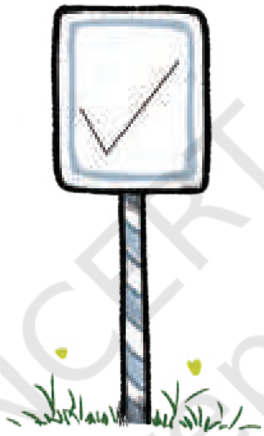
1 ज्यामितीय युग्म

0790CH01

1.1 ज्यामितीय युग्म

इस निर्देश बोर्ड पर बने प्रतीक की अन्य बोर्ड पर पुनर्रचना की जानी है।

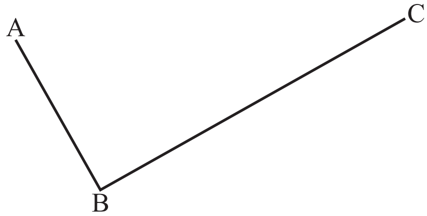


हम इसे किस प्रकार करेंगे?

इसे बनाने की एक विधि यह है कि इस प्रतीक की रूपरेखा (आउटलाइन) को अनुरेखण कागज पर बनाकर आकृति की पुनर्रचना की जाए। ध्यान रखिए कि बड़े प्रतीकों के लिए ऐसा करना कठिन है। इसके लिए हम और क्या कर सकते हैं?

क्या हम कुछ ऐसे माप ले सकते हैं जिनके द्वारा इस आकृति की सटीक पुनर्रचना कर सकें? यदि हाँ, तो हमें कौन-से माप लेने चाहिए?

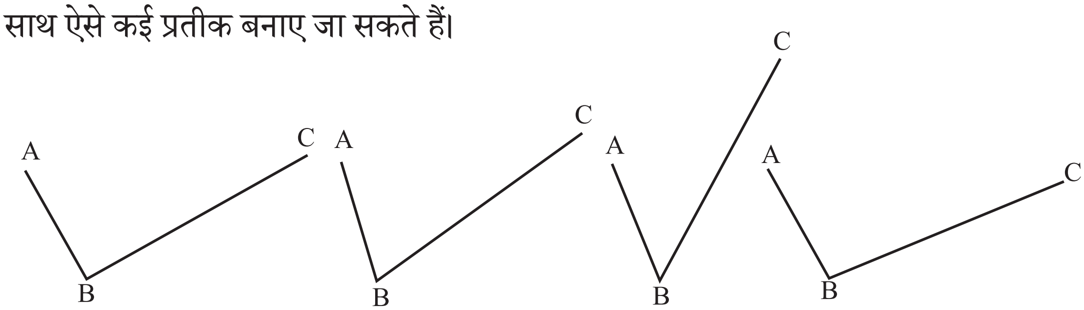
आइए, हम इस प्रतीक के छोर के बिंदुओं को चित्र में दर्शाए अनुसार नाम देते हैं।



क्या इस आकृति की सटीक पुनर्रचना के लिए भुजाओं AB व BC की लंबाई पर्याप्त हैं?

© NCERT not to be republished

मान लीजिए ये लंबाइयाँ AB = 4 cm व BC = 8 cm हैं। हम देखते हैं कि इन्हीं लंबाइयों के साथ ऐसे कई प्रतीक बनाए जा सकते हैं।

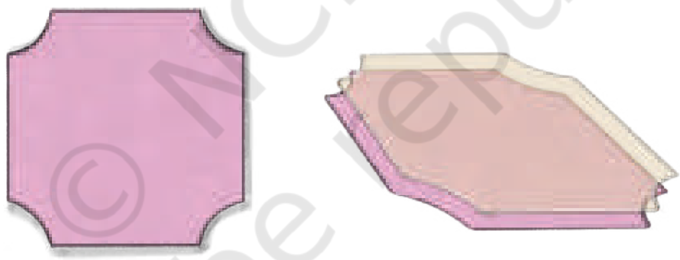


? सटीक प्रतिकृति प्राप्त करने के लिए क्या अन्य माप लेना सहायक होगा?

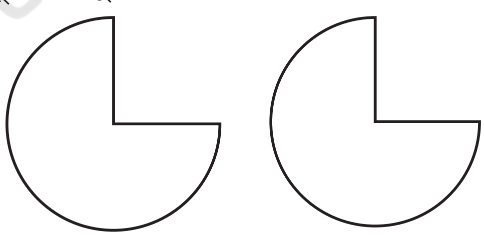
दो भुजाओं AB व BC की लंबाई के साथ ∠ABC की माप लेकर इस आकृति के आकार व आमाप को स्थिर किया जाता है।

? क्या आप इस प्रतीक को बना सकते हैं यदि ज्ञात हो कि AB = 4 cm, BC = 8 cm व ∠ABC = 80° है?

इस निर्देश बोर्ड पर बने प्रतीक की सटीक प्रतिकृति बनाने के लिए ये तीन माप सहायक हो सकते हैं। आकृतियाँ जो एक-दूसरे की सटीक प्रतिकृति होती हैं अथवा जिनका आकार व आमाप समान होते हैं, वे **सर्वांगसम** आकृतियाँ कहलाती हैं। सर्वांगसम आकृतियाँ अध्यारोपित करने पर एक-दूसरे को पूर्णतया ढक लेती हैं।

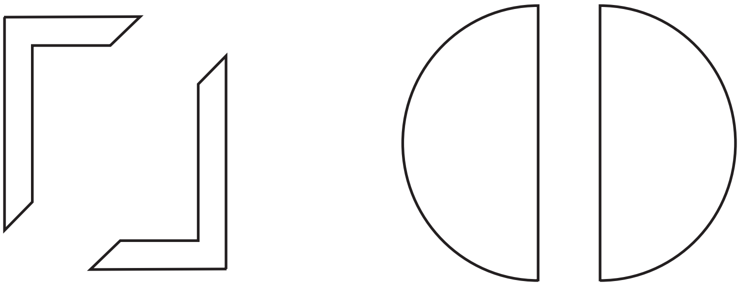


नीचे दो सर्वांगसम आकृतियाँ दर्शाई गई हैं। आप पहली आकृति के अनुरेखण के लिए अनुरेखण कागज का उपयोग कर सकते हैं और इसे दूसरी आकृति पर अध्यारोपित कर सकते हैं। आप देखेंगे कि दोनों आकृतियाँ एक-दूसरे को पूर्णतया ढक लेती हैं।



ध्यान दीजिए कि सर्वांगसमता की जाँच करने के लिए एक आकृति को दूसरी आकृति पर अध्यारोपित करते समय घुमाया या पलटा जा सकता है। अत: आगे दी गई आकृतियों के युग्म भी एक-दूसरे के सर्वांगसम हैं।

Reprint 2026-27



आइए, उस प्रतीक पर पुन: चर्चा करते हैं जिसे हमने निर्देश बोर्ड पर देखा था। मान लीजिए कि ऐसे दो प्रतीक हैं जो एकसमान प्रतीत होते हैं और हमें पुष्टि करनी है कि वे वास्तव में सर्वांगसम हैं। क्या हम इसे सत्यापित करने के लिए इनके मापों का प्रयोग कर सकते हैं?

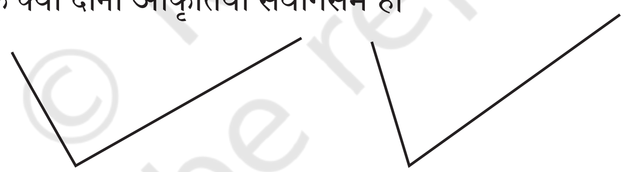
? यदि यह ज्ञात हो कि दोनों प्रतीकों की भुजाओं की लंबाई समान है तो क्या यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि दोनों प्रतीक सर्वांगसम हैं?

हम देख चुके हैं कि दी गई लंबाइयों की भुजाओं के बीच बनने वाले विभिन्न कोणों के लिए ऐसी कई आकृतियाँ हो सकती हैं जो सर्वांगसम न हों। कोण को स्थिर करके चित्र के आकार व आमाप को निर्धारित किया जाता है।

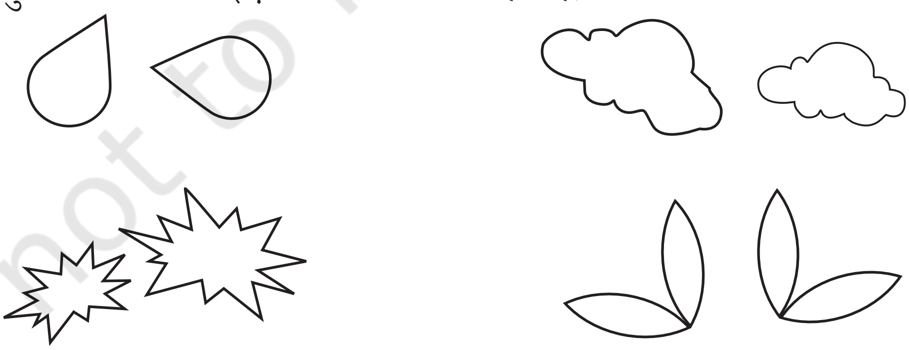
इस प्रकार, यदि दोनों प्रतीकों में भुजाओं की लंबाई एवं कोण समान हों तो हम सुनिश्चित कर सकते हैं कि आकृतियाँ सर्वांगसम हैं।

? पता लगाइए

1. जाँच कीजिए कि क्या दोनों आकृतियाँ सर्वांगसम हैं।



2. उन युग्मों पर गोला लगाइए जो सर्वांगसम प्रतीत होते हैं।



3. दी गई आकृतियों की सर्वांगसम आकृतियाँ बनाने के लिए आप कौन-से मापों का प्रयोग करेंगे—

   (a) वृत्त (b) आयत

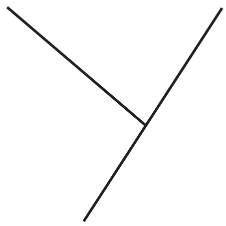
Reprint 2026-27

इन मापों का प्रयोग करते हुए बताइए कि आप किस प्रकार जाँचेंगे कि दो—

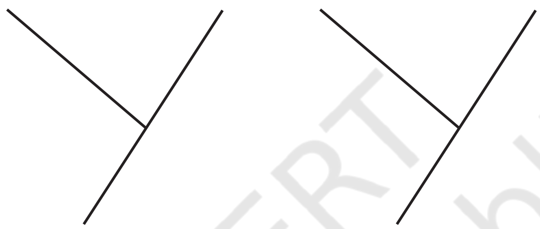
(a) वृत्त सर्वांगसम हैं?

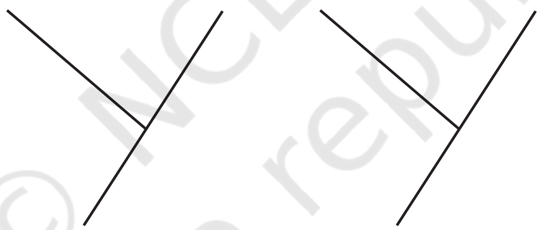
(b) आयत सर्वांगसम हैं?

4. हम किस प्रकार जाँचेंगे कि नीचे दी गई आकृति के समान क्या दो आकृतियाँ सर्वांगसम हैं?



इस आकृति का उपयोग यह ज्ञात करने में कीजिए कि क्या आगे दिए गए प्रत्येक युग्म में आकृतियाँ सर्वांगसम हैं।





1.2 त्रिभुजों की सर्वांगसमता

मीरा और राबिया को उनके विद्यालय में विद्यमान एक त्रिभुजाकार फ्रेम के समान एक गत्ते का कटआउट बनाने के लिए कहा गया है। वे देखती हैं कि फ्रेम एक कागज पर अनुरेखित करके प्रतिकृति बनाने के लिए बहुत बड़ा है।

© NCERT not to be republished

? आपके विचार से वे ऐसी स्थिति में क्या कर सकती हैं?

भुजाओं की लंबाई मापना

क्या इसके लिए त्रिभुज के कुछ मापन प्रयोग किए जा सकते हैं? मापन फीते का उपयोग करके लड़कियाँ त्रिभुज की भुजाओं को 40 cm, 60 cm और 80 cm मापती हैं।

फिर राबिया कोण मापने के लिए अपना चांदा निकालती है। किंतु मीरा उसे रोकती है।

मीरा— हमें त्रिभुज के कोणों की आवश्यकता नहीं है। भुजाओं की जो लंबाइयाँ हमने मापी हैं, उनसे हम दिए गए त्रिभुज के सर्वांगसम त्रिभुज की रचना कर सकते हैं।

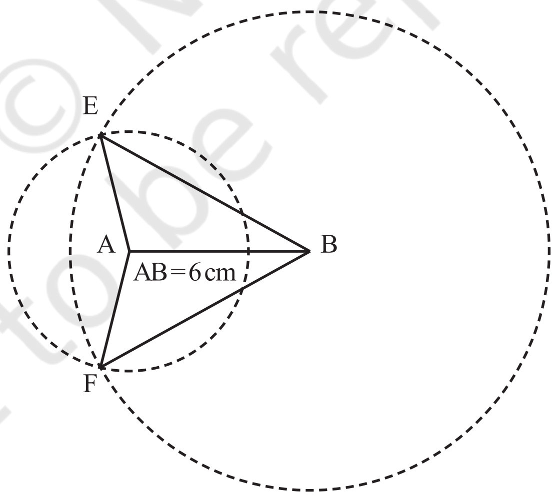
? क्या आप मीरा से सहमत हैं?

? लंबाइयाँ 40 cm, 60 cm और 80 cm के स्थान पर इन्हें 4 cm, 6 cm, 8 cm मान लेते हैं (यह त्रिभुज हमारे कागज पर बनाया जा सकता है)।

? क्या यह जानकारी दिए गए त्रिभुज के समान आकार व आमाप की प्रतिकृति बनाने के लिए पर्याप्त है? यदि हाँ, तो क्या आप ऐसा कर सकते हैं?

राबिया— यदि मुझे इस त्रिभुज की रचना करनी होती तो मैं दी गई लंबाइयों में से किसी एक लंबाई का रेखाखंड खींचती, मान लीजिए 6 cm और इसके पश्चात इस रेखाखंड के दोनों अंत बिंदुओं को केंद्र मानते हुए 4 cm और 8 cm त्रिज्याओं के वृत्त बनाती। ये वृत्त दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करेंगे जिनसे दो त्रिभुज बनेंगे—

ΔABE और ΔABF



राबिया— क्या इन दोनों त्रिभुजों के आकार व माप समान हैं? यदि नहीं, तो हम यह सुनिश्चित नहीं कर पाएँगे कि इनमें से कौन-सा त्रिभुज उस मूल त्रिभुज के सर्वांगसम होगा जिसकी प्रतिकृति बनाने का हम प्रयत्न कर रहे हैं।

Reprint 2026-27

© NCERT not to be republished

जाँच कीजिए कि क्या ΔABE और ΔABF सर्वांगसम हैं।

इसके लिए आप दी गई विधियों में से एक या इससे अधिक विधियों का प्रयोग कर सकते हैं— अनुरेखण व तुलना, एक कटआउट लेकर दूसरे पर अध्यारोपित या अवलोकन करना कि यहाँ AB एक सममित रेखा की तरह कार्य करती है, क्योंकि इस रेखा के ऊपर व नीचे निर्मित संरचना में समानता है।

हम देखते हैं कि ΔABE और ΔABF सर्वांगसम हैं। इस सामान्य संरचना से हम देख सकते हैं कि सभी त्रिभुज जिनकी भुजाओं की लंबाई समान होती है, वे सर्वांगसम होते हैं। अत: मीरा सही कह रही थी कि सर्वांगसम त्रिभुज की रचना करने के लिए भुजाओं की लंबाइयाँ पर्याप्त हैं।

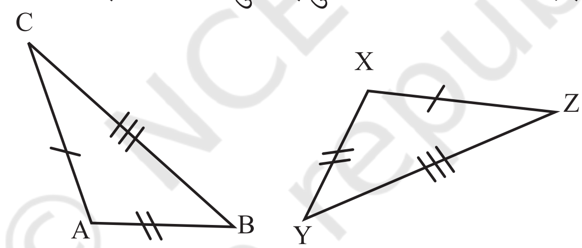
इस प्रकार हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है—

यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के समान लंबाई वाली हों तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। हम इसे **भुजा-भुजा-भुजा (SSS)** सर्वांगसमता प्रतिबंध कहते हैं।

सर्वांगसमता दर्शाने की परिपाटी

नीचे दिए गए दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। ये दोनों त्रिभुज किस प्रकार अध्यारोपित किए जा सकते हैं? हमें ΔXYZ व ΔABC के कौन-से शीर्ष बिंदु सुमेलित करने चाहिए?

यह इस प्रकार किया जाना चाहिए कि समान भुजाएँ सुमेलित हों। पता लगाइए कि यह कैसे किया जाए।



शीर्ष A को शीर्ष X पर, शीर्ष B को शीर्ष Y पर, शीर्ष C को शीर्ष Z पर रखने से यह सुनिश्चित होगा कि समान भुजाएँ सुमेलित हों और त्रिभुज एक-दूसरे को पूर्णतया ढकते हों।

क्या शीर्ष बिंदुओं को एक-दूसरे पर रखने के अन्य प्रकार भी हैं जिससे त्रिभुज एक-दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हों?

त्रिभुज सर्वांगसमता का तथ्य दर्शाता है कि उनके संगत कोण बराबर हैं—

$$\angle A = \angle X,\ \angle B = \angle Y \text{ और } \angle C = \angle Z$$

इस प्रकार जब दो त्रिभुज सर्वांगसम हों तो दोनों त्रिभुजों को एक-दूसरे के ऊपर रखने पर संगत शीर्ष, भुजाएँ और कोण एक-दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं। इस स्थिति में वे हैं—

(a) संगत शीर्ष— A व X, B व Y, C व Z

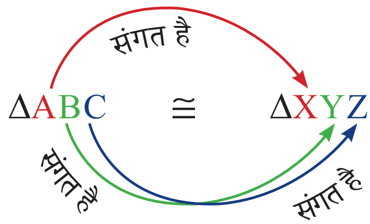
(b) संगत भुजाएँ— AB व XY, BC व YZ, AC व XZ

(c) संगत कोण— $\angle A$ व $\angle X$, $\angle B$ व $\angle Y$, $\angle C$ व $\angle Z$

Reprint 2026-27

जब दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, तब उनके बीच विद्यमान इस संबंध को दर्शाने के लिए उनकी सर्वांगसमता को इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$\Delta ABC \cong \Delta XYZ$$



ऐसा लिखने से हमारा तात्पर्य है—

- ΔABC के नाम में पहला शीर्ष, ΔXYZ के नाम में पहले शीर्ष के संगत है।
- ΔABC के नाम में दूसरा शीर्ष, ΔXYZ के नाम में दूसरे शीर्ष के संगत है।
- इसी प्रकार ΔABC और ΔXYZ के नामों में तीसरे शीर्ष संगत हैं।

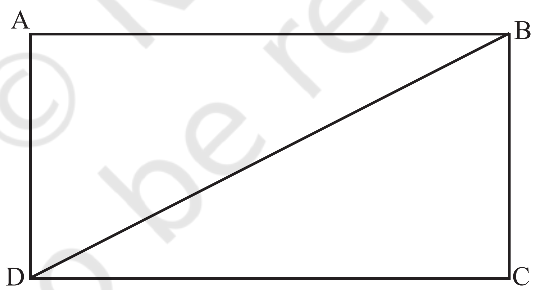
इस परिपाटी से इन दो त्रिभुजों के लिए यह लिखना **अनुचित** होगा—

$$\Delta ACB \cong \Delta XYZ$$

तथापि नीचे दिए अनुसार लिखना अन्य सही विधि है—

$$\Delta ACB \cong \Delta XZY$$

? क्या आप नीचे दिए गए चित्र में सर्वांगसम त्रिभुजों का एक युग्म पहचान सकते हैं? वे सर्वांगसम क्यों हैं?



चित्र 1.1

ΔABD और ΔCDB पर विचार कीजिए। चूँकि ABCD एक आयत है, अत:

$$AB = CD$$
$$AD = CB$$

यदि ΔABD और ΔCDB की शेष भुजा समान लंबाई की हो तो भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसमता प्रतिबंध संतुष्ट होता है जो दोनों त्रिभुजों की सर्वांगसमता सुनिश्चित करता है। क्या यहाँ यही स्थिति है?

शेष भुजा, उभयनिष्ठ भुजा BD है, अत: यहाँ भुजा-भुजा-भुजा प्रतिबंध लागू होता है। अत: दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

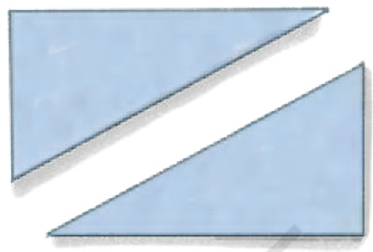
© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

हम दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाएँ जानते हैं। हमें संगत शीर्षों को पहचानना होगा। क्या ये संगत शीर्ष निम्नलिखित हो सकते हैं?

ΔABD	ΔCDB
A	C
B	B
D	D

? आयत ABCD से प्राप्त त्रिभुजों के कटआउट को एक-दूसरे पर अध्यारोपित करके इसे सत्यापित कीजिए।

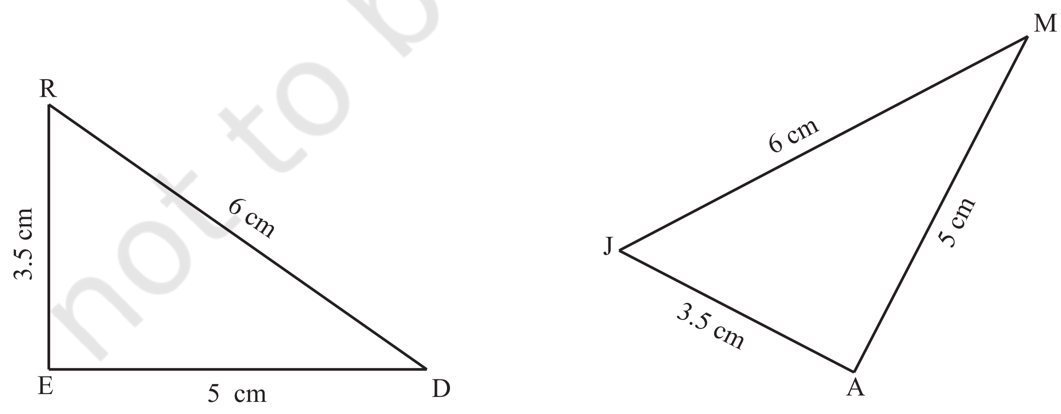


हम देखते हैं कि इस संगतता में ΔABD की भुजा AB को ΔCDB की भुजा CB पर रखा गया है। किंतु ये भुजाएँ समान नहीं हैं, अत: इस अध्यारोपण से सर्वांगसमता सिद्ध नहीं होगी।

? शीर्षों की सही संगतता की पहचान कीजिए और दोनों त्रिभुजों में सर्वांगसमता को दर्शाइए।

? पता लगाइए

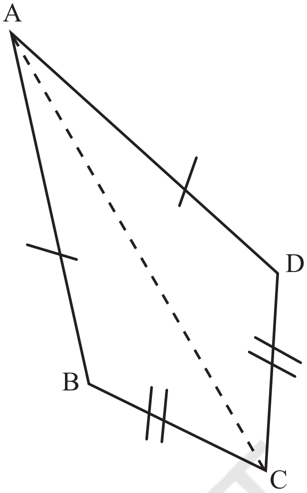
1. मान लीजिए ΔHEN, ΔBIG के सर्वांगसम है। इस सर्वांगसमता को दर्शाने के अन्य सभी सही प्रकारों की सूची बनाइए।
2. पता लगाइए कि क्या दिए गए त्रिभुज सर्वांगसम हैं। यदि हाँ, तो सर्वांगसमता को दर्शाइए।



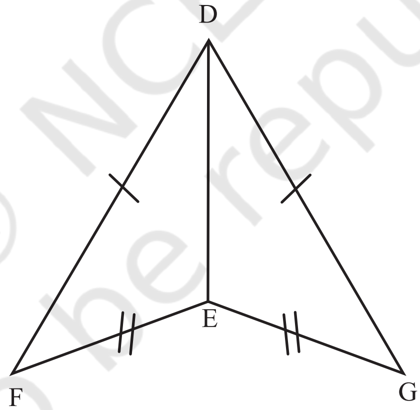
© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

3. नीचे दी गई आकृति में AB = AD और CB = CD है।
   क्या आप सर्वांगसम त्रिभुजों के किसी युग्म की पहचान कर सकते हैं? यदि हाँ, तो व्याख्या कीजिए कि वे सर्वांगसम क्यों हैं।
   क्या AC, ∠BAD व ∠BCD को दो बराबर भागों में बाँटती है? कारण बताइए।



4. क्या नीचे दिए गए चित्र में ΔDFE और ΔGED एक-दूसरे के सर्वांगसम हैं? दिया गया है कि DF = DG और FE = GE है।



कोणों को मापना

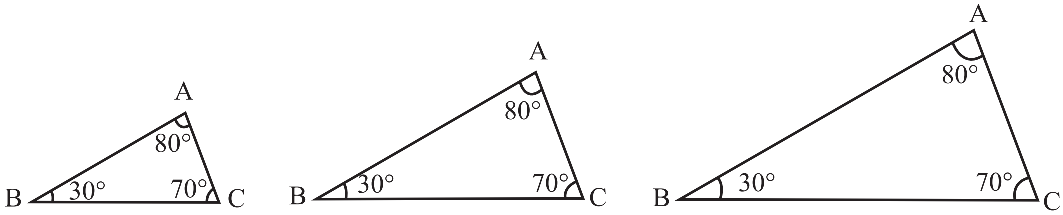
त्रिभुजाकार फ्रेम की तीनों भुजाओं को मापने के स्थान पर यदि मीरा और राबिया तीनों कोणों को मापती हैं तो क्या वे त्रिभुज की सटीक पुनर्रचना कर सकती हैं?

? मान लीजिए कि कोण 30°, 70° और 80° हैं। क्या हम इससे फ्रेम की सटीक प्रतिकृति बना सकते हैं?

हम देखते हैं कि आगे दी गई आकृतियों द्वारा इन मापों से कई त्रिभुज बनाए जा सकते हैं जो सर्वांगसम नहीं हैं।

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27



इन त्रिभुजों के आकार तो समान दिखाई दे रहे हैं किंतु आमाप समान नहीं हैं। अत: दो त्रिभुज जिनके सभी कोण बराबर हों, आवश्यक नहीं है कि वे सर्वांगसम भी हों।

दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण को मापना

? ΔABC और ΔXYZ दो त्रिभुज हैं जिनमें—

$$AB = XY = 6 \text{ cm}, AC = XZ = 5 \text{ cm}, \angle A = \angle X = 30°$$

क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं?

इसे जाँचने के लिए हमें यह देखने की आवश्यकता है कि क्या दी गई मापों के लिए ऐसे त्रिभुज हो सकते हैं जो सर्वांगसम न हों।

ये माप दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण की स्थिति के संगत है। हम देख चुके हैं कि इन दी गई मापों के साथ एक त्रिभुज की रचना कैसे की जाए।

? उपरोक्त मापों को लेकर एक त्रिभुज की रचना कीजिए।

आपके द्वारा बनाए गए त्रिभुज की तुलना आपके सहपाठियों द्वारा बनाए गए त्रिभुजों से कीजिए। क्या सभी त्रिभुज सर्वांगसम हैं? व्याख्या कीजिए कि इन मापों के साथ सभी त्रिभुज सर्वांगसम क्यों हैं।

इस प्रकार जब एक त्रिभुज की दो भुजाएँ एवं उनके अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हों तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

इसे सर्वांगसमता का **भुजा-कोण-भुजा (SAS)** प्रतिबंध कहा जाता है।

दो भुजाओं और उनके अंतर्गत न आने वाले कोण को मापना

क्या होगा यदि दो त्रिभुजों में दो भुजाएँ और उनके अंतर्गत न आने वाला एक कोण बराबर हो?

? ΔABC और ΔXYZ दो त्रिभुज हैं जिनमें—

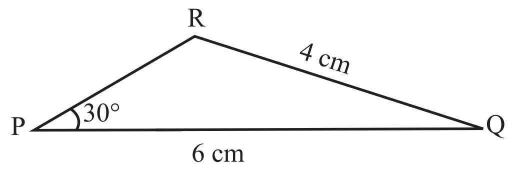
$$AB = XY = 6 \text{ cm}, AC = XZ = 4 \text{ cm और } \angle B = \angle Y = 30°$$

क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं?

? क्या इन मापों के साथ ऐसे दो त्रिभुज संभव हैं जो सर्वांगसम न हों? रचना कीजिए और पता लगाइए।

© NCERT not to be republished

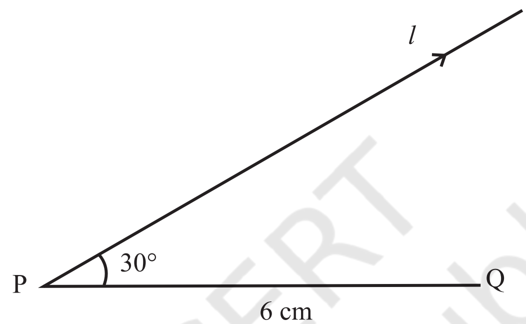
एक कच्चा (rough) आरेख देखने से रचना करने में सहायता मिलती है।



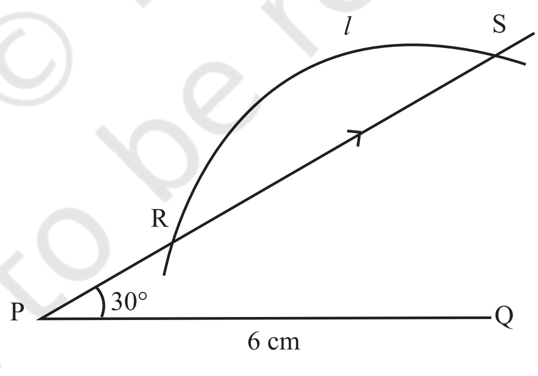
इन मापों के साथ एक त्रिभुज की रचना कैसे की जाए?

चरण 1— 6 cm लंबाई वाला आधार PQ बनाइए।

चरण 2— P से होकर जाती हुई एक रेखा *l* खींचिए जो PQ के साथ 30° का कोण बनाती हो।



चरण 3— बिंदु Q से 4 cm त्रिज्या का पर्याप्त लंबा एक चाप खींचिए जो रेखा *l* को प्रतिच्छेद करता हो।

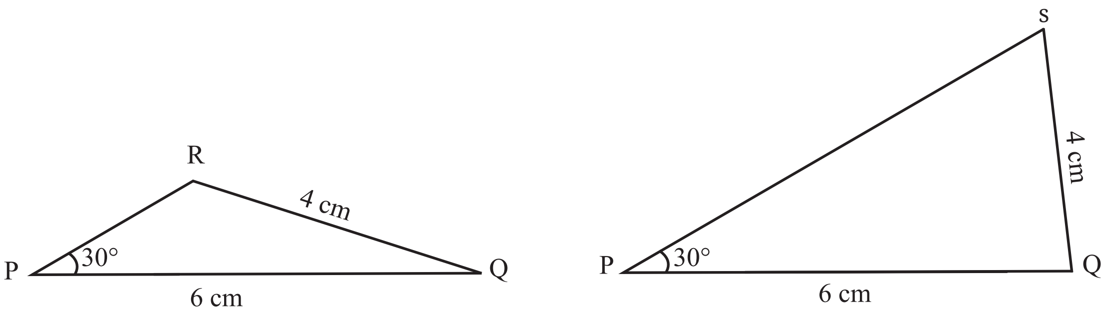


इस चित्र से हम आवश्यक त्रिभुज किस प्रकार प्राप्त करेंगे?

चाप और रेखा *l* के प्रतिच्छेद बिंदु से आवश्यक त्रिभुज का तीसरा बिंदु प्राप्त होता है, किंतु हम देख सकते हैं कि चाप रेखा *l* को दो भिन्न बिंदुओं R और S पर प्रतिच्छेद करता है।

दोनों ΔPQR और ΔPQS दिए गए मापों को संतुष्ट करते हैं।

Reprint 2026-27



अत: हम दी गई मापों से दो त्रिभुज बना सकते हैं जो सर्वांगसम नहीं हों।

इसे **भुजा-भुजा-कोण (SSA)** प्रतिबंध कहा जाता है। हमने देखा कि SSA प्रतिबंध सर्वांगसमता सुनिश्चित नहीं करता है।

हम दो भुजाओं और एक कोण द्वारा सर्वांगसमता सुनिश्चित करने की स्थितियों की जाँच कर चुके हैं। क्या हम दो कोण और एक भुजा का उपयोग कर सकते हैं?

आइए, पहले दो कोणों एवं उनके अंतर्गत भुजा की स्थिति को लेते हैं।

दो कोण और उनके अंतर्गत भुजा

? ΔABC और ΔXYZ दो त्रिभुज हैं जिनमें

$$BC = YZ = 5 \text{ cm}, \angle B = \angle Y = 50° \text{ और } \angle C = \angle Z = 30°$$

क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं?

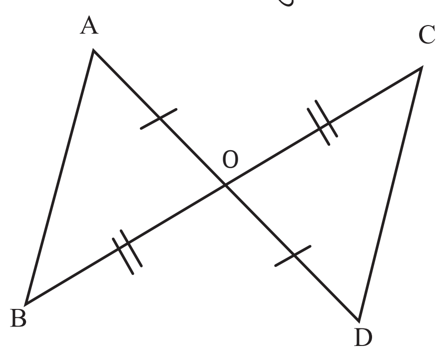
? क्या इन मापों के साथ ऐसे त्रिभुज संभव हैं जो सर्वांगसम न हों? रचना कीजिए और पता लगाइए।

हम देख चुके हैं कि यदि दो कोण और उनके अंतर्गत भुजा दी गई हो तो त्रिभुज की रचना कैसे की जाती है।

इस रचना से यह स्पष्ट हो जाना चाहिए कि इन मापों वाले सभी त्रिभुज अवश्य ही एक-दूसरे के सर्वांगसम होने चाहिए। इस प्रकार $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ है।

यह प्रतिबंध सर्वांगसमता के लिए **कोण-भुजा-कोण (ASA)** प्रतिबंध कहलाता है।

? नीचे दिए गए चित्र में बिंदु O, AD व BC का मध्यबिंदु है। लंबाई AB व CD के बारे में क्या कहा जा सकता है?



© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

हमें ज्ञात है,

AO = OD (क्योंकि O, AD का मध्यबिंदु है।)

BO = OC (क्योंकि O, BC का मध्यबिंदु है।)

? क्या कोई अन्य बराबर भुजाएँ या कोण हैं?

हमें यह भी ज्ञात है,

$\angle AOB = \angle DOC$, क्योंकि ये शीर्षाभिमुख कोण हैं।

हम देखते हैं कि SAS प्रतिबंध (दो भुजाएँ और उनके अंतर्गत कोण) संतुष्ट होता है और इस प्रकार हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

संगत शीर्ष कौन-से हैं?

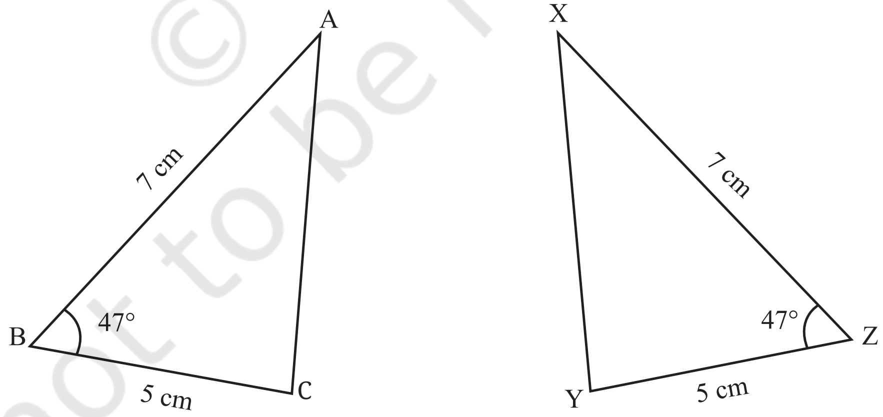
हमें दोनों त्रिभुजों को एक-दूसरे से पूर्णतया ढकने के लिए AO व OD को एक-दूसरे से सुमेलित करना होगा एवं BO व CO को एक-दूसरे से सुमेलित करना होगा, ΔAOB व ΔDOC में संगत शीर्ष A व D, O व O (दोनों त्रिभुजों में उभयनिष्ठ शीर्ष) और B व C हैं। अत:

$$\Delta AOB \cong \Delta DOC$$

AB व DC संगत भुजाएँ हैं क्योंकि दोनों त्रिभुजों को एक-दूसरे पर अध्यारोपित करने पर ये दोनों भुजाएँ सुमेलित होती हैं। अत: इनकी लंबाई समान है।

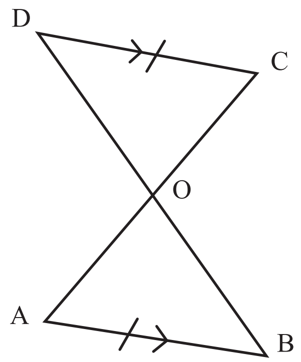
? पता लगाइए

1. जाँच कीजिए कि क्या नीचे दिए गए त्रिभुज सर्वांगसम हैं। दोनों त्रिभुजों में सर्वांगसमता स्थापित करने के लिए आपने कौन-से प्रतिबंध का उपयोग किया? सर्वांगसमता को दर्शाइए।

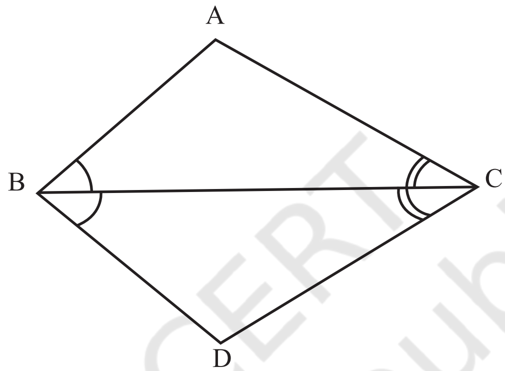


2. आगे दी गई आकृति में दिया गया है कि CD व AB समानांतर हैं और AB = CD है, इस आकृति में कौन-से अन्य भाग समान हैं? (**संकेत**— जब रेखाएँ समानांतर हों तो एकांतर कोण समान होते हैं। क्या दोनों परिणामी त्रिभुज सर्वांगसम हैं? यदि ऐसा है, तो सर्वांगसमता को व्यक्त कीजिए।)

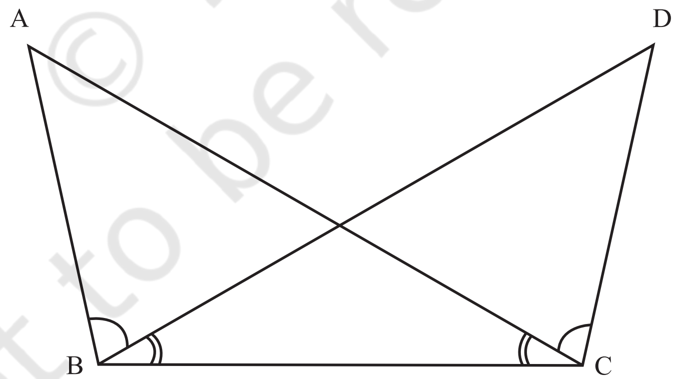
Reprint 2026-27



3. नीचे दी गई आकृति के लिए दिया गया है कि $\angle ABC = \angle DBC$ और $\angle ACB = \angle DCB$ है। दर्शाइए कि $\angle BAC = \angle BDC$ है। क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं?



4. नीचे दी गई आकृति में समान भागों की पहचान कीजिए। दिया गया है कि $\angle ABD = \angle DCA$ और $\angle ACB = \angle DBC$ है।

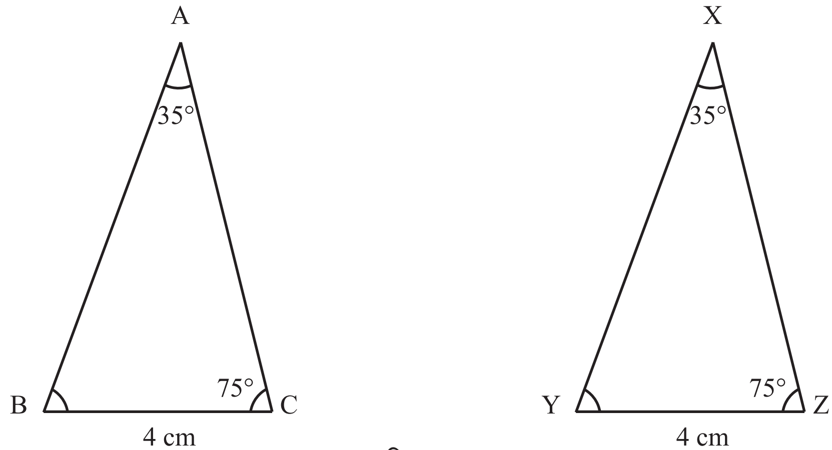


© NCERT not to be republished

दो कोणों और उनके अंतर्गत न आने वाली भुजा को मापना

? दिए गए त्रिभुजों ΔABC और ΔXYZ में $\angle A = \angle X = 35°$, $\angle C = \angle Z = 75°$ और $BC = YZ = 4$ cm है। क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं? कारण बताइए।

Reprint 2026-27



चित्र 1.2

हम इस प्रश्न को किस प्रकार हल करेंगे? यहाँ एक विधि दी गई है।

? $\angle B$ व $\angle Y$ की माप क्या है?

हम जानते हैं कि किसी भी त्रिभुज के सभी कोणों का योग 180° होता है।

अत: $\angle B + 35° + 75° = 180°$

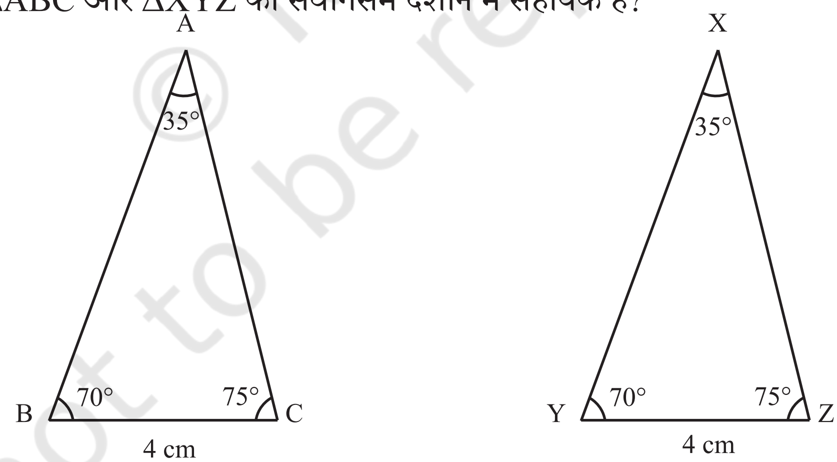
अथवा $\angle B + 110° = 180°$

अत: $\angle B = 70°$

इसी प्रकार $\angle Y$ भी 70° है।

अत: हमें $\angle B = \angle Y$ प्राप्त होता है।

? क्या यह ΔABC और ΔXYZ को सर्वांगसम दर्शाने में सहायक है?



इन दोनों त्रिभुजों में अब ASA प्रतिबंध संतुष्ट होता है—

$$\angle B = \angle Y$$
$$BC = YZ$$
$$\angle C = \angle Z$$

अत: $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

चित्र 1.2 में दोनों त्रिभुजों के दो कोणों एवं उनके अंतर्गत न आने वाली भुजा के बीच समताएँ है। इस प्रतिबंध को **कोण-कोण-भुजा (AAS)** प्रतिबंध कहा जाता है।

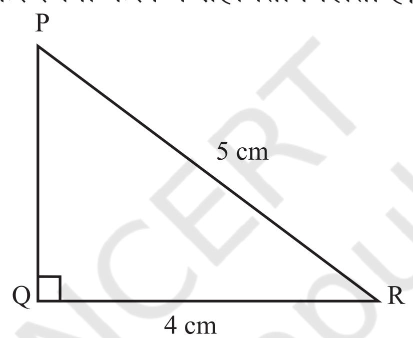
जैसा कि हमने देखा कि AAS प्रतिबंध सर्वांगसमता को सुनिश्चित करता है।

हम देख चुके हैं कि SSA प्रतिबंध सदैव सर्वांगसमता को सुनिश्चित नहीं करता है, फिर भी कुछ विशेष स्थितियाँ हैं जब SSA प्रतिबंध सर्वांगसमता को सुनिश्चित भी करता है। यहाँ एक ऐसी महत्वपूर्ण स्थिति दी गई है।

समकोण त्रिभुज में दो भुजाओं को मापना

? समकोण त्रिभुज ΔABC और ΔXYZ इस प्रकार हैं कि $BC = YZ = 4$ cm, $\angle B = \angle Y = 90°$ और $AC = XZ = 5$ cm है। क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं?

? क्या ऊपर दी गई मापों के साथ ऐसे त्रिभुज संभव हैं जो सर्वांगसम न हों? रचना कीजिए और पता लगाइए। कच्चा (rough) आरेख देखकर रचना करने में सहायता मिलती है।

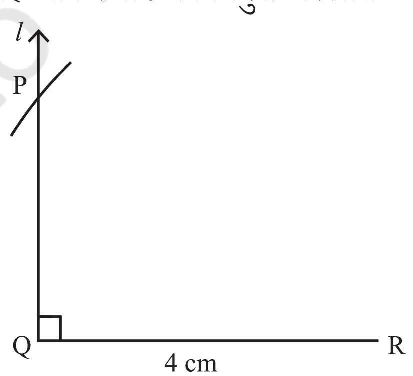


चरण 1— 4 cm लंबाई का आधार QR बनाइए।

चरण 2— बिंदु Q से QR के लंबवत रेखा l बनाइए।

चरण 3— बिंदु R से रेखा l पर 5 cm त्रिज्या का एक चाप खींचिए।

चरण 4— मान लीजिए कि यह चाप रेखा l को बिंदु P पर प्रतिच्छेद करता है। PR को मिलाइए।



ΔPQR वांछित त्रिभुज है।

Reprint 2026-27

? रेखा l को QR के नीचे की ओर विस्तारित मानिए। क्या R से खींचा गया चाप इस रेखा को नीचे की ओर भी मिलेगा (त्रिभुज की रचना की स्थिति में जब भुजाओं की लंबाइयाँ दी गई हों)? यदि ऐसा है तो क्या इससे ΔPQR से भिन्न आकार व आमाप वाला त्रिभुज प्राप्त होगा जिसकी मापें दी गई मापों के समान ही हों?

हम देख सकते हैं कि ΔPQR के नीचे की ओर बनाया गया त्रिभुज भी ΔPQR के सर्वांगसम है। ऐसा क्यों? अत: इन मापों के साथ बने सभी त्रिभुज एक-दूसरे के सर्वांगसम होंगे।

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ है।

ऊपर दी गई जिस स्थिति पर हमने विचार किया है, उसमें एक त्रिभुज के वे भाग जो दूसरे त्रिभुज के संगत भागों के समान हैं, वे हैं—

(a) समकोण

(b) अन्य दो भुजाएँ जिनमें से एक भुजा समकोण की सम्मुख भुजा है। इस भुजा को कर्ण कहा जाता है।

सर्वांगसमता के इस एक और प्रतिबंध को **समकोण-कर्ण-भुजा (RHS)** प्रतिबंध कहा जाता है।

सर्वांगसमता सुनिश्चित करने हेतु पर्याप्त प्रतिबंध

अब तक की गई चर्चा के आधार पर हम देख सकते हैं कि नीचे दिए गए प्रतिबंधों में से किसी भी प्रतिबंध के संतुष्ट होने पर दो त्रिभुज एक-दूसरे के सर्वांगसम होते हैं—

(a) SSS प्रतिबंध

(b) SAS प्रतिबंध

(c) ASA प्रतिबंध

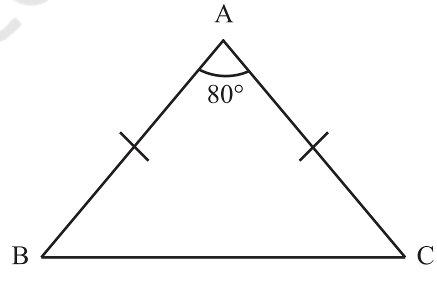
(d) AAS प्रतिबंध

(e) RHS प्रतिबंध

1.3 समद्विबाहु और समबाहु त्रिभुजों के कोण

सर्वांगसमता, ज्यामितीय आकृतियों के गुणधर्मों के अध्ययन के लिए एक अति महत्वपूर्ण कारक है। आइए, इसका उपयोग समद्विबाहु त्रिभुजों के एक महत्वपूर्ण गुणधर्म को ढूँढ़ने में करते हैं।

? ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ और $\angle A = 80°$ है। $\angle B$ व $\angle C$ के बारे में हम क्या कह सकते हैं?



बिंदु A से BC पर लंब खींचिए।

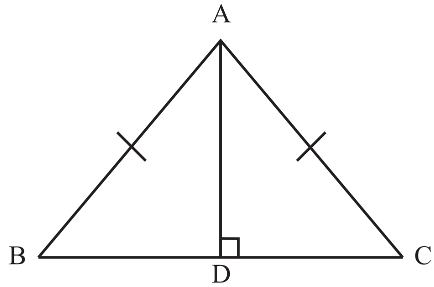
Reprint 2026-27

हमें ज्ञात है,

$$AB = AC \text{ (दिया गया है)}$$

$$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ \text{ (रचना से)}$$

AD दोनों त्रिभुजों ΔADB व ΔADC की उभयनिष्ठ भुजा है।



इस प्रकार दोनों त्रिभुज RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध को संतुष्ट करते हैं। अत: $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ है।

इसका अर्थ है कि $\angle B = \angle C$ है क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग हैं।

अत: समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।

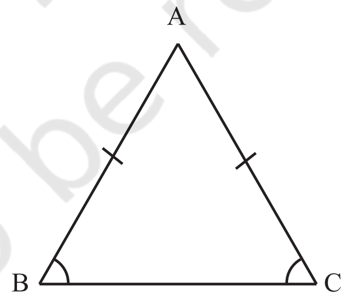
? क्या आप इस तथ्य का उपयोग करके $\angle B$ व $\angle C$ को ज्ञात कर सकते हैं?

समबाहु त्रिभुज में कोण

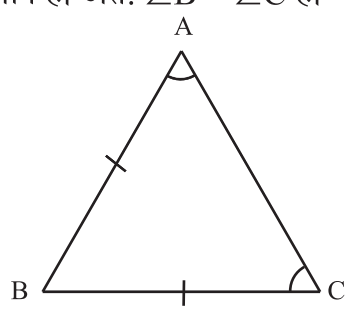
समबाहु त्रिभुज वे त्रिभुज होते हैं जिनमें सभी भुजाएँ समान लंबाई की होती हैं।

? हम इनके कोणों के बारे में क्या कह सकते हैं?

हम अभी-अभी ढूँढ़े गए इस तथ्य का उपयोग कर सकते हैं कि समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।



भुजाएँ AB व AC आपस में समान हैं। अत: $\angle B = \angle C$ है।



© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

इसी प्रकार, भुजाएँ AB व BC आपस में बराबर हैं, अत: $\angle A = \angle C$ है।

अत: एक समबाहु त्रिभुज के तीनों कोण भी समान होते हैं, जैसे उनकी भुजाएँ समान होती हैं।

❓ इन कोणों की माप क्या होगी?

तीनों कोणों का योगफल 180° होना चाहिए, अत:

3 × समबाहु त्रिभुज का एक कोण = 180°

अत: प्रत्येक कोण 60° है।

❓ इस तथ्य को रचना द्वारा सत्यापित कीजिए।

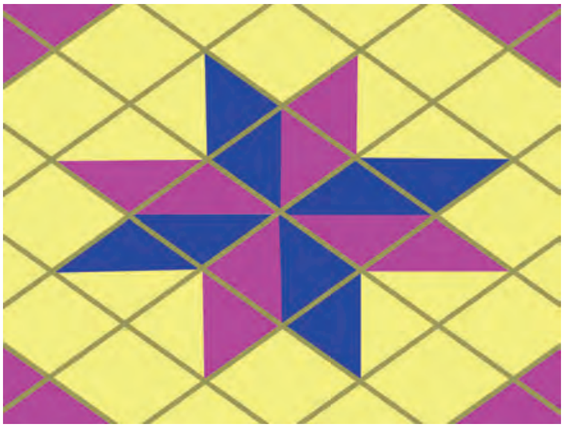
अत: सर्वांगसमता की अवधारणा का उपयोग करते हुए हमें यह निष्कर्ष प्राप्त हुआ कि समबाहु त्रिभुज के सभी कोण 60° माप के होते हैं।

वास्तविक जीवन में सर्वांगसम त्रिभुज— प्राचीन समय से आधुनिक समय तक सर्वांगसम त्रिभुजों को अनेक निर्माणों और अभिविन्यासों (डिजाइनों) में देखा जा सकता है। यहाँ कुछ उदाहरण दिए गए हैं।

पेरिस में विश्व प्रसिद्ध लूव्र संग्रहालय

मिस्र का विश्व प्रसिद्ध गीजा पिरामिड

डोम का डिजाइन



रंगोली डिजाइन

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

रविंद्र सेतु या हावड़ा सेतु

आपने प्रत्येक चित्र में जो सर्वांगसम त्रिभुज देखे, उनकी व्याख्या कीजिए।

पता लगाइए

1. $\Delta AIR \cong \Delta FLY$ है। संगत शीर्षों, भुजाओं व कोणों को पहचानिए।
2. नीचे दी गई प्रत्येक स्थिति में दो त्रिभुजों की कुछ माप दी गई हैं। उन युग्मों की पहचान कीजिए, जिनमें त्रिभुज एक-दूसरे के सर्वांगसम हैं एवं इसका कारण भी बताइए। यदि त्रिभुज सर्वांगसम हैं तो उनकी सर्वांगसमता को दर्शाइए।

   (a) $AB = DE$
   $BC = EF$
   $CA = DF$

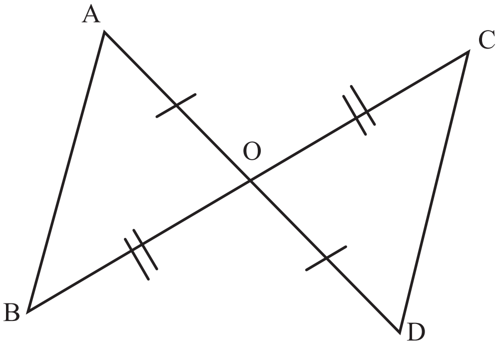
   (b) $AB = EF$
   $\angle A = \angle E$
   $AC = ED$

   (c) $AB = DF$
   $\angle B = \angle D = 90°$
   $AC = FE$

   (d) $\angle A = \angle D$
   $\angle B = \angle E$
   $AC = DF$

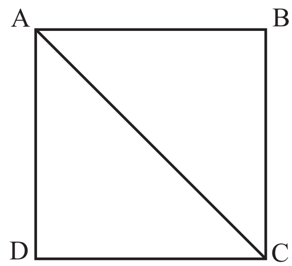
   (e) $AB = DF$
   $\angle B = \angle F$
   $AC = DE$

3. दिया गया है कि $OB = OC$ और $OA = OD$ है। प्रदर्शित कीजिए कि AB, CD के समानांतर है। [**संकेत—** इन दो रेखाओं के लिए AD एक तिर्यक प्रतिच्छेदी रेखा है। क्या कोई बराबर एकांतर कोण है?]



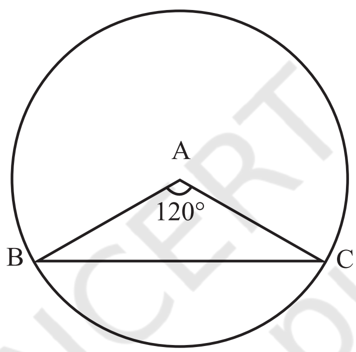
Reprint 2026-27

4. ABCD एक वर्ग है। दर्शाइए कि $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ है। क्या ΔABC, ΔCDA के सर्वांगसम भी है?

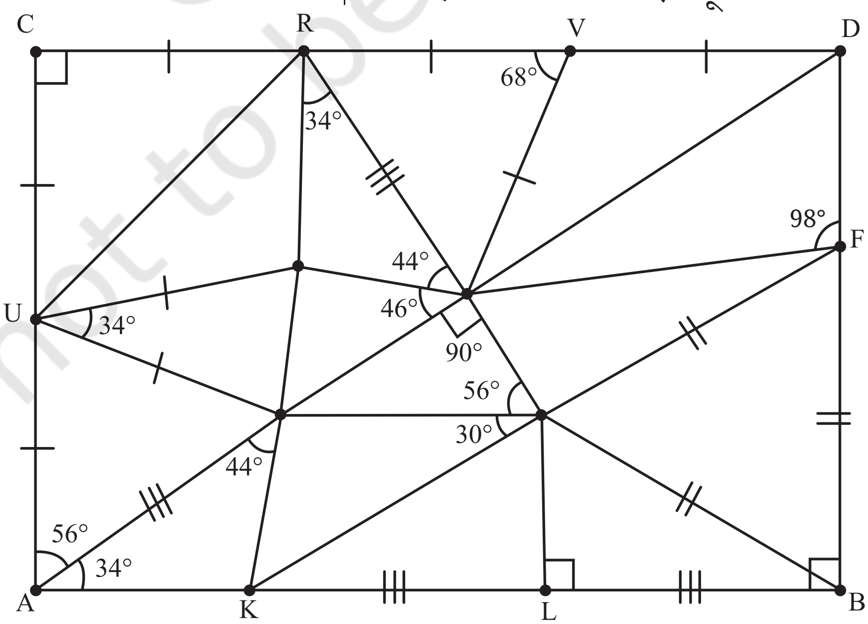


ऐसे दो त्रिभुजों के कुछ अन्य उदाहरण दीजिए जहाँ एक त्रिभुज दो भिन्न प्रकारों से दूसरे त्रिभुज के सर्वांगसम हो, जैसा कि ऊपर दी गई स्थिति में है। क्या आप दो त्रिभुजों का एक ऐसा उदाहरण दे सकते हैं जहाँ एक त्रिभुज छह भिन्न प्रकारों से दूसरे त्रिभुज के सर्वांगसम हो?

5. यदि A वृत्त का केंद्र हो तो $\angle B$ व $\angle C$ ज्ञात कीजिए।



6. नीचे दिए गए चित्र में अज्ञात कोणों को ज्ञात कीजिए। हम जिस परिपाटी का अनुसरण करते आ रहे हैं उसके अनुसार सभी रेखाखंड जिन्हें एक बार '|' से चिह्नित किया गया है, वे एक-दूसरे के समान हैं एवं वे सभी रेखाखंड जिन्हें दो बार '|' से चिह्नित किया गया है वे एक-दूसरे के समान हैं इत्यादि।



© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

सारांश

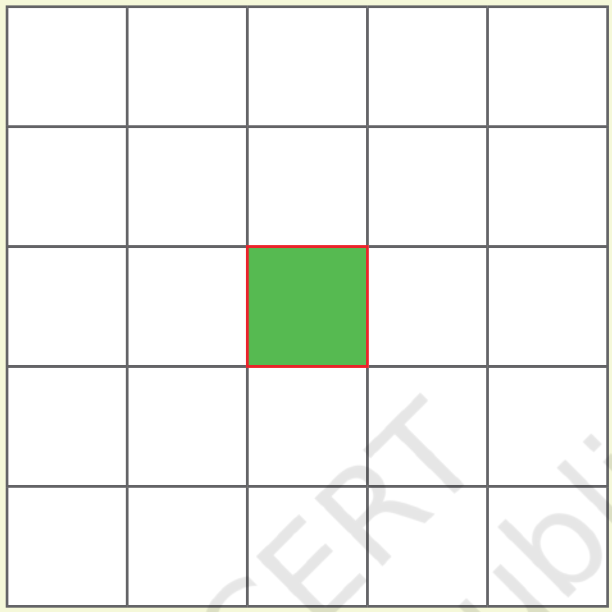
- आकृतियाँ जिनके आकार और आमाप समान होते हैं, वे सर्वांगसम आकृतियाँ कहलाती हैं। इन आकृतियों को अध्यारोपित करने पर वे एक-दूसरे को पूरी तरह से ढक लेती हैं।
- सर्वांगसमता की जाँच करते समय एक आकृति को दूसरी आकृति पर अध्यारोपित करके एक-दूसरे को पूर्णतया ढकने के लिए घुमाया या पलटा जा सकता है।
- जब दो त्रिभुजों की तीनों भुजाएँ आपस में समान हों तब **भुजा-भुजा-भुजा (SSS)** प्रतिबंध संतुष्ट होता है। SSS प्रतिबंध सर्वांगसमता सुनिश्चित करता है।
- जब एक त्रिभुज की दो भुजाएँ एवं उनके अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं एवं उनके अंतर्गत कोण के समान हो तब **भुजा-कोण-भुजा (SAS)** प्रतिबंध संतुष्ट होता है। SAS प्रतिबंध भी सर्वांगसमता सुनिश्चित करता है।
- जब एक त्रिभुज के दो कोण और उनके अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण और उनके अंतर्गत भुजा के समान हो तब **कोण-भुजा-कोण (ASA)** प्रतिबंध संतुष्ट होता है। ASA प्रतिबंध सर्वांगसमता सुनिश्चित करता है। सर्वांगसमता तब भी होती है जब भुजा, कोणों के अंतर्गत आने वाली भुजा न हो। इसे **कोण-कोण-भुजा (AAS)** प्रतिबंध कहा जाता है।
- एक समकोण त्रिभुज में समकोण की सम्मुख भुजा **कर्ण** कहलाती है।
- जब एक समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कर्ण दूसरे समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कर्ण के समान हो तब **समकोण-कर्ण-भुजा (RHS)** प्रतिबंध संतुष्ट होता है। RHS प्रतिबंध भी सर्वांगसमता सुनिश्चित करता है।
- यदि दो त्रिभुजों में दो भुजाएँ और उनके अंतर्गत न आने वाला कोण समान हो तो आवश्यक नहीं है कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हों।
- किसी भी त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।
- किसी भी समबाहु त्रिभुज में सभी कोणों की माप 60° होती है।

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

अभिव्यक्ति अभियंता!

रेखाएँ खींचिए और सफेद वर्गों वाले क्षेत्र को 6 छोटे सर्वांगसम क्षेत्रों में विभाजित कीजिए।



not to be republished NCERT