है। इस प्रकार, S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 है। हम इसे S = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 भी लिख सकते हैं। यदि हम इन दोनों समीकरणों को एक के नीचे एक लिखते हैं तो हम कुछ रोचक देखते हैं।

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$
$$S = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

दोनों समीकरणों में संगत संख्याओं के प्रत्येक युग्म, 1 + 10, 2 + 9, 3 + 8, ..., 10 + 1 में योगफल 11 प्राप्त होता है।

इस प्रकार, S के दोनों समीकरणों का योग करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$2S = 11 + 11 + 11 + ... + 11 \text{ (अर्थात, 11 का 10 बार योग)}$$

इससे हमे $2S = 110$ या S = 55 प्राप्त होता है। प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं का योगफल वास्तव में 55 है।

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

क्या इसी विधि द्वारा $1 + 2 + 3 + ... + 100$ का योगफल ज्ञात किया जा सकता है?

इस विधि द्वारा संख्याओं को 1 से किसी संख्या तक योग के रूप में लिखना, फिर इस योग को व्युत्क्रम रूप (पीछे से आगे) में लिखना, फिर इन दोनों व्यंजकों का योग करना; इसके द्वारा n के किसी भी मान के लिए प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात करने का सूत्र निकाला (प्राप्त किया) जा सकता है।

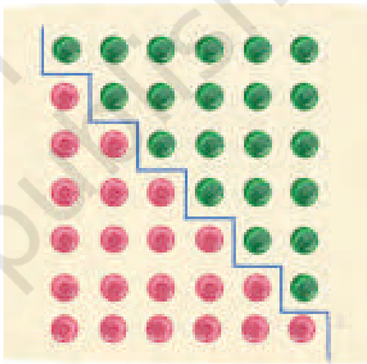
मान लीजिए, $S = 1 + 2 + ... + n$

तब $S = n + (n - 1) + ... + 1$

अत: $2S = n(n + 1)$ है। हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $S = \frac{n(n+1)}{2}$ है।

हम इस तर्क पर चित्रात्मक रूप से भी विचार कर सकते हैं।

चित्र 8.5 में आरेख $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ योग के लिए विधि को प्रदर्शित करता है। ध्यान दीजिए कि चित्र में घुमावदार विभाजन के ऊपर और नीचे वृत्तों के दो समूह सन्निहित हैं, जो योग $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ को प्रदर्शित करते हैं। कुल वृत्त 7×6 विमाओं वाली आयताकार व्यवस्था बनाते हैं।



$2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 7 \times 6$

चित्र 8.5

इस प्रकार, चित्र 8.5, $2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 7 \times 6$ तथ्य को दर्शाता है।

इसे भी योगफल ज्ञात करने के लिए विस्तारित किया जा सकता है।

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

जो है, $2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 10 \times 11$

सामान्य रूप में, $2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n) = n \times (n + 1)$

इस प्रकार, $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

यदि हम प्रथम n प्राकृत संख्याओं के योगफल को दर्शाने के लिए संकेतक S_n का उपयोग करते हैं, तब $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ है।

© NCERT not to be republished

इस परिणाम का प्रथम ज्ञात लिखित उल्लेख आर्यभट्ट के ग्रंथ *आर्यभटीयम* के अध्याय 2 के छंद 19 में देखा जा सकता है। यह छंद योग की गणना करने की दो विधियाँ बताता है जिसमें दूसरा भाग बताता है कि योग की गणना पहले और अंतिम पदों के योग को दो से विभाजित करके (औसत) और पदों की संख्या से गुणा करके की जा सकती है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप ऊपर दिए गए सूत्र का उपयोग S_{20}, S_{50} या S_{1000} ज्ञात करने के लिए कर सकते हैं?

साथ ही, इस सूत्र का उपयोग क्रमागत संख्याओं का योगफल ज्ञात करने में किया जा सकता है जैसे कि 25 + 26 + 27 + ... + 58 का योगफल ज्ञात करने में।

ध्यान दीजिए कि 25 + 26 + 27 + ... + 58 = (1 + 2 + 3 + ... + 58) – (1 + 2 + 3 + ... 24)

$$= S_{58} - S_{24} = \frac{58 \times 59}{2} - \frac{24 \times 25}{2} = 29 \times 59 - 12 \times 25 = 1711 - 300 = 1411.$$

सोचिए और विचार कीजिए

आइए, त्रिभुजाकार संख्याओं 1, 3, 6, 10, 15, ... के अनुक्रम t_n पर पुन: विचार करते हैं, जिसे चित्र 8.1 में दर्शाया गया है। ध्यान दीजिए कि इस अनुक्रम का nवाँ पद, प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग है।

इस प्रकार $t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ है।

क्या आप इस सूत्र का उपयोग 10वीं, 17वीं और 80वीं त्रिभुजाकार संख्याएँ प्राप्त करने में कर सकते हैं?

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 8.2

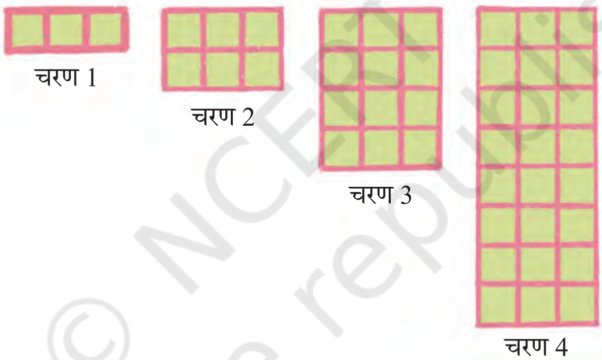
1. समानांतर श्रेढ़ी 3, 8, 13, 18, ... के 10वें और 26वें पद ज्ञात कीजिए।
2. समानांतर श्रेढ़ी 21, 18, 15, ... का कौन-सा पद – 81 है? साथ ही क्या 0 इस समानांतर श्रेढ़ी का एक पद है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
3. समानांतर श्रेढ़ी 11, 8, 5, 2, ... का nवाँ पद ज्ञात कीजिए। इस श्रेढ़ी के लिए पुनरावर्ती सूत्र लिखिए।
4. एक समानांतर श्रेढ़ी में 50 पद हैं यदि श्रेढ़ी का तीसरा पद 12 और अंतिम पद 106 है तो इसका 29वाँ पद ज्ञात कीजिए।

   (**संकेत** — यदि 'a' प्रथम पद हो तथा 'd' सार्व अंतर हो, तब हमें दो समीकरण $a + 2d = 12$ और $a + 49d = 106$ प्राप्त होता है। रैखिक समीकरणों के इस युग्म को 'a' तथा 'd' के लिए हल कीजिए)।

5. कितनी 2-अंकीय संख्याएँ 3 से विभाज्य हैं? इन सभी 2-अंकीय संख्याओं का योगफल क्या है?
6. हरीश ने कोई कार्य (नौकरी) ₹5,00,000 वार्षिक आय से प्रारंभ की और प्रतिवर्ष ₹20,000 वेतन-वृद्धि के रूप में प्राप्त किए। कितने वर्षों के बाद उसकी आमदनी ₹7,00,000 हुई होगी?
7. एक बच्चा कंचों को पंक्तियों में इस प्रकार व्यवस्थित करता है कि पहली पंक्ति में 1 कंचा है, दूसरी पंक्ति में 2 कंचे हैं, तीसरी पंक्ति में 3 कंचे हैं तथा इसी प्रकार से 25वीं पंक्ति तक कंचे रखे गए हैं। बच्चा इनमे में कुल कितने कंचों का उपयोग करता है?

8.6 गुणोत्तर श्रेढ़ियाँ

इस अनुभाग में, हम एक अन्य विशेष प्रकार के अनुक्रम का अन्वेषण करेंगे, जो **गुणोत्तर श्रेढ़ी** कहलाता है। चित्र 8.6 में प्रदर्शित वर्गों के बढ़ते प्रतिरूप पर विचार कीजिए। चित्र में प्रतिरूप के प्रथम चार चरण प्रदर्शित किए गए हैं।



चित्र 8.6 — वर्गों का बढ़ता हुआ प्रतिरूप

यदि हम प्रतिरूप के चार चरणों में हरे वर्गों की कुल संख्या गिनते हैं, तो हमें अनुक्रम 3, 6, 12, 24 प्राप्त होता है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप प्रतिरूप के चरण 5 और 6 में वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं? क्या आप चरण 10, 11 और 12 में वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं? क्या आप चरण 20 में वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं? ऊपर दिया गया प्रतिरूप चित्र 8.3 के बढ़ते प्रतिरूप से किस प्रकार भिन्न है?

हम देखते हैं कि प्रत्येक चरण में, वर्गों की संख्या पिछले चरण में वर्गों की संख्या की दोगुनी है। आगामी चरणों में वर्गों की संख्या 3, 3 + 3 = 6, 6 + 6 = 12, 12 + 12 = 24, ... है।

© NCERT not to be republished

इसे पुन: इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$3, 3 \times 2, 3 \times 4, 3 \times 8, \ldots \text{ या } 3, 3 \times 2, 3 \times 2^2, 3 \times 2^3, \ldots$$

यदि हम इन व्यंजकों को एक अनुक्रम के पदों के रूप में मानते हैं तो हमें प्राप्त होता है—

$$t_1 = 3, t_2 = 3 \times 2, t_3 = 3 \times 2^2, t_4 = 3 \times 2^3$$

एवं इसी प्रकार आगे भी पद हैं। हम nवें पद को $t_n = 3 \times 2^{(n-1)}$ के रूप में लिख सकते हैं। पुनरावर्ती सूत्र के रूप में हम $t_1 = 3$ और $t_n = 2t_{n-1}$, जहाँ $n \geq 2$ हो, लिख सकते हैं।

अनुक्रम के प्रथम छ: पद 3, 6, 12, 24, 48, 96 हैं। अनुक्रम का प्रत्येक पद, पिछले पद को 2 गुणा करने पर प्राप्त होता है। यह **अचर गुणक** अनुक्रम का **सार्व अनुपात** भी कहलाता है। हम देखते हैं कि पदों के क्रमागत युग्मों का अनुपात सभी में समान है।

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = 2$$

सार्व अनुपात के साथ ऐसा अनुक्रम **गुणोत्तर श्रेढ़ी** कहलाता है। व्यापक रूप में **गुणोत्तर श्रेढ़ी** की व्याख्या अनुक्रम $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots ar^{n-1}$ के रूप में की जा सकती है जहाँ 'a' **प्रथम पद** है, 'r' **सार्व अनुपात** है और $t_n = ar^{n-1}$, ***n*वाँ पद** है।

उदाहरण 6 — क्या 1, 2, 4, 8, 16, ... एक गुणोत्तर श्रेढ़ी है? यदि हाँ, तो सार्व अनुपात क्या है?

उदाहरण 7 — क्या 1, 3, 9, 27, 81, ... एक गुणोत्तर श्रेढ़ी है? यदि हाँ, तो सार्व अनुपात क्या है?

उदाहरण 8 — क्या 1, –1, 1, –1, 1, ... एक गुणोत्तर श्रेढ़ी है? यदि हाँ, तो सार्व अनुपात क्या है?

उदाहरण 9 — जाँच कीजिए कि क्या अनुक्रम $5, \frac{15}{4}, \frac{45}{16}, \frac{135}{64}, \ldots$ एक गुणोत्तर श्रेढ़ी है। इसका nवाँ पद ज्ञात कीजिए।

दिए गए अनुक्रम में $t_1 = 5, t_2 = \frac{15}{4}, t_3 = \frac{45}{16}, t_4 = \frac{135}{64}$

आइए, पदों के क्रमागत युग्मों के अनुपात की गणना करते हैं।

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{15}{4} \div 5 = \frac{15}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{45}{16} \div \frac{15}{4} = \frac{45}{16} \times \frac{4}{15} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{t_4}{t_3} = \frac{135}{64} \div \frac{45}{16} = \frac{135}{64} \times \frac{16}{45} = \frac{3}{4}$$

पदों के क्रमागत युग्मों का अनुपात अचर $\frac{3}{4}$ है। अत: दिया गया अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेणी है, जिसमें $a = 5$ और $r = \frac{3}{4}$ है। nवाँ पद $= a \times r^{(n-1)} = 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ है। इस व्यंजक में n को 1, 2, 3, ... से विस्थापित कीजिए और जाँचिए कि क्या आपको दिए गए अनुक्रम के पद प्राप्त होते हैं।

© NCERT not to be republished

प्रश्न — जाँचिए कि क्या नीचे दिए गए अनुक्रम गुणोत्तर श्रेढ़ियाँ हैं और उनके nवें पद ज्ञात कीजिए।

(i) 2, 10, 50, 250, …

(ii) $4, \frac{8}{3}, \frac{16}{9}, \frac{32}{27}, \ldots$

(iii) $3, \frac{-3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{-3}{8}, \ldots$

प्रश्न — क्या आप सूत्र $t_n = 3 \times 10^{n-1}$ के लिए पुनरावर्ती सूत्र का पता लगा सकते हैं, जिससे गुणोत्तर श्रेढ़ी 3, 30, 300, 3000, ... बनती है?

8.6.1 फ्रैक्टल्स के साथ आनंद

कक्षा 8 की गणित की पाठ्यपुस्तक से अन्य रोचक प्रतिरूप का स्मरण कीजिए जैसा कि चित्र 8.7 में दर्शाया गया है। चरण 0, समबाहु त्रिभुज के आकार में काटे गए एक कागज के टुकड़े को प्रदर्शित करता है। आइए, त्रिभुज की तीनों भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाते हैं, जिससे चार छोटे समबाहु त्रिभुज प्राप्त होते हैं। अब मध्य में स्थित त्रिभुज को हटा दीजिए। आपको चरण 1 में दर्शाया गया चित्र प्राप्त होगा जिसके मध्य में त्रिभुजाकार रिक्त होगी। इसी प्रक्रिया को चरण 1 में सभी तीन काले त्रिभुजों पर दोहराइए। इससे आपको चरण 2 में प्रदर्शित चित्र प्राप्त होगा। इसी विधि से हम चरण 2 से चरण 3 तक पहुँचते हैं। इस प्रक्रिया को निरंतर जारी रखा जा सकता है। इस आकर्षक प्रतिरूप को **सिएरपिंस्की त्रिभुज** कहा जाता है। वास्तव में, यह एक फ्रैक्टल है। फ्रैक्टल के विषय में और अधिक अध्ययन हम आगामी कक्षाओं में करेंगे।

चरण 0 चरण 1 चरण 2 चरण 3

चित्र 8.7

वाक्लाव सिएरपिंस्की (1882–1969) एक पोलिश गणितज्ञ थे, जिन्हें गणित में उनके अनेक योगदानों के लिए जाना जाता हैं, जिसमें सिएरपिंस्की गास्केट भी सम्मिलित है, जो फ्रैक्टल्स के सबसे प्रारंभिक और सबसे प्रसिद्ध उदाहरणों में से एक है।

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

सिएरपिंस्की त्रिभुज का अवलोकन कीजिए और नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयास कीजिए।

(क) चित्र 8.7 में चरण 0 से चरण 3 तक कितने काले त्रिभुज हैं?

(ख) क्या आप चरण 4 और चरण 5 में काले त्रिभुजों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं?

(ग) क्या आप nवें चरण में काले त्रिभुजों की संख्या के लिए सूत्र ज्ञात कर सकते हैं?

(घ) मान लीजिए चरण 0 में त्रिभुज का क्षेत्रफल (जो काला क्षेत्र है) 1 वर्ग इकाई है। चरण 1, 2 और 3 में काले क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या है? चरण 4 और 5 में काले क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा? nवें चरण में काले क्षेत्र के क्षेत्रफल के लिए एक सूत्र ज्ञात कीजिए। चरणों की संख्या n के बढ़ने के साथ इस क्षेत्रफल में क्या अंतर आता है?

हम देखते हैं कि चरण 0, 1, 2 और 3 में काले त्रिभुजों की संख्या क्रमश: 1, 3, 9 और 27 है। वास्तव में, प्रत्येक चरण में प्रत्येक काला त्रिभुज अगले चरण में तीन छोटे त्रिभुजों से विस्थापित कर दिया जाता है। इस प्रकार, प्रत्येक चरण में काले त्रिभुजों की संख्या, पिछले चरण में त्रिभुजों की संख्या से तीन गुना है।

चरण 4 और 5 में काले त्रिभुजों की संख्या 81 और 243 होगी।

ध्यान दीजिए कि अनुक्रम 1, 3, 9, 27, 81, 243, ... एक गुणोत्तर श्रेढ़ी है, क्योंकि अनुक्रम का प्रत्येक आगामी पद पिछले पद को 3 से गुणा करने पर प्राप्त किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त, उस अनुक्रम के सभी पद 3 की घातें है — $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $9 = 3^2$ और इसी प्रकार आगे भी पद हैं। इसी प्रक्रिया को जारी रखते हुए हम देखते हैं कि 3 की घात, चरण संख्या के बराबर है जैसा कि तालिका 1 में दर्शाया गया है। इस प्रकार सिएरपिंस्की त्रिभुज अनुक्रम के nवें चरण में काले त्रिभुजों की संख्या 3^n से दी जाती है। चरण संख्या बढ़ने के साथ काले त्रिभुजों की संख्या अत्यंत तीव्रता से बढ़ती है। क्या आप व्याख्या कर सकते हैं कि ऐसा क्यों है?

काले क्षेत्र के क्षेत्रफल के विषय में क्या कहा जा सकता है? चरण 1 में, चरण 0 का समबाहु त्रिभुज 4 समान भागों में बाँटा जाता है और मध्य भाग को हटा दिया जाता है। इसका अर्थ है कि यदि चरण 0 में काला क्षेत्र 1 वर्ग इकाई है तो चरण 1 में काला क्षेत्र $\frac{3}{4}$ वर्ग इकाई होगा। यह प्रक्रिया चरण 1 से चरण 2 प्राप्त करने के लिए दोहराई जाती है।

अत: चरण 2 में काला क्षेत्र, चरण 1 में काले क्षेत्र का $\frac{3}{4}$ भाग होगा जो $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ के समान है। क्या आप व्याख्या कर सकते हैं कि क्यों चरण n में काला क्षेत्र $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ होगा?

© NCERT not to be republished

प्रत्येक चरण में काले क्षेत्र के क्षेत्रफल से एक गुणोत्तर श्रेढ़ी प्राप्त होती है, जिसमें अनुक्रम का प्रत्येक उत्तरोत्तर पद, पिछले पद को $\frac{3}{4}$ से गुणा करने पर प्राप्त किया जाता है। इस प्रकार काले त्रिभुजों की संख्या तीव्रता से बढ़ने के साथ त्रिभुजों का कुल क्षेत्रफल घटता है।

तालिका 1

चरण (n)	0	1	2	3	4	5	...	n
काले त्रिभुजों की संख्या (t_n)	$1 = 3^0$	$3 = 3^1$	$9 = 3^2$	$27 = 3^3$	$81 = 3^4$	$243 = 3^5$	...	3^n
छायांकित क्षेत्रफल (s_n)	1	$\frac{3}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$\left(\frac{3}{4}\right)^4$	$\left(\frac{3}{4}\right)^5$	...	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$

किसी भी चरण में काले त्रिभुजों की संख्या और काले क्षेत्र के क्षेत्रफल के लिए व्यापक सूत्र क्रमशः $t_n = 3^n$ और $s_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ द्वारा दिया जाता है। इन दोनों के लिए पुनरावर्ती सूत्र हैं—

$t_1 = 1, t_n = 3 \times t_{n-1}$ जहाँ $n \geq 2$ और $s_1 = 1, s_n = \frac{3}{4} \times s_{n-1}$ जहाँ $n \geq 2$ है।

फ्रैक्टल्स वे आकृतियाँ या प्रतिरूप हैं, जिनका वही रूप विभिन्न स्तरों पर बार-बार दिखाई देता है। इसका अर्थ है कि यदि आप फ्रेक्टल के किसी छोटे से भाग को विस्तारित करके देखते हैं, तो यह संपूर्ण आकृति या प्रतिरूप के समान दिखाई देता है! फ्रैक्टल्स प्रकृति में सभी जगह पाए जाते हैं, जैसे कि वृक्षों की शाखाओं में, सब्जियों जैसे फूलगोभी या ब्रोकली में, हिमकण (स्नोफ्लेक्स) की आकृति में या तटीय रेखाओं के प्रतिरूप में, वे सरल नियमों के उपयोग द्वारा बनाए (रचित किए) जा सकते हैं, किंतु बहुत ही जटिल और सुंदर अभिकल्पनाएँ (डिजाइन) बना सकते हैं। फ्रैक्टल्स हमें प्रकृति में प्रतिरूपों को समझने में सहायता करते हैं और साथ ही हमें गणित में महत्त्वपूर्ण अवधारणाओं की ओर ले जाते हैं।

चित्र 8.8

8.6.2 गुणोत्तर श्रेढ़ी का दृश्यांकन

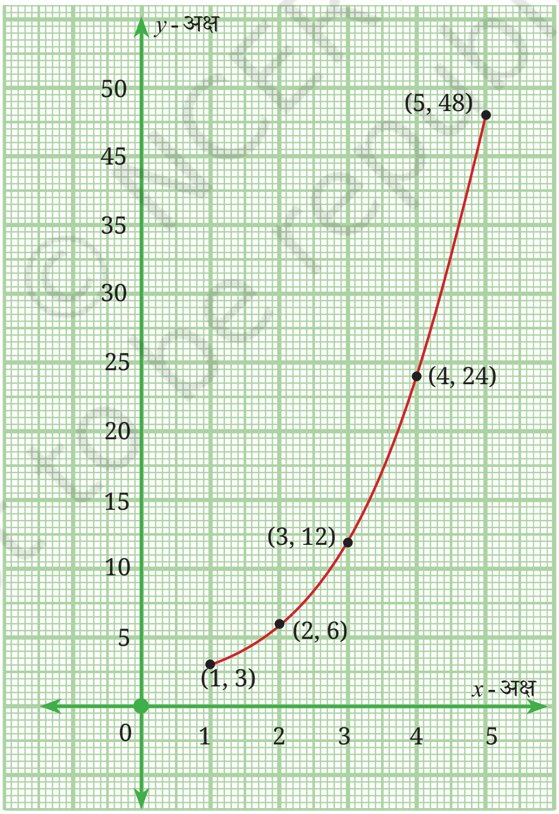
आइए, चित्र 8.6 में वर्गों के बढ़ते हुए प्रतिरूप को पुनः देखते हैं और प्रत्येक चरण में हरे वर्गों की संख्या प्रदर्शित करने वाली तालिका बनाते हैं।

© NCERT not to be republished

चरण संख्या	1	2	3	4	5	…	n
वर्गों की संख्या	3	6	12	24	48	…	$3 \times 2^{n-1}$

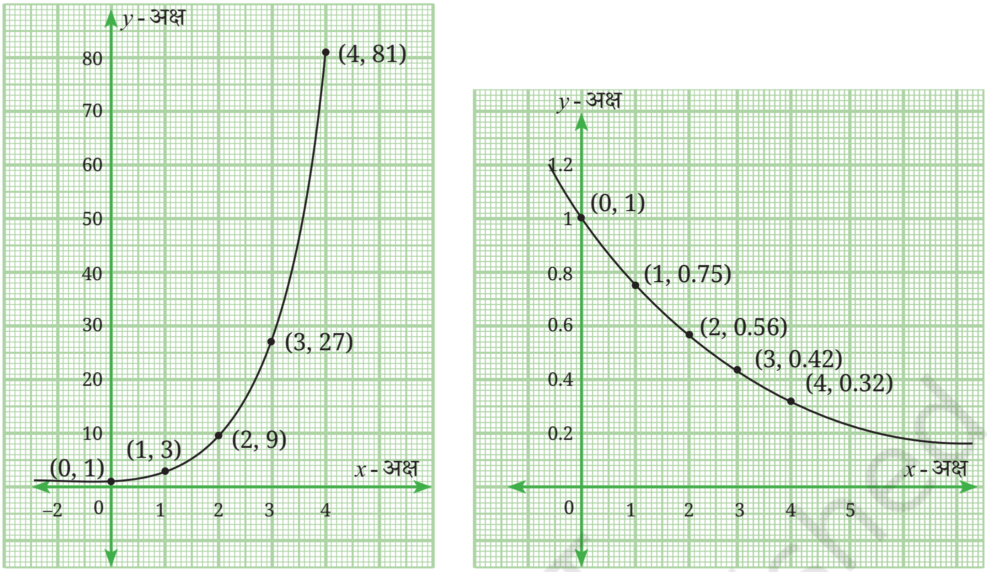
आइए, संख्याओं के युग्म (x, y) पर विचार करते हैं जहाँ x, चरण संख्या को प्रदर्शित करता है और y संगत वर्गों की संख्या को प्रदर्शित करता है। जब हम ऊपर दी गई तालिका से प्राप्त क्रमिक युग्मों के आलेख पत्रक पर प्रदर्शित करते हैं अर्थात युग्मों (1, 3), (2, 6), (3, 12), (4, 24), (5, 48) को प्रदर्शित करते हैं तो हम देखते हैं कि वे एक सरल रेखा पर स्थित नहीं हैं। इसे चित्र 8.9 में दर्शाया गया है।

इसी प्रकार, जब हम संख्याओं के युग्मों (x, y) को आलेख पत्रक पर प्रदर्शित करते हैं जहाँ x चरण संख्या को प्रदर्शित करता है और y सिएरपिंस्की त्रिभुज में काले त्रिभुजों की संख्या को प्रदर्शित करता है, तो हमें चित्र 8.10 (क) में दिया गया आलेख प्राप्त होता है। चित्र 8.10 (ख) उस आलेख को दर्शाता है, जिसमें चरण संख्याओं को x - अक्ष पर और उन चरणों में काले क्षेत्र के क्षेत्रफल को y - अक्ष पर प्रदर्शित किया गया है। आलेख से हमें पता चलता है कि चरण संख्याओं के बढ़ने के साथ छायांकित त्रिभुजों की संख्या बहुत तीव्रता से बढ़ती है, जबकि काले क्षेत्र का क्षेत्रफल कम होता जाता है और 0 के निकटतम होता जाता है।



चित्र 8.9 — गुणोत्तर श्रेढ़ी से प्राप्त बिंदु एक सरल रेखा पर स्थित नहीं हैं

© NCERT not to be republished



(क) (ख)

चित्र 8.10 — सिएरपिंस्की त्रिभुज के चरणों से प्राप्त होने वाले बिंदु गुणोत्तर श्रेढ़ी का निर्माण करते हैं

यहाँ एक अन्य उदाहरण दिया गया है, जिसमें एक गुणोत्तर श्रेढ़ी प्राप्त होती है।

उदाहरण 10 — एक गेंद भूमि से 24 फुट की ऊँचाई से गिराई जाती है। प्रत्येक बार गेंद भूमि से टकराकर इसकी पिछली ऊँचाई के $\left(\frac{3}{4}\right)$वाँ भाग ऊँचाई तक ऊपर जाती है।

(क) क्या आप गेंद के (भूमि से टकराकर वापस जाने की पाँच क्रमिक घटनाओं) पाँच उछालों में गेंद को प्राप्त ऊँचाइयों की संख्याओं का अनुक्रम लिख सकते हैं?

(ख) प्रारंभ में गेंद को गिराए जाने की ऊँचाई के $\frac{1}{6}$ वें भाग से कम ऊँचाई तक गेंद के पहुँचने के लिए गेंद को गिराए जाने के कितने प्रयासों (उछालों) की आवश्यकता है?

गेंद के प्रत्येक उछाल (भूमि से टकराकर वापस ऊपर जाने की प्रत्येक घटना) में गेंद को प्राप्त अधिकतम ऊँचाइयों का अनुक्रम है —

प्रथम उछाल – $24 \times 0.75 = 18$ फुट

दूसरी उछाल – $18 \times 0.75 = 13.5$ फुट

तीसरी उछाल – $13.5 \times 0.75 = 10.125$ फुट

चौथी उछाल – $10.125 \times 0.75 = 7.59375$ फुट

पाँचवी उछाल – $7.59357 \times 0.75 = 5.695$ फुट

छठी उछाल – $5.695 \times 0.75 = 4.27125$ फुट

सातवीं उछाल – $4.27125 \times 0.75 = 3.2034375$ फुट

© NCERT not to be republished

चित्र 8.11

ऊँचाइयों के अनुक्रम से एक गुणोत्तर श्रेढ़ी प्राप्त होती है, जिसमें $a = 18$ और $r = 0.75$ (या $\frac{3}{4}$) है। गुणोत्तर श्रेढ़ी 18, 13.5, 10.125, 7.594, 4.27125, 3.2034375, ... है। हम देखते हैं कि सातवीं उछाल के बाद गेंद अपनी प्रारंभिक ऊँचाई के $\frac{1}{6}$ गुने से कम ऊँचाई तक जाती है।

प्रश्नावली 8.3

1. उस गुणोत्तर श्रेढ़ी का 12वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका सार्व अनुपात 2 है और 8वाँ पद 192 है।
2. गुणोत्तर श्रेढ़ी 5, 25, 125, ... का 10वाँ पद तथा nवाँ पद ज्ञात कीजिए।

*3. एक अनुक्रम का पुनरावर्ती सूत्र $t_1 = 2$, $t_{n+1} = 3t_n - 2$, जबकि $n \geq 1$ है। इस अनुक्रम का कौन-सा पद 730 है?

4. गुणोत्तर श्रेढ़ी 2, 6, 18, ... का कौन-सा पद 4374 है? इस श्रेढ़ी के nवें पद के लिए मानक सूत्र और पुनरावर्ती सूत्र भी लिखिए।
5. एक गेंद को 80 मीटर की ऊँचाई से गिराया जाता है। भूमि से टकराने के बाद गेंद अपनी प्रारंभिक ऊँचाई के 60 प्रतिशत तक भूमि के ऊपर जाती है। इसी प्रकार से गेंद की उछाल जारी रहती है अर्थात प्रत्येक बार गेंद भूमि से टकराकर अपनी पिछली ऊँचाई के 60 प्रतिशत तक ऊपर जाती है।

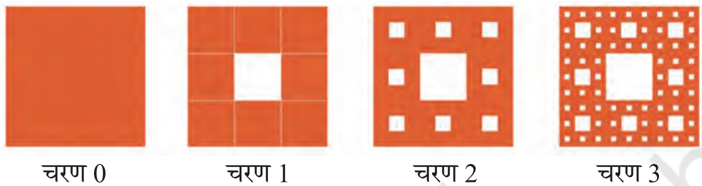
   (i) 5 उछालों के बाद गेंद कितनी ऊँचाई तक जाती है?

   (ii) गेंद द्वारा भूमि से छठी बार टकराने तक तय की गई कुल लंबवत दूरी कितनी है?

© NCERT not to be republished

6. अनुक्रम $2, 2\sqrt{2}, 4, \ ...$ का कौन-सा पद 128 है?

7. चित्र 8.12 में सिएरपिंस्की वर्ग कारपेट के चरण 0 से चरण 3 तक प्रदर्शित हैं। इस फ्रैक्टल का चरण 0 कागज का एक वर्गाकार पत्रक है। चरण 1 की रचना करने के लिए वर्ग की प्रत्येक भुजा को तीन समान भागों में बाँटा गया है और सम्मुख भुजाओं के त्रिविभाजक बिंदुओं को मिलाने पर नौ छोटे वर्ग प्राप्त होते हैं। तत्पश्चात मध्य में स्थित वर्ग को हटा दिया जाता है और 8 छोटे वर्गों के मध्य एक वर्गाकार रिक्ति शेष रह जाती है। यही प्रक्रिया आठ छोटे छायांकित वर्गों पर दोहराई जाती है, जिससे चरण 2 प्राप्त होता है और आगे भी यही प्रक्रिया जारी रहती है।



चित्र 8.12 — सिएरपिंस्की वर्ग कारपेट के चरण 0, 1, 2 और 3

चित्र 8.12 को देखिए और नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयास कीजिए।

(i) चरण 0 से 3 तक कितने लाल वर्ग हैं?

(ii) क्या आप चरण 4 से 5 में लाल वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं?

(iii) क्या आप nवें चरण में लाल वर्गों की संख्या के लिए सूत्र ज्ञात कर सकते हैं? किसी भी चरण में लाल वर्गों की संख्या के लिए एक व्यापक सूत्र और पुनरावर्ती सूत्र भी लिखिए।

(iv) मान लीजिए चरण 0 में वर्ग का क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाई है। चरण 1, 2 और 3 में लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या है? चरण 4 और 5 में लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल कितना होगा? nवें चरण में लाल क्षेत्र के क्षेत्रफल के लिए व्यापक सूत्र और पुनरावर्ती सूत्र भी ज्ञात कीजिए। चरण संख्या n बढ़ने के साथ इस क्षेत्रफल में क्या अंतर आता है?

अंतिम प्रश्नावली

1. उस समानांतर श्रेढ़ी का 31वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका 11वाँ पद 38 है और 16वाँ पद 73 है।

2. उस समानांतर श्रेढ़ी का निर्धारण (की रचना) कीजिए, जिसका तीसरा पद 16 है और जिसका 7वाँ पद, 5वें पद से 12 अधिक है।

*3. कितनी 3-अंकीय संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं?

(**संकेत** — सभी 7 द्वारा विभाज्य संख्याएँ एक समानांतर श्रेढ़ी बनाती हैं। ऐसी सबसे छोटी 3-अंकीय संख्या और सबसे बड़ी 3-अंकीय संख्या ज्ञात कीजिए।)

© NCERT not to be republished

*4. 4 के कितने गुणज 10 और 250 के बीच आते हैं?

(**संकेत** — 4 के सभी गुणज एक समानांतर श्रेढ़ी बनाते हैं। 10 और 250 के बीच आने वाले 4 के सबसे छोटे गुणज और सबसे बड़े गुणज ज्ञात कीजिए।)

*5. उस गुणोत्तर श्रेढ़ी की रचना (निर्माण) कीजिए, जिसके प्रारंभिक दो पदों का योगफल –4 है और जिसका पाँचवा पद, तीसरे पद का 4 गुना है।

*6. 100 को क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में लिखने के सभी संभव विधियाँ ज्ञात कीजिए।

*7. किसी कल्चर (नमूने) में जीवाणुओं की संख्या प्रत्येक घंटे में दुगुनी हो जाती है। यदि प्रारंभ में कल्चर (नमूने) में 30 जीवाणु विद्यमान थे, तो दूसरे घंटे के अंत में, चौथे घंटे के अंत में और nवें घंटे के अंत में कितने जीवाणु विद्यमान होंगे?

*8. किसी समानांतर श्रेढ़ी के चौथे और आठवें पदों का योगफल 24 है और छठे और दसवें पदों का योगफल 44 है। समानांतर श्रेढ़ी के पहले तीन पद ज्ञात कीजिए।

*9. n का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए, जिससे प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योगफल 1,000 से अधिक हो।

*10. गुणोत्तर श्रेढ़ी 2, 8, 32, ... का कौन-सा पद 131072 है? nवें पद के लिए व्यापक सूत्र और पुनरावर्ती सूत्र भी लिखिए।

*11. एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पदों का योगफल $\frac{13}{12}$ है और उनका गुणनफल –1 है। श्रेढ़ी का सार्व अनुपात और पद ज्ञात कीजिए।

*12. यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का चौथा, दसवाँ और सोलहवाँ पद क्रमश: x, y और z है। सिद्ध कीजिए कि x, y, z गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

*13. एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पदों का योगफल 26 है और उन पदों के वर्गों का योगफल 364 है। गुणोत्तर श्रेढ़ी के पदों को ज्ञात कीजिए।

*14. मान लीजिए कि $P_1 = 1$, $P_2 = 2$ है और $n > 2$ के लिए $P_n = P_1 + P_2 + ... P_{n-1} + 1$ है। $P_1, P_2, ..., P_8$ के मान ज्ञात कीजिए। क्या आप P_n के लिए एक अधिक सरल पुनरावर्ती सूत्र ज्ञात कर सकते हैं? क्या आप एक व्यापक सूत्र बता सकते हैं?

*15. मान लीजिए $W_1 = 1$, $W_2 = 2$ और $n > 2$ के लिए $W_n = W_1 + W_2 + ... + W_{n-2} + 2$ है। $W_1, W_2, ..., W_8$ के मान ज्ञात कीजिए। क्या आप इस अनुक्रम को पहचानते हैं?

© NCERT not to be republished

सारांश

- कोई **अनुक्रम** संख्याओं की एक क्रमागत सूची है। इस सूची में प्रत्येक संख्या पद कहलाती है।
- **व्यापक सूत्र** को किसी अनुक्रम का जो प्रत्येक पद को बनाने के लिए उपयोग किया जा सकता है। व्यापक सूत्र वह सूत्र होता है जिसमें पद के मान की गणना करने के लिए पद की स्थिति संख्या का उपयोग किया जाता है।
- एक **पुनरावर्ती सूत्र** द्वारा अनुक्रम में आए पिछले पदों के मानों का उपयोग करते हुए किसी दिए गए पद का मान प्राप्त किया जाता है।
- **त्रिभुजाकार संख्या अनुक्रम** 1, 3, 6, 10, 15, ... द्वारा दिया जाता है। इस अनुक्रम का प्रत्येक पद, इस पद की स्थिति तक की सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल है। इस अनुक्रम का nवाँ पद $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ द्वारा दिया जाता है, जो प्रथम n प्राकृत संख्याओं के योगफल का सूत्र भी है।
- एक **समानांतर श्रेढ़ी** संख्याओं की वह सूची है, जिसमें प्रथम पद के बाद प्रत्येक पद, पिछले पद में स्थिर संख्या d का योग करने पर प्राप्त होता है। यह स्थिर संख्या d **सार्व अंतर** कहलाता है।
- एक समानांतर श्रेढ़ी का nवाँ पद $t_n = a + (n-1)d$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ a प्रथम पद है तथा d एक सार्व अंतर है। समानांतर श्रेढ़ी का व्यापक रूप $a, a + d, a + 2d, a + 3d, ..., a + (n-1)d$ है।
- **गुणोत्तर श्रेढ़ी** संख्याओं की एक ऐसी सूची होती है, जिसमें पहले पद के बाद प्रत्येक पद को एक स्थिर (नियत) संख्या से गुणा करके प्राप्त किया जाता है। इस स्थिर संख्या r को **सार्व अनुपात** कहा जाता है।
- किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद $t_n = ar^{(n-1)}$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ 'a' प्रथम पद है, 'r' सार्व अनुपात है। एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का व्यापक रूप $a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^{(n-1)}$ है।
- फ्रैक्टल्स के अनेक उदाहरणों, जैसे— सिएरपिंस्की त्रिभुज और सिएरपिंस्की वर्ग कारपेट से गुणोत्तर श्रेढ़ियाँ प्राप्त होती हैं।

© NCERT not to be republished

आलेख पत्रक

© NCERT not to be republished

आलेख पत्रक

© NCERT
not to be republished

आलेख पत्रक

© NCERT
not to be republished

आलेख पत्रक

© NCERT
not to be republished