2 पूर्णांकों के साथ संक्रियाएँ

0790CH02

2.1 पूर्णांकों का त्वरित पुनरावलोकन

राकेश की पहेली— संख्या खेल

? राकेश आपको एक चुनौती देता है।
वह कहता है, "मैंने दो संख्याएँ सोची हैं।"
"उनका **योगफल 25** और **अंतर 11** है।"

? क्या आप मुझे वे दो संख्याएँ बता सकते हैं?

आपको किसी भी सूत्र का प्रयोग करने की आवश्यकता नहीं है। केवल संख्याओं के भिन्न-भिन्न युग्म सोचिए और फिर जाँच कीजिए कि—

1. क्या दोनों संख्याओं का योगफल 25 है?
2. क्या उनका अंतर 11 है?

(स्मरण रखिए— अंतर का अर्थ है, पहली संख्या – दूसरी संख्या।)

अपने अनुमान को इस प्रकार लिखिए—

पहली संख्या	दूसरी संख्या	योगफल	अंतर
10	15	25	–5
20	5	25	15
19	6	25	13
18	7	**25**	**11**

? क्या आपको सही युग्म प्राप्त हुआ?

? अब जब आपको सही युग्म प्राप्त हो गया है तो राकेश आपको एक दूसरी चुनौती देता है—
"दो ऐसी संख्याएँ सोचिए जिनका **योगफल 25** हो, परंतु **अंतर –11** हो।"

इसी विधि का उपयोग करते हुए संख्याओं के अलग-अलग युग्म सोचिए और तालिका को पुनः भरिए। आप देखेंगे कि यदि आप पहली चुनौती में संख्याओं को परस्पर बदल दें तो आप

© NCERT not to be republished

राकेश की दूसरी चुनौती का उत्तर प्राप्त कर लेंगे। अर्थात पहली संख्या 7 और दूसरी संख्या 18 है!

? पता लगाइए

आइए, संख्याओं के योगफल और अंतर से कुछ और युग्म ज्ञात करने का प्रयास करते हैं—

(a) योगफल = 27, अंतर = 9 (b) योगफल = 4, अंतर = 12

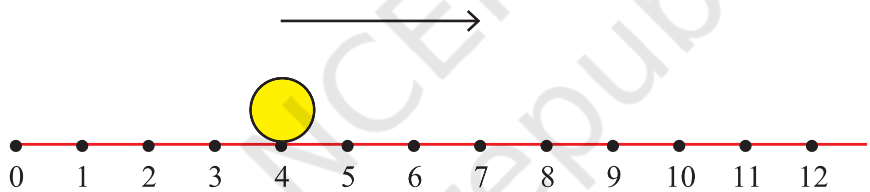
(c) योगफल = 0, अंतर = 10 (d) योगफल = 0, अंतर = – 10

(e) योगफल = – 7, अंतर = – 1 (f) योगफल = – 7, अंतर = – 13

एक साथी चुनिए और बारी-बारी से यह खेल खेलिए। प्रत्येक बारी में, आप में से कोई एक साथी दो पूर्णांक सोच सकता है और उनका योगफल और अंतर बता सकता है; दूसरे व्यक्ति को फिर उन पूर्णांकों को ज्ञात करना होगा। कुछ अभ्यास के बाद, आप अपने परिवार के सदस्यों को यह जादू दिखा सकते हैं और उन्हें आश्चर्यचकित कर सकते हैं!

कैरम के सिक्के से पूर्णांकों को समझना

कैरम के एक सिक्के को दाईं ओर ले जाने के लिए धकेला जाता है। प्रत्येक धक्का सिक्के को बल के आधार पर दाईं ओर कुछ निश्चित इकाइयों की दूरी तक ले जाता है।

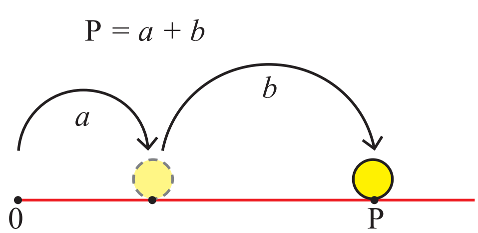


? प्रारंभ में सिक्का बिंदु 0 पर है। यदि सिक्के पर दो बार धक्का दिया जाता है, पहले धक्के से वह 4 इकाई और दूसरे धक्के से 3 इकाई विस्थापित होता है तो सिक्के की अंतिम स्थिति क्या होगी?

यह स्पष्ट है कि सिक्का 0 से 4 + 3 = 7 इकाई दूर होगा।

? यदि सिक्के पर दो बार धक्का दिया जाता है और यदि दोनों विस्थापन ज्ञात हों तो क्या आप सिक्के की अंतिम स्थिति का सूत्र ज्ञात कर सकते हैं?

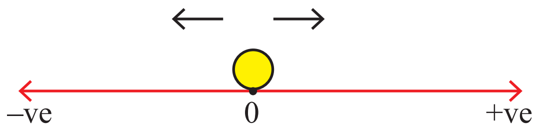
यदि पहले धक्के से सिक्का 'a' इकाई दाईं ओर विस्थापित होता है और यदि दूसरे धक्के से सिक्का 'b' इकाई दाईं ओर विस्थापित होता है तो अंतिम स्थिति P = $a + b$ होगी, जहाँ P प्रारंभिक बिंदु 0 से सिक्के की दूरी है।



© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

अब, मान लीजिए कि सिक्के को किसी भी दिशा— बाईं या दाईं में विस्थापित करने के लिए धकेला जा सकता है।

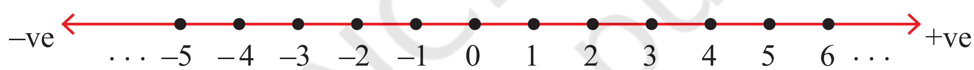


? प्रारंभ में सिक्का बिंदु 0 पर है। यदि इस पर दो बार धक्का दिया जाता है (दोनों धक्कों की दिशा समान या भिन्न भी हो सकती है), तो क्या आप सिक्के की अंतिम स्थिति के लिए कोई सूत्र ज्ञात कर सकते हैं?

ऐसा करने की एक विधि यह है कि धक्कों की दिशाओं की विभिन्न स्थितियों पर विचार किया जाए—

- दोनों दाईं ओर,
- दोनों बाईं ओर,
- पहला दाईं ओर तथा दूसरा बाईं ओर, एवं
- पहला बाईं ओर तथा दूसरा दाईं ओर।

इस स्थिति को प्रभावी ढंग से प्रदर्शित करने की एक विधि धनात्मक और ऋणात्मक पूर्णांकों का उपयोग करना है। सबसे पहले आइए उस रेखा जिस पर सिक्का विस्थापित होता है, को एक संख्या रेखा के रूप में प्रदर्शित करते हैं।



आइए, दाईं ओर के विस्थापन को धनात्मक और बाईं ओर के विस्थापन को ऋणात्मक मानते हैं।

मान लीजिए कि पहली बार धकेलने पर सिक्का 0 से दाईं ओर 5 इकाई विस्थापित होता है तथा दूसरी बार धकेलने पर सिक्का बाईं ओर 7 इकाई विस्थापित होता है, तब हम विस्थापन इस प्रकार लेते हैं—

पहला विस्थापन = 5 इकाई

दूसरा विस्थापन = –7 इकाई

? सिक्के की अंतिम स्थिति क्या है?

इसे दोनों विस्थापनों का योगफल करके ज्ञात किया जा सकता है— $5 + (-7) = -2$

अतः सिक्का – 2 पर है अथवा यह 0 से 2 इकाई बाईं ओर है।

व्यापक रूप से, यदि पहली बार धकेलने पर सिक्का 'a' इकाई विस्थापित होता है (जो दाईं ओर धकेलने पर धनात्मक और बाईं ओर धकेलने पर ऋणात्मक होता है) और दूसरी बार धकेलने पर 'b' इकाई विस्थापित होता है (जो दाईं ओर धकेलने पर धनात्मक और बाईं ओर धकेलने पर ऋणात्मक होता है) तब दोनों बार धक्का देने के बाद अंतिम स्थिति 'P' पुनः $P = a + b$ होती है।

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

? इस नए निदर्श के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

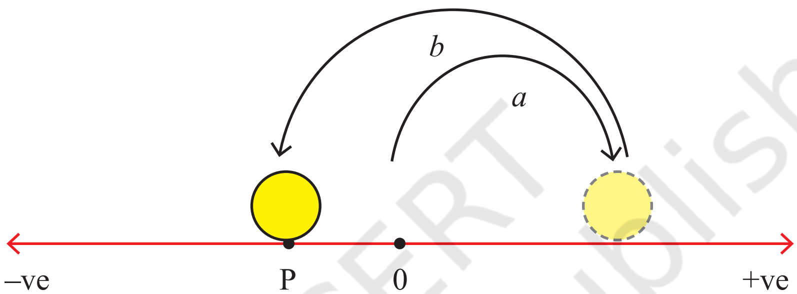
1. यदि पहला विस्थापन – 4 है और अंतिम स्थिति 5 है तो दूसरा विस्थापन क्या है?
2. यदि एक से अधिक बार सिक्के को धकेलने से 1, −2, 3, −4, ..., −10 के क्रम में विस्थापन होता है, तो सिक्के की अंतिम स्थिति क्या होगी?

विस्थापन को धनात्मक और ऋणात्मक दोनों संख्याओं के रूप में प्रदर्शित कर हम दो प्रकार की जानकारी प्राप्त कर सकते हैं— दूरी (परिमाण) एवं दिशा (दाईं ओर या बाईं ओर)। उदाहरण के लिए जब हम कहते हैं कि विस्थापन −4 है तो **परिमाण** 4 है और दिशा बाईं ओर है।

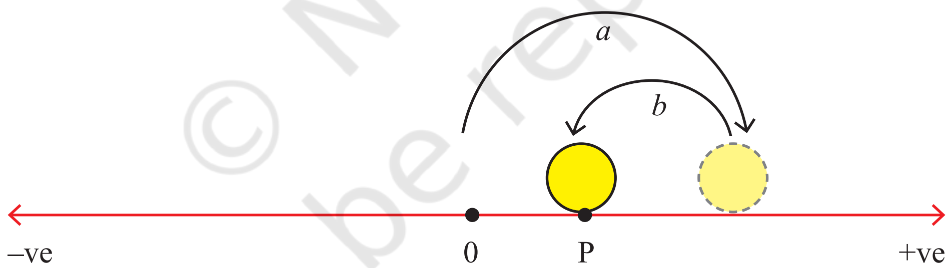
प्रयास कीजिए

? नीचे दिए गए चित्रों से आप a और b के परिमाणों की परस्पर तुलना करके क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं और उनकी दिशाएँ क्या हैं? स्मरण रखिए कि 0 से प्रारंभ करना है।

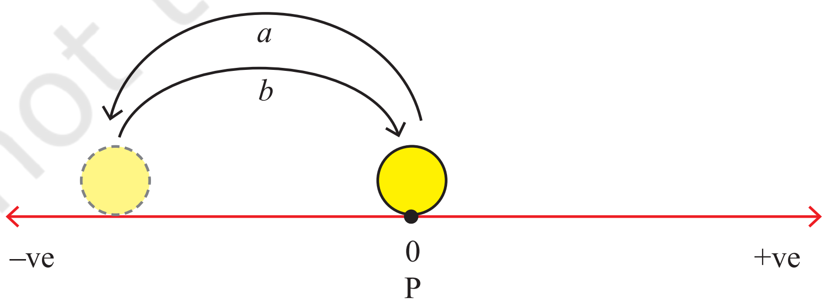
1.



2.



3.



© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

संख्या रेखा के साथ ही हमने पूर्णांकों को समझने के लिए टोकन निदर्श का उपयोग भी किया था। हमने कक्षा 6 में योग और घटाव करने के लिए इस निदर्श का उपयोग किया था। आइए, एक त्वरित पुनरावलोकन करते हैं। हमने धनात्मक 1 को दर्शाने के लिए हरे (+) टोकन और ऋणात्मक 1 अर्थात −1 को दर्शाने के लिए लाल (−) टोकन का उपयोग किया था। चूँकि ये एक-दूसरे को निरस्त कर देते हैं, अत: ये दोनों साथ में मिलकर शून्य बनाते हैं।

? (+7) − (+18) ज्ञात कीजिए।

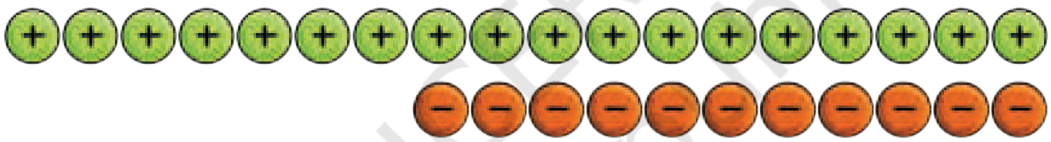
7 में से 18 घटाने अर्थात (+7) − (+18) के लिए हमें 7 धनात्मक टोकन में से 18 धनात्मक टोकन घटाने होंगे।

लेकिन 18 धनात्मक टोकन घटाने के लिए हमारे पास पर्याप्त टोकन उपलब्ध नहीं हैं!

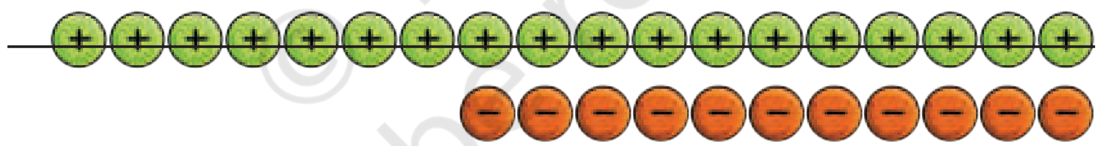
हम 18 धनात्मक टोकन घटा सकें इसके लिए पर्याप्त शून्य युग्म प्रविष्ट करते हैं।

? कितने शून्य युग्म?

हमारे पास 7 धनात्मक टोकन हैं और हमें 11 टोकन और चाहिए। इसलिए हमें 11 शून्य युग्म प्रविष्ट करने होंगे—



अब हम 18 धनात्मक टोकन हटा सकते हैं।



हमारे पास क्या शेष है? यहाँ 11 ऋणात्मक टोकन अर्थात −11 शेष हैं।

अत: 7 − 18 = −11

हमने यह भी देखा था कि किसी संख्या को घटाना उसके योज्य व्युत्क्रम का योग करने के समान होता है।

? टोकन का उपयोग करके निम्नलिखित कथनों को सिद्ध कीजिए।

गणित चर्चा

(a) 7 – 18 = 7 + (−18) (18 का योज्य व्युत्क्रम −18 है)

(b) 4 − (−12) = 4 + 12 (−12 का योज्य व्युत्क्रम 12 है)

शिक्षक हेतु टिप्पणी— दृष्टिबाधित विद्यार्थियों के लिए धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं के लिए भिन्न आकारों के टोकन का उपयोग किया जा सकता है।

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

किसी पूर्णांक a का योज्य व्युत्क्रम $-a$ के रूप में दर्शाया जाता है। अतः 18 का योज्य व्युत्क्रम $-(18) = -18$ के रूप में और -18 का योज्य व्युत्क्रम $-(-18) = 18$ के रूप में दर्शाया जाता है।

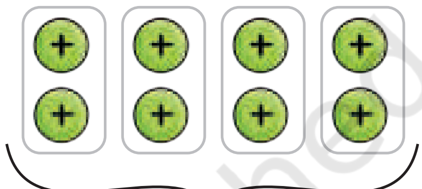
2.2 पूर्णांकों का गुणन

हमने पूर्णांकों के योग और घटाव को दर्शाने के लिए टोकन निदर्श का उपयोग किया। अब हम टोकन का उपयोग करके पूर्णांकों के गुणन को प्रदर्शित करने की विधि जानेंगे।

मान लीजिए कि हम चित्र में दिखाए अनुसार एक खाली थैले में कुछ धनात्मक टोकन रखते हैं।

? थैले में अब कितने धनात्मक टोकन हैं?

थैले में 8 धनात्मक टोकन हैं। हम इसे थैले में 2 धनात्मक टोकन को 4 बार रखने के रूप में भी समझ सकते हैं। अतः संक्रिया इस प्रकार है, $4 \times 2 = 8$



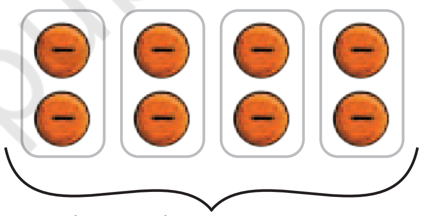
दो हरे टोकन 4 बार = 8

$4 \times 2 = 8$

हम पहले भी इस प्रकार के धनात्मक पूर्णांकों का गुणन देख चुके हैं। क्या हम $4 \times (-2)$ जैसे गुणन को दर्शाने के लिए टोकन का उपयोग कर सकते हैं? आइए, देखते हैं यह कैसे होगा।

प्रत्येक नई संक्रिया के लिए हम एक खाली थैले से ही प्रारंभ करेंगे।

$4 \times (-2)$ को एक खाली थैले में 2 ऋणात्मक टोकन को 4 बार रखने के रूप में समझा जा सकता है। हम ऋणात्मक संख्याओं के लिए लाल टोकन का उपयोग करते हैं, अत: हम एक खाली थैले में 2 ऋणात्मक टोकन को 4 बार रखते हैं।



दो लाल टोकन 4 बार = -8

$4 \times (-2) = -8$

गुणक

गुण्य

गुणनफल

थैले में अब 8 लाल टोकन या 8 ऋणात्मक टोकन हैं अर्थात -8 है।

$4 \times (-2) = (-8)$

? इसी प्रकार $4 \times (-6)$ और $9 \times (-7)$ के मान ज्ञात कीजिए। हम $(-4) \times 2$ की व्याख्या कैसे कर सकते हैं?

जब गुणक धनात्मक होता है तो हम थैले में टोकन रखते हैं। जब गुणक ऋणात्मक होता है तो हम थैले से टोकन **बाहर निकालते** हैं।

अतः $(-4) \times 2$ के लिए हमें थैले से दो धनात्मक अथवा दो हरे टोकन 4 बार निकालने होंगे।

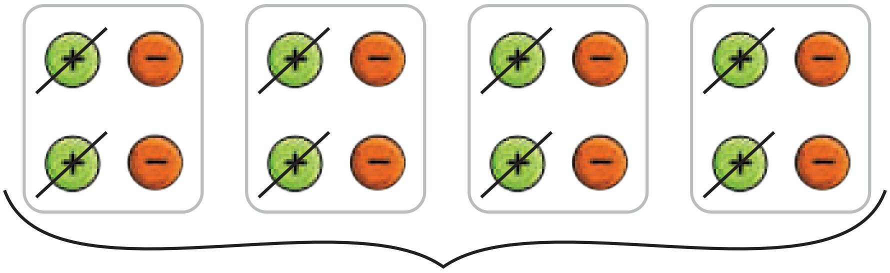
© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

गणित चर्चा

? हम लाल टोकनों के स्थान पर हरे टोकन निकालने का प्रयास क्यों कर रहे हैं?

किंतु थैले में कोई भी टोकन नहीं हैं क्योंकि हम एक खाली थैले से प्रारंभ करते हैं। घटाव की स्थिति में एक खाली थैले से 2 धनात्मक टोकन निकालने के लिए हमें पहले 2 शून्य युग्म टोकन अंदर रखने होंगे और फिर 2 धनात्मक टोकन निकालने होंगे। हमें यह प्रक्रिया 4 बार दोहरानी होगी।



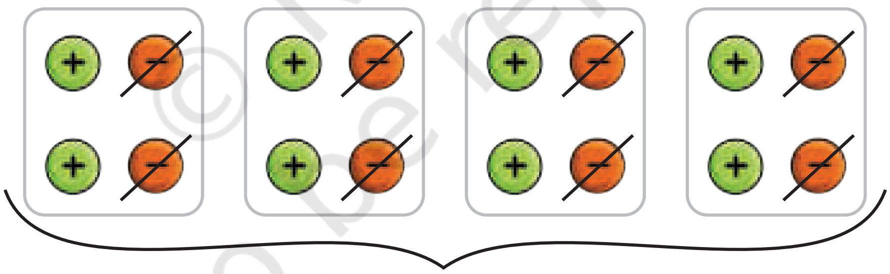
शून्य युग्मों में से 2 हरे टोकन 4 बार निकालिए

$(-4) \times 2 = -8$

धनात्मक टोकन हटाने के बाद थैले में 8 ऋणात्मक टोकन बचते हैं, जो कि –8 है। यह दर्शाता है कि $(-4) \times 2 = -8$ है।

? क्या होता है यदि गुणन में दोनों पूर्णांक ऋणात्मक होते हैं? हम टोकन से $(-4) \times (-2)$ को कैसे दर्शाएँगे?

$(-4) \times (-2)$ के लिए हमें थैले से 2 ऋणात्मक टोकन 4 बार हटाने होंगे। चूँकि थैले में कोई लाल टोकन नहीं हैं, अतः हमें 2 शून्य युग्म रखने होंगे और फिर 2 ऋणात्मक टोकन हटाने की आवश्यकता है और यह प्रक्रिया हमें 4 बार दोहरानी होगी।



शून्य युग्मों में से 2 लाल टोकन 4 बार निकालिए

$(-4) \times (-2) = 8$

थैले में 8 धनात्मक टोकन शेष हैं, जो कि + 8 है।

अतः, $-4 \times (-2) = +8$

अब तक, हमने टोकनों का उपयोग करके निम्नलिखित परिणाम स्थापित किए हैं—

$4 \times 2 = 8,$

$4 \times (-2) = -8,$

$(-4) \times 2 = -8$ और

$(-4) \times (-2) = 8$

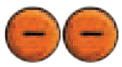
© NCERT not to be republished

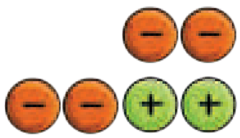
Reprint 2026-27

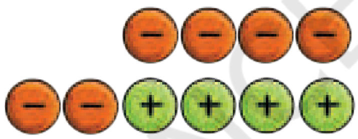
? पता लगाइए

1. टोकन व्यवस्था का उपयोग करते हुए निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—
   (a) $3 \times (-2)$ (b) $(-5) \times (-2)$
   (c) $(-4) \times (-1)$ (d) $(-7) \times 3$
2. यदि $123 \times 456 = 56088$ है तो बिना गणना किए निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—
   (a) $(-123) \times 456$ (b) $(-123) \times (-456)$
   (c) $(123) \times (-456)$
3. दो पूर्णांकों को गुणा करने के लिए एक सरल नियम बनाने का प्रयास कीजिए।

   निम्नलिखित टोकनों द्वारा दर्शाई गई संख्याओं पर विचार कीजिए—

(a) 

(b) 

(c) 

हम देख सकते हैं कि ये सभी संख्या (-2) को दर्शाते हैं। अब इन सभी टोकन समूहों में से प्रत्येक को 4 बार लीजिए, अर्थात प्रत्येक समूह को एक खाली थैले में 4 बार रखिए।

? प्रत्येक स्थिति में हमें अंतिम उत्तर के रूप में कौन-सा पूर्णांक प्राप्त होता है? क्या हमें भिन्न-भिन्न उत्तर इसलिए प्राप्त होते हैं क्योंकि समूह भिन्न-भिन्न दिखते हैं अथवा एक ही उत्तर इसलिए प्राप्त होता है क्योंकि वे सभी -2 को दर्शाते हैं?

? 5×4 के लिए 4 के संगत विभिन्न टोकन समूह लेकर इसकी जाँच कीजिए।

हमने देखा है कि -4×2 वह संख्या है जो खाली थैले से 2 धनात्मक टोकन को 4 बार निकालने के पश्चात प्राप्त होती है।

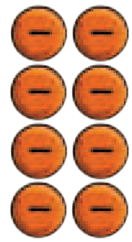
हम यह जानते हैं कि किसी संख्या को हटाना या घटाना उसके व्युत्क्रम को जोड़ने के समान होता है।

इसका उपयोग करते हुए, क्या टोकनों को हटाने के स्थान पर टोकनों को जोड़ने की प्रक्रिया द्वारा -4×2 को परिभाषित किया जा सकता है?

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

चूँकि 2 धनात्मक टोकनों को हटाना, 2 ऋणात्मक टोकनों जो जोड़ने के समान है, अतः -4×2 को खाली थैले में 2 ऋणात्मक टोकनों को 4 बार रखकर भी प्राप्त किया जा सकता है।



$(-4) \times 2$

पूर्णांक गुणन में प्रतिरूप

हमने पूर्णांकों के गुणन का अध्ययन उन स्थितियों में किया है, जब गुणक धनात्मक है, जब गुणक ऋणात्मक है, जब गुण्य धनात्मक है और जब गुण्य ऋणात्मक है। इस समझ का उपयोग करते हुए गुणन का एक क्रम बनाइए और बनने वाले प्रतिरूप का अवलोकन कीजिए।

? आपने इस प्रतिरूप में क्या अवलोकित किया है? क्या आप इसका वर्णन कर सकते हैं?

हम देख सकते हैं कि जब गुण्य धनात्मक होता है तो गुणक में प्रत्येक इकाई की **कमी** के लिए गुणनफल में गुण्य के समान **कमी** हो जाती है।

$4 \times 3 = 12$
–3
$3 \times 3 = 9$
–3
$2 \times 3 = 6$
–3
$1 \times 3 = 3$
–3
$0 \times 3 = 0$

? क्या यह प्रतिरूप तब भी चलता रहेगा जब गुणक शून्य से नीचे जाकर ऋणात्मक संख्या बन जाता है?

जी हाँ! यही प्रतिरूप तब भी बना रहता है जब गुणक ऋणात्मक संख्या बन जाता है।

$4 \times 3 = 12$
–3
$3 \times 3 = 9$
–3
$2 \times 3 = 6$
–3
$1 \times 3 = 3$
–3
$0 \times 3 = 0$
–3
$-1 \times 3 = -3$
–3
$-2 \times 3 = -6$
–3
$-3 \times 3 = -9$

? जब गुण्य एक ऋणात्मक पूर्णांक हो तब क्या प्रतिरूप होगा?

$4 \times (-3) = -12$
+3
$3 \times (-3) = -9$
+3
$2 \times (-3) = -6$
+3
$1 \times (-3) = -3$
+3
$0 \times (-3) = 0$

यह प्रतिरूप पिछले प्रतिरूप का व्युत्क्रम ही है। जब गुण्य ऋणात्मक होता है तो गुणक में प्रत्येक इकाई की **कमी** के लिए गुणनफल में गुण्य के समान **वृद्धि** हो जाती है।

? क्या यह प्रतिरूप तब भी चलता रहेगा जब गुणक शून्य से नीचे जाकर ऋणात्मक पूर्णांक बन जाता है? हाँ!

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

गुणक के ऋणात्मक होने पर भी यही प्रतिरूप देखा जाता है। जब गुण्य ऋणात्मक होता है तो गुणक में प्रत्येक इकाई की **कमी** होने पर गुणनफल में गुण्य के समान **वृद्धि** हो जाती है।

हम इन प्रतिरूपों से यह देख सकते हैं कि जो तथ्य धनात्मक पूर्णांकों के गुणन के लिए सत्य है वह ऋणात्मक पूर्णांकों के गुणन के लिए भी सत्य है।

$4 \times (-3) = -12$
+3
$3 \times (-3) = -9$
+3
$2 \times (-3) = -6$
+3
$1 \times (-3) = -3$
+3
$0 \times (-3) = 0$
+3
$(-1) \times (-3) = 3$
+3
$(-2) \times (-3) = 6$
+3
$(-3) \times (-3) = 9$

आइए, पूर्णांकों के गुणन की इस समझ के साथ 3 के पहाड़े को देखते हैं जब गुणक और गुण्य धनात्मक हैं और जब वे ऋणात्मक हैं।

$1 \times 3 = 3$	$-1 \times 3 = -3$	$1 \times -3 = -3$	$-1 \times -3 = 3$
$2 \times 3 = 6$	$-2 \times 3 = -6$	$2 \times -3 = -6$	$-2 \times -3 = 6$
$3 \times 3 = 9$	$-3 \times 3 = -9$	$3 \times -3 = -9$	$-3 \times -3 = 9$
$4 \times 3 = 12$	$-4 \times 3 = -12$	$4 \times -3 = -12$	$-4 \times -3 = 12$
$5 \times 3 = 15$	$-5 \times 3 = -15$	$5 \times -3 = -15$	$-5 \times -3 = 15$
$6 \times 3 = 18$	$-6 \times 3 = -18$	$6 \times -3 = -18$	$-6 \times -3 = 18$
$7 \times 3 = 21$	$-7 \times 3 = -21$	$7 \times -3 = -21$	$-7 \times -3 = 21$
$8 \times 3 = 24$	$-8 \times 3 = -24$	$8 \times -3 = -24$	$-8 \times -3 = 24$
$9 \times 3 = 27$	$-9 \times 3 = -27$	$9 \times -3 = -27$	$-9 \times -3 = 27$
$10 \times 3 = 30$	$-10 \times 3 = -30$	$10 \times -3 = -30$	$-10 \times -3 = 30$

हम निम्नलिखित तथ्य अवलोकित करते हैं—

- गुणक और गुण्य के चिह्नों में परिवर्तन करने पर गुणनफल के परिमाण में कोई परिवर्तन नहीं होता है।
- जब गुणक और गुण्य दोनों **धनात्मक** हों तो गुणनफल भी **धनात्मक** होता है।
- जब गुणक और गुण्य दोनों **ऋणात्मक** हों तो गुणनफल **धनात्मक** होता है।
- जब गुणक या गुण्य में से कोई एक **धनात्मक** हो और दूसरा **ऋणात्मक** हो तो उनका गुणनफल **ऋणात्मक** होता है।

पता लगाइए

निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(a) $4 \times (-3)$ (b) $(-6) \times (-3)$

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

(c) $(-5) \times (-1)$ (d) $(-8) \times 4$

(e) $(-9) \times 10$ (f) $10 \times (-17)$

व्यंजक $1 \times a$ पर विचार कीजिए। हम जानते हैं कि सभी धनात्मक पूर्णांकों के लिए इस व्यंजक का मान 'a' होता है।

? क्या यह सभी ऋणात्मक पूर्णांकों के लिए भी सत्य है?

टोकन निदर्श का प्रयोग करते हुए हम थैले में केवल एक बार 'a' ऋणात्मक टोकन रखते हैं। इसके बाद, थैले में 'a' ऋणात्मक टोकन हो जाते हैं। उदाहरण के लिए, यदि 'a' का मान -5 (5 ऋणात्मक) है तो थैले में 5 ऋणात्मक टोकन होंगे जो कि -5 है। अतः,

$1 \times a = a$ (सभी धनात्मक अथवा ऋणात्मक पूर्णांकों a के लिए)

व्यंजक $-1 \times a$ का मान क्या है?

जब 'a' धनात्मक होता है तो पूर्णांकों के गुणन पर हमारे अवलोकन के अनुसार, गुणनफल का परिमाण 'a' के समान ही होता है, परंतु वह ऋणात्मक होता है।

जब 'a' ऋणात्मक होता है तो गुणनफल का परिमाण 'a' के समान होता है, परंतु वह धनात्मक होता है।

प्रत्येक स्थिति में हम देखते हैं कि गुणनफल, गुण्य 'a' का योज्य व्युत्क्रम है। इस प्रकार,

$-1 \times a = -a$ (सभी पूर्णांकों a के लिए)

? पूर्णांकों की स्थिति में, क्या गुणक और गुण्य को परस्पर परिवर्तित करने पर भी गुणनफल समान रहता है? कुछ संख्याओं का प्रयोग करके इसका प्रयास कीजिए।

गुणन के निम्नलिखित युग्मों का अवलोकन कीजिए (आवश्यकतानुसार रिक्त स्थान भी भरिए)—

$3 \times -4 = -12$	$-4 \times 3 = -12$
$-30 \times 12 =$ ______	$12 \times -30 =$ ______
$-15 \times -8 = 120$	$-8 \times -15 = 120$
$14 \times -5 = -70$	$-5 \times$ ______ $= -70$

? आपने गुणन कथनों के इन युग्मों में क्या अवलोकित किया?

गुणक और गुण्य को परस्पर परिवर्तित करने पर गुणनफल समान रहता है। पूर्व में हमने योगफल में भी ऐसा ही गुण देखा है।

? क्या यह सदैव होता है?

गुणक और गुण्य को परस्पर परिवर्तित करने पर गुणनफल के परिमाण में कोई परिवर्तन नहीं होता है। ऐसा इसलिए है क्योंकि गुणनफल का परिमाण केवल गुणक और गुण्य के परिमाण पर निर्भर करता है और हम यह जानते हैं कि गुणा की जा रही दो धनात्मक पूर्णांक संख्याओं को परस्पर परिवर्तित करने पर गुणनफल में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

Reprint 2026-27

? क्या गुणक और गुण्य को परस्पर परिवर्तित करने पर गुणनफल के चिह्न में कोई परिवर्तन होता है?

यदि दोनों धनात्मक हों या दोनों ऋणात्मक हों तो गुणनफल, परिवर्तन से पहले और बाद में धनात्मक ही रहता है। अतः इस स्थिति में चिह्न में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

यदि एक धनात्मक और दूसरा ऋणात्मक हो तो गुणनफल, परिवर्तन से पहले और बाद में ऋणात्मक ही रहता है। अतः इस स्थिति में भी चिह्न में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

अतः गुणक और गुण्य को परस्पर परिवर्तित करने पर गुणनफल में कोई परिवर्तन नहीं होता है चाहे उनके चिह्न कुछ भी हों। इस प्रकार, पूर्णांकों के लिए गुणन **क्रमविनिमेय** होता है।

व्यापक रूप से, किन्हीं दो पूर्णांकों a और b के लिए हम कह सकते हैं कि

$$a \times b = b \times a$$

धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं के गुणन और विभाजन के लिए ब्रह्मगुप्त के नियम

ब्रह्मगुप्त ने अपने *ब्राह्मस्फुट सिद्धांत* (628 सामान्य संवत्) में पूर्णांकों के योगफल और घटाव के समान ही, पूर्णांकों के गुणन और विभाजन के लिए भी स्पष्ट नियम बताए हैं। उन्होंने धनात्मक मानों के लिए धन-संपत्ति (धन) और ऋणात्मक मानों के लिए ऋणभार (ऋण) की अवधारणाओं का प्रयोग किया था। ब्रह्मगुप्त ने अपने *ब्राह्मस्फुट सिद्धांत* (18.30 – 32) में लिखा है—

> "दो धन-संपत्तियों का गुणनफल या भागफल एक धन-संपत्ति होता है।
> दो ऋणभारों का गुणनफल या भागफल एक धन-संपत्ति होता है।
> एक ऋणभार और एक धन-संपत्ति का गुणनफल या भागफल एक ऋणभार होता है।
> एक धन-संपत्ति और एक ऋणभार का गुणनफल या भागफल एक ऋणभार होता है।"

यह पहली बार था जब धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं के गुणन और भाग के नियम स्पष्ट रूप से बताए गए थे और यह अंकगणित और बीजगणित के विकास में एक महत्वपूर्ण चरण था।

? **उदाहरण 1**— एक परीक्षा में 50 बहुविकल्पीय प्रश्न दिए गए हैं। प्रत्येक सही उत्तर के लिए 5 अंक और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए 2 ऋणात्मक अंक दिए जाते हैं। यदि माला ने 30 सही उत्तर और 20 गलत उत्तर दिए हैं तो उसे कुल कितने अंक प्राप्त होंगे?

हल— हम धनात्मक और ऋणात्मक पूर्णांकों का उपयोग करते हैं। प्रत्येक सही उत्तर के लिए अंक धनात्मक पूर्णांक 5 है और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए अंक ऋणात्मक पूर्णांक – 2 है।

30 सही उत्तरों के अंक = 30 × 5

20 गलत उत्तरों के अंक = 20 × (– 2)

अतः 30 सही उत्तरों और 20 गलत उत्तरों के लिए अंकगणितीय व्यंजक इस प्रकार है—

$$30 \times 5 + 20 \times (-2)$$
$$= 150 + (-40)$$
$$= 110$$

माला को परीक्षा में 110 अंक प्राप्त हुए।

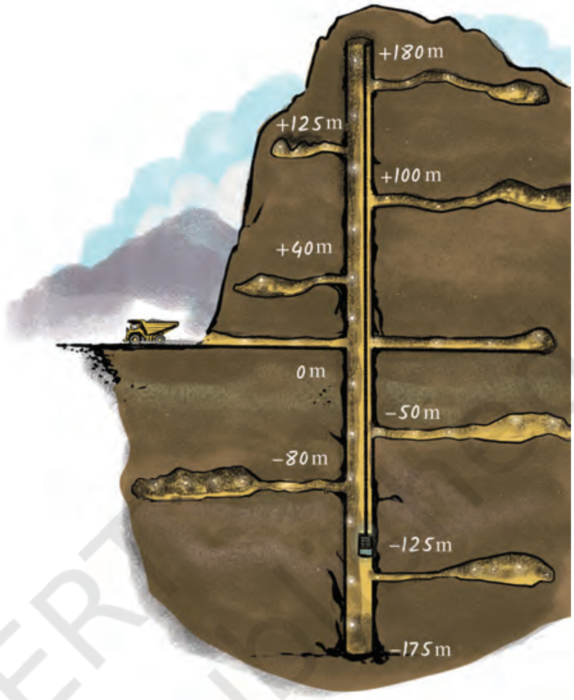
Reprint 2026-27

परीक्षा में अधिकतम संभावित अंक क्या हैं? और न्यूनतम संभावित अंक क्या हैं?

उदाहरण 2— एक खनन कूप में एक लिफ्ट (उत्थापक) है जो भूमि के ऊपर और नीचे चलती है। भूमि के ऊपर लिफ्ट की स्थिति को धनात्मक पूर्णांकों के रूप में और भूमि के नीचे की स्थिति को ऋणात्मक पूर्णांकों के रूप में दर्शाया गया है।

(a) लिफ्ट 3 मीटर प्रति मिनट की गति से चलती है। यदि यह भूमि की सतह (0) से कूप में उतरती है तो एक घंटे बाद इसकी स्थिति क्या होगी?

(b) यदि यह भूमि के 15 m ऊपर से नीचे उतरना प्रारंभ करती है तो 45 मिनट बाद इसकी स्थिति क्या होगी?



हल—

प्रश्न के भाग (a) का हल—

विधि 1

हम इसे घटाव का उपयोग करके प्रदर्शित कर सकते हैं।

लिफ्ट 3 मीटर प्रति मिनट की गति से चलती है। अतः एक घंटे में यह 180 (60 × 3) मीटर चलती है। यदि यह भूमि की सतह (0 मीटर) से नीचे उतरना प्रारंभ हुई तो हमें 0 में से 180 घटाना चाहिए।

$$0 - 180 = (-180)$$

अतः यह (–180) मीटर की स्थिति तक पहुँचेगी, जो कि भूमि से 180 मीटर नीचे है।

विधि 2

मान लीजिए कि लिफ्ट की गति और दिशा को एक पूर्णांक (मीटर प्रति मिनट) से दर्शाया गया है। ऊपर जाते समय यह +3 है और नीचे जाते समय (– 3) है।

चूँकि लिफ्ट नीचे जा रही है अत: विस्थापन (–3) मीटर प्रति मिनट है। यह लिफ्ट 60 मिनट तक चलती है। अतः लिफ्ट

$$60 \times (-3) = (-180)$$ मीटर दूरी तय करती है।

60 मिनट बाद लिफ्ट की स्थिति भूमि से 180 मीटर नीचे होगी।

Reprint 2026-27

? पिछले पृष्ठ पर वर्णित विधि 1 का प्रयोग करते हुए भाग (b) का हल ज्ञात कीजिए।

विधि 2 का प्रयोग करके भाग (b) का हल—

प्रारंभिक स्थिति = 15

तय की गई दूरी = लिफ्ट 45 मिनट तक 3 मीटर प्रति मिनट की गति से नीचे जाती है अर्थात $(45\times(-3))$ दूरी। अतः,

अंतिम स्थिति $= 15 + (45 \times (-3))$

$= 15\ (-(45 \times 3))$

$= 15 + (-135)$

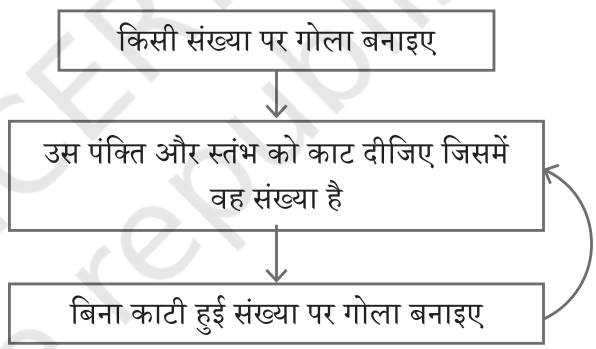
$= (-120)$

लिफ्ट भूमि से 120 मीटर नीचे होगी।

पूर्णांकों का जादुई जाल

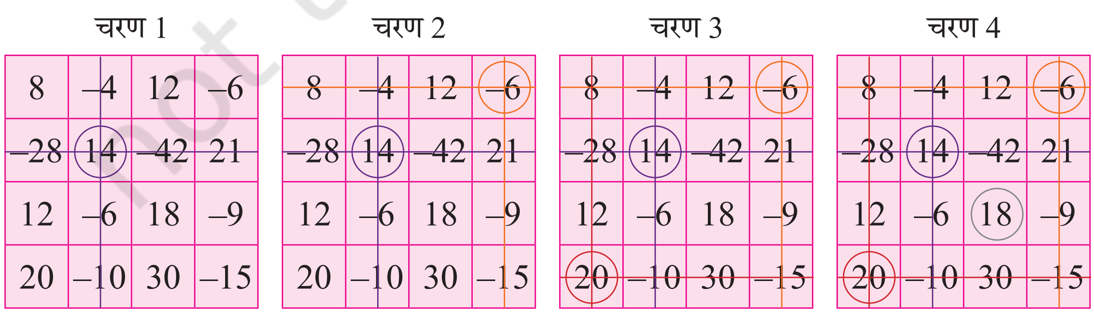
? नीचे कुछ संख्याओं वाला एक जाल दिया गया है। जब तक कोई संख्या शेष न रह जाए तब तक नीचे दर्शाए गए चरणों का पालन कीजिए।

8	– 4	12	– 6
– 28	14	– 42	21
12	– 6	18	– 9
20	– 10	30	– 15



जब अंतिम बिना काटी हुई संख्या शेष रह जाए तब रुक जाइए। अब गोला बनाई गई संख्याओं का गुणन कीजिए।

एक उदाहरण नीचे दिया गया है।



© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

भिन्न-भिन्न संख्याओं को लेकर पुनः प्रयास कीजिए। आपको क्या गुणनफल प्राप्त हुआ? क्या यह पहली बार से अलग था? भिन्न-भिन्न संख्याओं के साथ और अधिक बार प्रयास कीजिए! नीचे दिए गए जाल के साथ भी यही खेल खेलिए। आपको क्या उत्तर प्राप्त हुआ?

– 20	– 4	– 12	– 28
– 5	– 1	– 3	7
– 15	– 3	– 9	21
10	2	6	– 14

इन जालों में क्या विशेष बात है? क्या जादू संख्याओं में है या उनको व्यवस्थित करने के तरीके में अथवा दोनों में? क्या आप ऐसे कुछ और जाल बना सकते हैं?

प्रयास कीजिए

पूर्णांकों का विभाजन

हमने पूर्व में देखा है कि भाग को गुणन में कैसे परिवर्तित किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, (– 100) ÷ 25 को '25 में ऐसी कौन-सी संख्या का गुणन किया जाना चाहिए कि गुणनफल (– 100) प्राप्त हो?' के रूप में दर्शाया जा सकता है। अर्थात

$$25 \times ? = (-100)$$

हम जानते हैं कि,

$$25 \times (-4) = (-100)$$

अतः,

$$(-100) \div 25 = (-4)$$

इसी प्रकार (– 100) ÷ (– 4) को इस प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है, '(– 4) में कौन-सी संख्या का गुणन किया जाना चाहिए कि गुणनफल (– 100) हो जाए?'

$$(-4) \times ? = (-100)$$

हम जानते हैं कि,

$$(-4) \times 25 = (-100)$$

अतः,

$$(-100) \div (-4) = 25$$

इसी प्रकार हम जानते हैं कि,

$$(-25) \times (-2) = 50$$

अतः,

$$50 \div (-25) = (-2)$$

Reprint 2026-27

© NCERT not to be republished

? क्या आप ऊपर दिए गए प्रतिरूप को देखकर पूर्णांक विभाजन के नियमों का सारांश बता सकते हैं?

व्यापक रूप से, किन्हीं भी दो धनात्मक पूर्णांकों a और b के लिए, जहाँ $b \neq 0$ है, हम कह सकते हैं कि,

$$a \div (-b) = -(a \div b)$$
$$(-a) \div b = -(a \div b) \text{ और}$$
$$(-a) \div (-b) = a \div b$$

? पता लगाइए

1. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—
   (a) $14 \times (-15)$ (b) $-16 \times (-5)$
   (c) $36 \div (-18)$ (d) $(-46) \div (-23)$
2. एक शीतलन प्रक्रिया में कमरे का तापमान 32°C से आरंभ होकर 5°C प्रति घंटे की दर से कम किया जाता है। प्रक्रिया आरंभ होने के 10 घंटे के पश्चात कमरे का तापमान क्या होगा?
3. एक सीमेंट कंपनी सफेद सीमेंट की विक्रय की गई प्रत्येक बोरी पर ₹8 का लाभ और सामान्य सीमेंट की विक्रय की गई प्रत्येक बोरी पर ₹25 की हानि अर्जित करती है। [लाभ/हानि को पूर्णांकों के रूप में दर्शाइए।]
   (a) कंपनी एक माह में 3000 बोरी सफेद सीमेंट और 5000 बोरी सामान्य सीमेंट का विक्रय करती है। कंपनी को कितना लाभ या हानि हुई?
   (b) यदि विक्रय की गई सामान्य सीमेंट की बोरियों की संख्या 6400 है तो कंपनी को सफेद सीमेंट की कितनी बोरियों का विक्रय करना होगा जिससे कि कंपनी को न तो लाभ हो और न ही हानि।
4. दिए गए कथनों को सत्य बनाने के लिए रिक्त स्थानों को पूर्णांक से भरिए।
   (a) $(-3) \times$ ___ $= 27$ (b) $5 \times$ ___ $= (-35)$
   (c) ___ $\times (-8) = -56$ (d) ___ $\times (-12) = 132$
   (e) ___ $\div (-8) = 7$ (f) ___ $\div 12 = -11$

पूर्णांकों के प्रयोग से व्यंजक

? व्यंजक $5 \times -3 \times 4$ का मान क्या है? क्या इससे कोई अंतर पड़ता है कि हम 5×-3 को गुणा करके प्राप्त गुणनफल को 4 से गुणा करें अथवा पहले -3×4 को गुणा करके प्राप्त गुणनफल को 5 से गुणा करें?

$$(5 \times -3) \times 4 = -15 \times 4 = -60 \qquad 5 \times (-3 \times 4) = 5 \times -12 = -60$$

? तीन पूर्णांकों के गुणन के कुछ और उदाहरण लीजिए और इस गुणधर्म की जाँच कीजिए। आपने क्या अवलोकन किया?

Reprint 2026-27

हम देख सकते हैं कि जब हम गुणन को इन दो विधियों से 'समूहीकृत' करते हैं तो गुणनफल समान ही रहता है। अतः पूर्णांकों का गुणन, पूर्णांकों के योगफल के समान ही साहचर्य नियम का पालन करता है।

व्यापक रूप से, किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b और c के लिए,

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

व्यंजक 5 × – 3 × 4 में, पहले 5 और 4 को गुणा करने का प्रयास कीजिए और फिर गुणनफल को –3 से गुणा कीजिए (5 × 4) × – 3

5 × 4 = 20 और 20 × (– 3) = – 60

इससे भी समान गुणनफल ही प्राप्त होता है।

? क्या 5 × – 3 × 4 को अन्य भिन्न क्रमों में हल किया जा सकता है? क्या इन सभी स्थितियों में गुणनफल समान होगा?

? व्यंजक 25 × – 6 × 12 को सभी भिन्न क्रमों में गुणा कीजिए और जाँच कीजिए कि क्या सभी स्थितियों में गुणनफल समान है।

तीन या उससे अधिक संख्याओं को किसी भी क्रम में गुणा करने पर गुणनफल समान ही रहता है।

गुणन के निम्नलिखित क्रम को देखिए—

– 1 × – 1 = 1

– 1 × – 1 × – 1 = – 1

– 1 × – 1 × – 1 × – 1 = 1

– 1 × – 1 × – 1 × – 1 × – 1 = – 1

जब – 1 को 2 या 4 बार गुणा किया जाता है तो गुणनफल धनात्मक होता है।
जब इसे 3 या 5 बार गुणा किया जाता है तो गुणनफल ऋणात्मक होता है।
क्या आप इन कथनों को और व्यापक बना सकते हैं?

गणित चर्चा

? कई पूर्णांकों के गुणन की इस समझ का उपयोग करते हुए क्या आप कई पूर्णांकों के गुणनफल का चिह्न ज्ञात करने का एक सरल नियम बता सकते हैं?

? अब, व्यंजक 5 × (4 + (– 2) पर विचार कीजिए। धनात्मक पूर्णांकों के समान ही क्या यह व्यंजक 5 × 4 + 5 × (– 2) के समान है?

हम देखते हैं कि यह समान है। स्मरण कीजिए कि हम इस गुण को बंटन गुणधर्म कहते हैं।

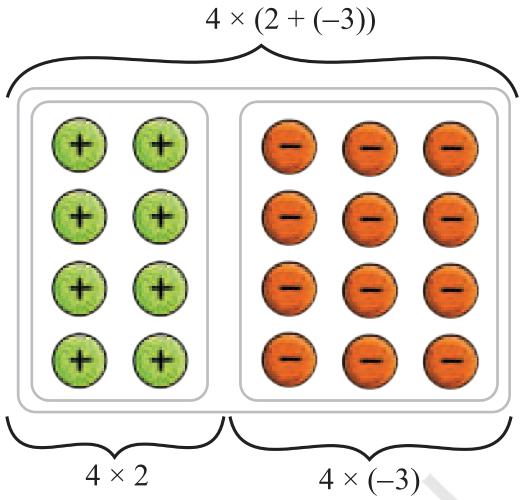
? जाँच कीजिए कि क्या बंटन गुणधर्म (– 2) × (4 + (– 3)) के लिए लागू होता है (अर्थात क्या यह व्यंजक (–2) × 4 + (–2) × (– 3) के समान है) और स्वेच्छा से चुने गए कुछ अन्य ऐसे व्यंजकों के लिए भी लागू होता है।

आप क्या अवलोकित करते हैं? हम देखते हैं कि बंटन गुणधर्म पूर्णांकों के लिए भी लागू होता प्रतीत होता है। क्या यह सदैव होगा?

Reprint 2026-27

© NCERT not to be republished

धनात्मक पूर्णांकों की स्थिति में, हमने बंटन गुणधर्म को दृश्य रूप से समझने के लिए वस्तुओं की एक आयताकार व्यवस्था का उपयोग किया है। हम इसी व्यवस्था का उपयोग धनात्मक संख्याओं के लिए हरे टोकन और ऋणात्मक संख्याओं के लिए लाल टोकन का उपयोग करके पूर्णांकों वाली स्थिति में भी कर सकते हैं। उदाहरण के लिए टोकनों की निम्नलिखित आयताकार व्यवस्था पर विचार कीजिए—



हम देखते हैं कि समग्र व्यवस्था, $4 \times (2 + (-3))$ को दर्शाती है और यह भी स्पष्ट है कि यह 4×2 और $4 \times (-3)$ के योगफल के समान भी है।

? क्या आप व्यंजक $(-4) \times (2 + (-3))$ के लिए बंटन गुणधर्म को दृश्य रूप से दर्शा सकते हैं? [**संकेत—** इस तथ्य का उपयोग कीजिए कि किसी संख्या को (–4) से गुणा करना, उस संख्या के व्युत्क्रम को 4 बार योग करने के समान है।]

प्रयास कीजिए

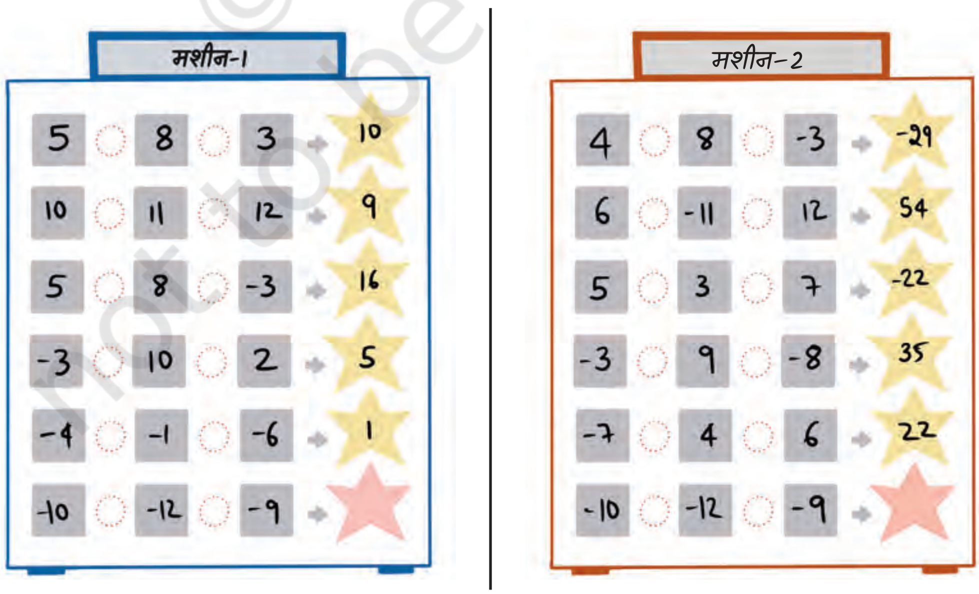
इस प्रकार, किन्हीं भी पूर्णांकों *a, b* और *c* के लिए—

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

प्रतिरूप चुनिए

नीचे दो प्रतिरूप मशीनें दी गई हैं। प्रत्येक मशीन 3 संख्याएँ लेती है, कुछ संक्रियाएँ करती है और परिणाम देती है।

? मशीन 1 द्वारा की जा रही संक्रियाएँ ज्ञात कीजिए।



© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

मशीन 1 द्वारा की जाने वाली संक्रिया इस प्रकार है

(पहली संख्या) + (दूसरी संख्या) – (तीसरी संख्या)

इसे एक व्यंजक के रूप में लिखने पर यह $a + b - c$ लिखा जाएगा, जहाँ a पहली संख्या है, b दूसरी संख्या है और c तीसरी संख्या है।

उदाहरण के लिए $5 + 8 - 3 = 10$ और $(-4) + (-1) - (-6) = 1$ है।

अतः अंतिम समूह का परिणाम इस प्रकार होगा $(-10) + (-12) - (-9) =$ _____

? मशीन 2 द्वारा की जाने वाली संक्रियाएँ ज्ञात कीजिए और रिक्त स्थान भरिए।

अपनी स्वयं की मशीन बनाइए और अपने साथियों को उसकी संक्रियाएँ ज्ञात करने की चुनौती दीजिए।

गणित चर्चा

? पता लगाइए

1. निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए—
   (a) $(-5) \times (18 + (-3))$
   (b) $(-7) \times 4\,(-1)$
   (c) $(-2) \times (-1) \times (-5) \times (-3)$
2. निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए—
   (a) $(-27) \div 9$
   (b) $84 \div (-4)$
   (c) $(-56) \div (-2)$
3. वह पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिसका (-1) के साथ गुणनफल निम्नलिखित होगा—
   (a) 27
   (b) -31
   (c) -1
   (d) 1
   (e) 0
4. यदि $47 - 56 + 14 - 8 + 2 - 8 + 5 = -4$ है तो पूर्ण व्यंजक की गणना किए बिना $-47 + 56 - 14 + 8 - 2 + 8 - 5$ का मान ज्ञात कीजिए।
5. क्या आपको गत वर्ष का कोलाट्ज अनुमान स्मरण है? पूर्णांकों के साथ इसका एक संशोधित रूप बनाने का प्रयास कीजिए। नियम यह है कि किसी भी संख्या से प्रारंभ कीजिए; यदि संख्या सम है तो उसका आधा लीजिए; यदि संख्या विषम है तो उसे -3 से गुणा करके उसमें 1 जोड़ दीजिए; इसे दोहराते रहिए। एक उदाहरण अनुक्रम नीचे दर्शाया गया है।

$$-7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow -32 \rightarrow -16 \rightarrow -8 \rightarrow -4 \rightarrow -2 \rightarrow -1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow -2$$

© NCERT not to be republished

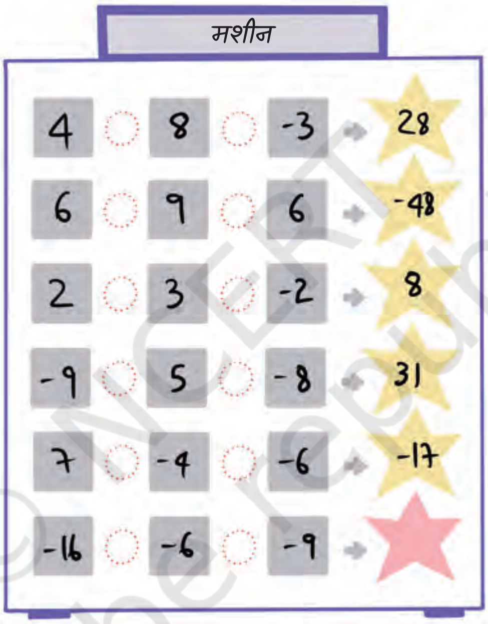
Reprint 2026-27

इसे भिन्न-भिन्न प्रारंभिक संख्याओं के साथ प्रयास कीजिए— जैसे (– 21), (– 6) इत्यादि। जिन प्रतिरूपों का आपने अवलोकन किया, उनका वर्णन कीजिए।

गणित चर्चा

6. एक परीक्षा में, प्रत्येक सही उत्तर के लिए (+4) अंक और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (–2) अंक दिए जाते हैं।
   (a) अनीता ने परीक्षा के सभी प्रश्नों के उत्तर दिए। उसके 15 उत्तर सही होते हुए भी उसे 40 अंक प्राप्त हुए। उसके कितने उत्तर गलत थे? परीक्षा में कितने प्रश्न हैं?
   (b) अनिल के 5 उत्तर सही होते हुए भी उसे (– 10) अंक प्राप्त हुए। उसके कितने उत्तर गलत थे? क्या उसने कोई प्रश्न अनुत्तरित छोड़ा?

7. प्रतिरूप चुनिए — नीचे दी गई मशीन द्वारा की गई संक्रियाओं का पता लगाइए।



8. कल्पना कीजिए कि आप एक ऐसे स्थान पर हैं जहाँ तापमान प्रत्येक घंटे 5°C की दर से गिरता है। यदि वर्तमान तापमान 8°C है तो 4 घंटे पश्चात के तापमान को दर्शाने वाला एक व्यंजक लिखिए।

9. तीन ऐसी क्रमागत संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका गुणनफल (a) –6, (b) 120 हो।

10. एक एलियन समाज 'पिब्स (pibs)' नामक एक विचित्र मुद्रा का उपयोग करता है जिसमें केवल दो मूल्यवर्ग के ही सिक्के हैं– एक +13 पिब्स का सिक्का और एक – 9 पिब्स का सिक्का। आपके पास ऐसे कई सिक्के हैं। क्या इन दोनों सिक्कों से + 85 पिब्स मूल्य वाली कोई वस्तु क्रय करना संभव है?

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

हाँ, हम + 13 पिब्स के 10 सिक्के और – 9 पिब्स के 5 सिक्के मिलाकर कुल + 85 बना सकते हैं।

इन दोनों सिक्कों का उपयोग करके निम्नलिखित योगफल प्राप्त करने का प्रयास कीजिए—

(a) + 20 (b) + 40

(c) – 50 (d) + 8

(e) + 10 (f) – 2

(g) + 1

[**संकेत**— 13 और 9 के कुछ गुणज लिखने से सहायता मिल सकती है।]

प्रयास कीजिए

(h) क्या इन दोनों सिक्कों से 1568 पिब्स मूल्य वाली कोई वस्तु क्रय की जा सकती है?

11. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(a) (32 × (– 18)) ÷ (– 36) (b) 32 ÷ ((– 36) × (– 18))

(c) (25 × (– 12)) ÷ (45) × (– 27)) (d) (280 × (– 7)) ÷ ((– 8) × (– 35))

12. नीचे दिए गए व्यंजकों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

(a) (– 348) + (– 1064) (b) (– 348) – (– 1064)

(c) 348 – (– 1064) (d) (– 348) × (– 1064)

(e) 348 × (– 1064) (f) 348 × 964

13. दिया गया है कि (– 548) × 972 = – 532656, तो निम्नलिखित के मान लिखिए—

(a) (– 547) × 972 (b) (– 548) × 971

(c) (– 547) × 971

14. दिया गया है कि 207 × (– 33 + 7) = – 5382, तो (– 207) × (33 – 7) का मान लिखिए।

15. संख्याओं 3, –2, 5, – 6 का केवल एक बार तथा संक्रियाओं '+', '–', व '×' का केवल एक बार और कोष्ठकों का आवश्यकतानुसार उपयोग करके एक ऐसा व्यंजक लिखिए जिससे—

(a) अधिकतम संभव परिणाम प्राप्त हो

(b) न्यूनतम संभव परिणाम प्राप्त हो

16. पूर्णांकों का उपयोग करते हुए रिक्त स्थानों को कम से कम 5 भिन्न-भिन्न प्रकार से भरिए—

(a) $\square + \square \times \square = -36$ (b) $(\square - \square) \times \square = 12$

(c) $(\square - (\square - \square)) = -1$

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

सारांश

- दो पूर्णांकों का गुणन करने पर, यदि गुणक और गुण्य दोनों धनात्मक हों या दोनों ऋणात्मक हों तो गुणनफल धनात्मक होता है। यदि उनमें से एक धनात्मक हो और दूसरा ऋणात्मक हो तब गुणनफल ऋणात्मक होता है।
- जब दो पूर्णांकों का विभाजन किया जाता है, तब यदि भाज्य और भाजक दोनों धनात्मक हों अथवा दोनों ऋणात्मक हों तो भागफल धनात्मक होता है। यदि उनमें से एक धनात्मक हो और दूसरा ऋणात्मक हो तो भागफल ऋणात्मक होता है।

−9	−6	−3	3	3	6	9
−6	−4	−2	2	2	4	6
−3	−2	−1	1	1	2	3
−3	−2	−1	×	1	2	3
3	2	1	1	−1	−2	−3
6	4	2	2	−2	−4	−6
9	6	3	3	−3	−6	−9

- पूर्णांक गुणन क्रमविनिमेय होता है अर्थात किन्हीं दो पूर्णांकों a और b के लिए,

$$a \times b = b \times a$$

- पूर्णांक गुणन साहचर्य होता है अर्थात किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b और c के लिए,

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

- पूर्णांक गुणन योग के सापेक्ष बंटन गुणधर्म का पालन करता है अर्थात किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b और c के लिए,

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

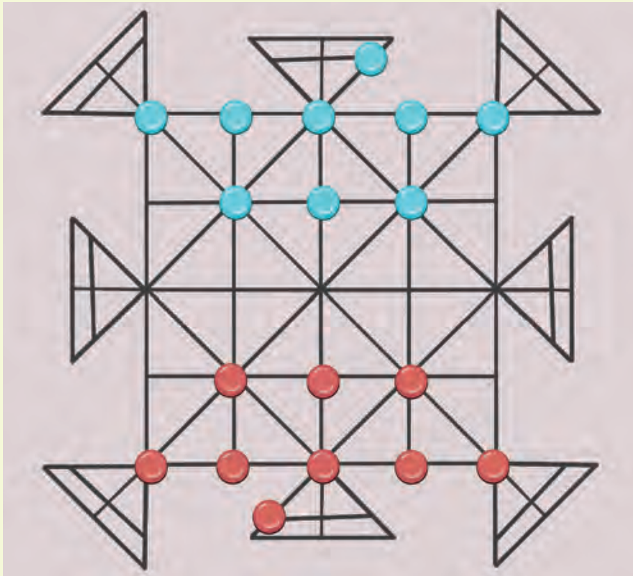
पहेली का समय!

तेर हू चु

तेर हू चु, असम और नागालैंड में खेला जाने वाला एक खेल है। इस खेल के बोर्ड में 16 वर्ग होते हैं और विकर्णों को आगे दिए गए चित्र में दर्शाए अनुसार चिह्नित किया जाता है। इसे सामान्यतः पत्थर के एक बड़े टुकड़े पर खुरदरा उकेरा जाता है या गीली मिट्टी पर बनाया जाता है। इसमें 2 खिलाड़ी होते हैं और प्रत्येक खिलाड़ी के पास 9 सिक्कों का एक संग्रह होता है जिसे चित्र में दर्शाए अनुसार रखा जाता है। एक संग्रह के सिक्के दूसरे संग्रह के सिक्कों से भिन्न दिखते हैं।

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27



उद्देश्य—

इस खेल का लक्ष्य प्रतिद्वंद्वी के सभी सिक्कों को बंधक बनाना है। ऐसा सर्वप्रथम करने वाला खिलाड़ी विजेता होता है। खिलाड़ी अपने प्रतिद्वंद्वी द्वारा किसी भी वैध चाल को रोक देने पर भी जीत सकता है। यदि खेल बिना परिणाम के समाप्ति की ओर चला जाता है तो जिसके पास अधिक सिक्के होते हैं, वह विजेता हो जाता है।

खेल प्रक्रिया—

- खेल की प्रारंभिक स्थिति ऊपर दर्शाए अनुसार है।
- खिलाड़ी अपनी-अपनी बारी खेलते हैं। प्रत्येक बारी में वे एक सिक्के को एक रेखा पर, किसी भी दिशा में, पास के रिक्त प्रतिच्छेद बिंदु पर ले जा सकते हैं अथवा यदि प्रतिद्वंद्वी का सिक्का पास के प्रतिच्छेद बिंदु पर है और उसके ठीक आगे एक रिक्त प्रतिच्छेद बिंदु है तो वे प्रतिद्वंद्वी के सिक्के के ऊपर से कूदकर रिक्त प्रतिच्छेद बिंदु पर जा सकते हैं।
- यदि कोई खिलाड़ी प्रतिद्वंद्वी के सिक्के के ऊपर से कूदता है तो वह सिक्का बंधक माना जाता है और उसे बोर्ड से हटा दिया जाता है। एक चाल में कई सिक्के बंधक बनाए जा सकते हैं और प्रत्येक कूद के बाद दिशा परिवर्तन भी किया जा सकता है।
- मुख्य वर्ग के बाहर स्थित त्रिभुजाकार कोनों के अंदर एक सिक्का एक प्रतिच्छेद बिंदु को छोड़कर सीधे अगले प्रतिच्छेद बिंदु पर भी जा सकता है अर्थात यह एक रिक्त प्रतिच्छेद बिंदु के ऊपर से कूदकर उसके आगे वाले प्रतिच्छेद बिंदु पर जा सकता है।

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27