6 रचना और टाइलिंग

0790CH06

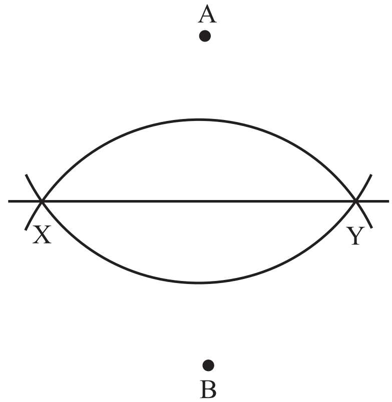
6.1 ज्यामितीय रचना

आँखें

क्या आपको कक्षा 6 में की गई 'आँखों की रचना' स्मरण है?

हाँ, आँखें सरलता से बनाई जा सकती हैं, किंतु इन्हें इस प्रकार से बनाना है कि इसके नीचे वाला वृत्त-चाप और ऊपर वाला वृत्त-चाप सममित लगे।

हमने दो केंद्र A और B (चित्र देखिए) तय करने के लिए अपने स्थानिक अनुमान का उपयोग किया, जिससे हमने क्रमश: निचली और ऊपरी वृत्त-चाप की रचना की।



ये वृत्त-चाप एक रेखा XY बनाते हैं जो रचना को सहारा देती है, यद्यपि ये रेखा अंतिम चित्र का भाग नहीं है। हम इस रेखा से आरंभ करके व्यवस्थित रूप से A और B को ढूँढ़ेंगे।

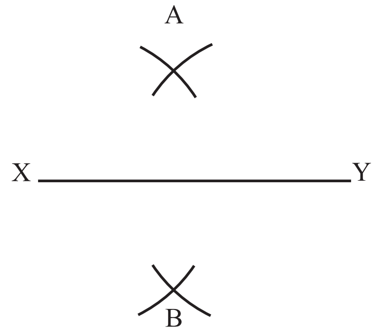
आँख के सममित होने के लिए या सहायक रेखा XY के सममित होने के लिए ऊपर वाले वृत्त-चाप और नीचे वाले वृत्त-चाप की त्रिज्या एकसमान होनी चाहिए। दूसरे शब्दों में, AX = BX क्योंकि AX = AY और BX = BY

अर्थात AX = AY = BX = BY

© NCERT not to be republished

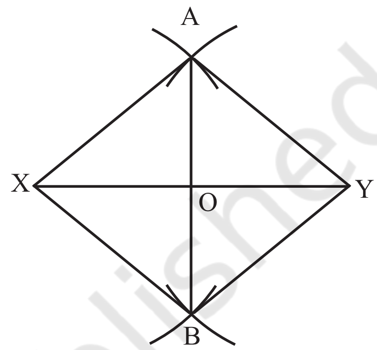
हम A और B को कैसे ढूँढ़ेंगे?

बिंदु X और Y से एक समान त्रिज्या वाले दो वृत्त-चाप की रचना कीजिए। रेखा XY के ऊपर और नीचे जिन बिंदुओं पर वृत्त-चाप मिलते हैं, वे बिंदु A और B होंगे। इसे आँख बनाने में उपयोग कीजिए।



चित्र 6.1

चित्र 6.1 में, A और B को एक रेखा से जोड़िए। रेखा AB, XY को कहाँ प्रतिच्छेद करेगी तथा इनके मध्य में कौन-सा कोण बनेगा?



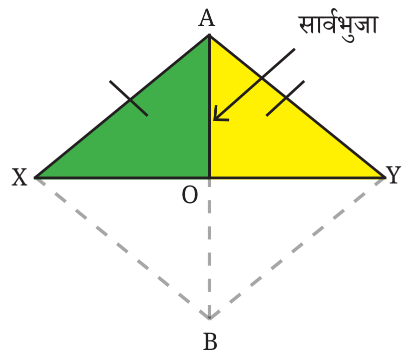
हम देखते हैं कि रेखा AB, रेखा XY के मध्य बिंदु से होकर गुजरती है तथा ये एक-दूसरे के लंबवत हैं।

एक रेखा या किसी ज्यामिति वस्तु का दो समान भागों में विभाजन समद्विभाजन कहलाता है। एक ऐसी रेखा जो किसी दूसरी रेखा को विभाजित करती है तथा उसके लंबवत होती है, लंब समद्विभाजक कहलाती है।

क्या XY के ऊपर और नीचे, जहाँ चाप मिलते हैं उन दो बिंदुओं को जोड़ने वाली रेखा सदैव एक लंब समद्विभाजक होगी, चाहे XY की लंबाई कुछ भी हो तथा वृत्त-चाप किसी भी लंबाई की त्रिज्या से बनाए जाएँ?

इसका उत्तर सर्वांगसमता से दिया जा सकता है। एक रेखाखंड XY लेते हैं, बिंदु A और B को इस प्रकार से खोजिए कि AX = AY = BX = BY हो। रेखा AB, AX, AY, BX और BY खींचिए। मान लीजिए AB और XY का प्रतिच्छेदन बिंदु O है।

ऐसे कौन-से दो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे जिससे AB, रेखा XY का लंबवत समद्विभाजक हो (अर्थात बिंदु O, XY का मध्य बिंदु हो और AB, XY पर लंबवत हो)?



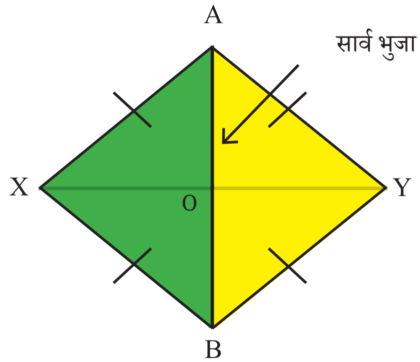
यदि हम दिखाएँ $\Delta AOX \cong \Delta AOY$ तब OX = OY तथा $\angle AOX = \angle AOY$ होंगे क्योंकि ये दोनों सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग होंगे। चूँकि $\angle AOX$ तथा $\angle AOY$ मिलकर एक रेखीय कोण बनाते हैं तब $\angle AOX + \angle AOY = 180°$ है। अत: $\angle AOX = \angle AOY = 90°$ होगा। यह दिखाता है कि O, XY का मध्य बिंदु है तथा AB, XY के लंबवत है।

Reprint 2026-27

© NCERT not to be republished

ΔAOX तथा ΔAOY में, हम जानते हैं कि $AX = AY$ तथा AO दोनों त्रिभुजों में उभयनिष्ठ हैं।

यदि हम सिद्ध कर सकें कि $\angle XAO = \angle YAO$ है, तब SAS समरूपता सिद्धांत के अनुसार हम कह सकते हैं कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

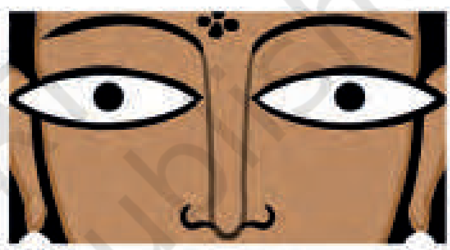


इसे सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि $\Delta ABX \cong \Delta ABY$, ऐसा इसलिए है क्योंकि $AX = AY$ और $BX = BY$ तथा AB दोनों त्रिभुजों में उभयनिष्ठ है।

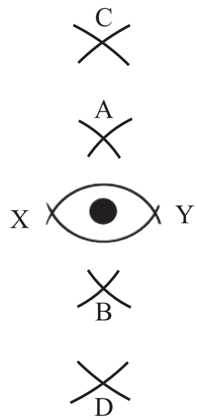
अत: हमारे पास $\angle XAB = \angle YAB$ अथवा $\angle XAO = \angle YAO$ है क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग हैं।

अत: AB XY का एक लंब समद्विभाजक है।

हम आँखों की विभिन्न आकृतियाँ देख सकते हैं।



© NCERT not to be republished



हम ये विभिन्न आकृतियाँ कैसे बना सकते हैं? प्रयास कीजिए।

एक विधि यह है कि दो अन्य बिंदु C व D इस प्रकार लीजिए कि CX = CY = DX = DY हो। इन बिंदुओं का उपयोग करके एक भिन्न आकृति की आँख बनाई जा सकती है।

क्या C और D, एक लंब समद्विभाजक AB पर मिलते हैं?

बिंदु C और D बिंदु X और Y से समान दूरी पर स्थित हैं। इन दोनों बिंदुओं को मिलाने पर एक XY का लंब समद्विभाजक मिलता है क्योंकि XY का केवल एक ही लंब समद्विभाजक है जो कि रेखा AB है, अत: बिंदु C और बिंदु D, रेखा AB पर ही मिलेंगे।

उपरोक्त तथ्य के आधार पर निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—

X और Y से समान दूरी पर कोई बिंदु, XY के लंब समद्विभाजक पर स्थिर होगा।

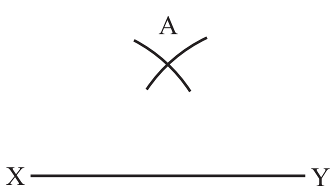
अत: आँखों की ऊपरी और निचली वृत्त-चाप बनाने के लिए लंब समद्विभाजक पर विभिन्न बिंदुओं के युग्मों का केंद्र के रूप में उपयुक्त चयन करके विभिन्न आकृति की आँखें बनाई जा सकती हैं।

लंब समद्विभाजक की रचना

यदि एक रेखाखंड XY दिया है तो एक अचिह्नित मापक व एक परकार (कम्पास) की सहायता से एक लंब समद्विभाजक कैसे बनाएँगे?

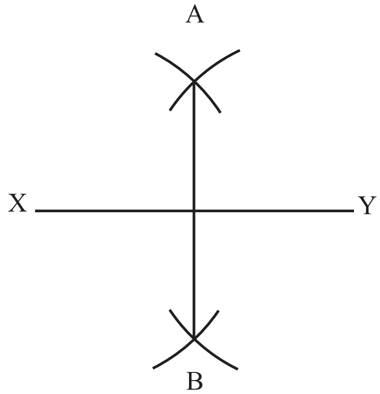
जैसा कि हमने देखा कि दो बिंदु जिनमें से एक XY के ऊपर हो तथा एक XY के नीचे हो तथा इनकी दूरी X और Y से समान हो, को मिलाने पर XY का लंब समद्विभाजक प्राप्त होता है। इस प्रकार हमें एक लंब समद्विभाजक बनाने की एक विधि प्राप्त होती है।

1. X और Y से एक निश्चित त्रिज्या लेकर, XY के ऊपर पर्याप्त लंबाई की दो वृत्त-चाप बनाइए। इनके मिलान बिंदु को A नाम दीजिए।



Reprint 2026-27

2. उसी समान त्रिज्या का उपयोग करके XY के नीचे दो पर्याप्त लंबाई की वृत्त-चाप बनाइए। इस बिंदु को जहाँ पर दोनों चाप मिलते हैं B नाम दीजिए।
3. AB एक लंब समद्विभाजक होगा।



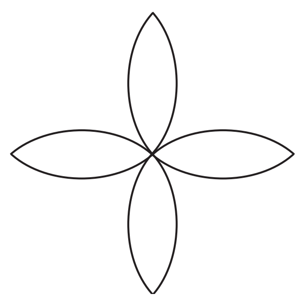
इस प्रकार ज्यामिति के समान उपकरण एक अचिह्नित मापक (रूलर) और एक परकार की सहायता से एक लंब समद्विभाजक बना सकते हैं। हम केवल इन दोनों उपकरणों की सहायता से इस अध्याय की अन्य ज्यामितीय आकृतियों की रचना करेंगे, जब तक कि एक निश्चित माप की रेखा बनाना आवश्यक न हो।

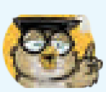
? पता लगाइए

1. जब हम लंब समद्विभाजक की रचना करते हैं तब क्या XY के ऊपर और नीचे के वृत्त-चापों के लिए समान त्रिज्या का होना आवश्यक है। रचना के माध्यम से इसका अन्वेषण कीजिए और अपने उत्तर को सत्यापित कीजिए।

   [**संकेत 1** — जब कोई भी बिंदु X और Y से समान दूरी पर होता है, तो वह लंब समद्विभाजक पर होगा।]

   [**संकेत 2** — यदि किसी रेखा के दो बिंदु ज्ञात हों तो हम पूरी रेखा खींच सकते हैं।]
2. क्या XY के ऊपर और नीचे चापों के युग्म की रचना करना आवश्यक है? या इसके अतिरिक्त, क्या हम XY के एक ही ओर चापों के दोनों युग्म की रचना कर सकते हैं? रचना के माध्यम से इसका अन्वेषण कीजिए और अपने उत्तर को सत्यापित कीजिए।
3. प्रतिच्छेदन चापों के एक युग्म की रचना के समय क्या यह आवश्यक है कि हम दोनों के लिए एक ही त्रिज्या का उपयोग करें? रचना के माध्यम से इसका अन्वेषण कीजिए और अपने उत्तर को सत्यापित कीजिए।
4. एक मापक और परकार (कम्पास) की सहायता से इस आकृति को पुनः बनाइए।





उपरोक्त अभिकल्पना को पूर्ण करने के पश्चात, आप इसकी सीमा रेखा को ट्रेस करने के लिए मापक या परकार के साथ रंगीन पेंसिल का उपयोग कर सकते हैं। यह अभिकल्पना को सहायक रेखाओं और वक्रों से अलग दिखाएगा।

Reprint 2026-27

इस विधि से लंब समद्विभाजक की रचना करना न केवल ज्यामिति रूप से शुद्ध है, अपितु इसे सटीक रूप से बनाने की भी एक सम व्यवहारिक विधि है।

रेखाखंड के मध्य बिंदु को खोजने की यह विधि चिह्नित मापक का उपयोग करके लंबाई को मापने की तुलना में अधिक सटीक है।

किसी दिए गए बिंदु पर 90° के कोण की रचना

? क्या हम एक रेखा के किसी भी बिंदु पर 90° के कोण बनाने के लिए लंब समद्विभाजक के रचना की विधि का विस्तार कर सकते हैं? एक रेखा बनाइए और उस पर एक बिंदु O चिह्नित कीजिए। बिंदु O पर 90° का कोण बनाइए।

? इस रेखा का एक खंड ज्ञात कीजिए, जिसके लिए O मध्य बिंदु हो।

इस रेखा को बिंदु O के दोनों ओर बढ़ाइए।

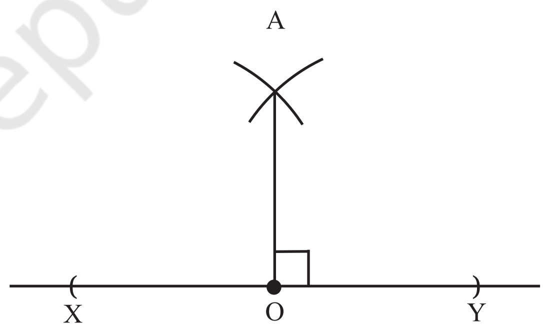
परकार की सहायता से, O से समान दूरी पर दो बिंदु X और Y इस प्रकार चिह्नित कीजिए कि O, XY का मध्य बिंदु हो।

चित्र. 6.2

XY का लंब समद्विभाजक O से होकर गुजरेगा और दी गई रेखा के लंबवत होगा।

इस स्थिति में, क्या हमें XY के लंब समद्विभाजक को प्राप्त करने के लिए प्रतिच्छेदन चापों के दो युग्म खींचने की आवश्यकता है?

नहीं, यह आवश्यक नहीं है। हमारे पास पहले से ही एक बिंदु O है जो कि लंब समद्विभाजक पर स्थित है।



चित्र. 6.3

चित्र 6.2 व 6.3 एक रेखा पर दिए गए बिंदु पर 90° कोण की रचना के चरणों का वर्णन करते हैं।

शुल्बसूत्रों में रचना की विधियाँ

भारत सहित विभिन्न सभ्यताओं के प्राचीन गणितज्ञ लंब और लंब समद्विभाजक के रचना की सटीक प्रकियाओं को जानते थे।

भारत में इन विधियों वाले सबसे प्राचीन ज्ञात ग्रंथ *शुल्ब-सूत्र* हैं। ये वैदिक काल के ज्यामितीय-ग्रंथ हैं जो कि अनुष्ठानों के लिए अग्नि वेदियों की रचना से संबंधित हैं। शुल्ब-सूत्र, 4 वेदांगों में से एक का भाग है (वेदांग शब्द का अर्थ है 'वेदों के अंग'), शुल्बों में वे विधियाँ हैं जो हमने पहले एक लंब और लंब समद्विभाजक की रचना के लिए विकसित की थीं।

Reprint 2026-27

© NCERT not to be republished

शुल्ब-सूत्रों में सभी रचना विधियाँ एक भिन्न प्रकार के परकार का उपयोग करके बनाई जाती हैं, जिन्हें आपने उपयोग किया होगा जैसे कि एक रस्सी। एक वृत्त या चाप बनाने के लिए रस्सी का उपयोग किया जा सकता है। इसे एक सीधी रेखा बनाने के लिए भी फैलाया जा सकता है।

इसके अतिरिक्त, शुल्ब-सूत्रों से अन्य लंबवत रेखाओं की रचना की विधियाँ सम्मिलित हैं। यहाँ रस्सी का उपयोग करके लंब समद्विभाजक की रचना दी गई है। (*कात्यायन-शुल्ब-सूत्र* 1.2)

माना XY एक दिया गया रेखाखंड है, जिसे भूमि पर खींचा गया है, इसके लिए हम एक लंब समद्विभाजक की रचना करना चाहते हैं। बिंदु X व Y पर एक छोटे खंभे या खूंटी को लंबवत रूप से भूमि में स्थिर करें।

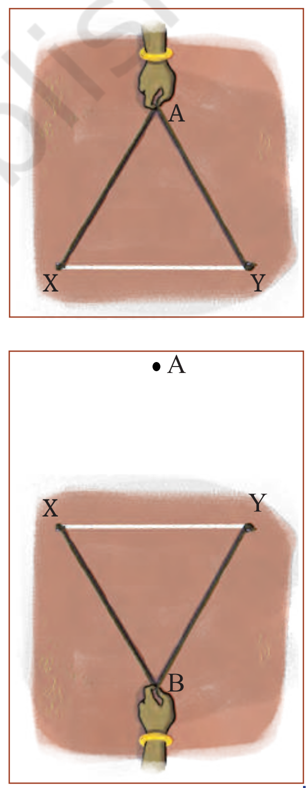
एक पर्याप्त लंबी रस्सी लीजिए। इसके दोनों सिरों पर दो फंदे बनाइए। फंदे में प्रयुक्त भाग को छोड़कर, रस्सी को आधा मोड़कर उसका मध्य बिंदु ढूँढ़िए और चिह्नित कीजिए।

रस्सी के सिरों पर दोनों फंदों को X और Y खंभों पर बाँध दीजिए।

रस्सी के मध्य बिंदु को XY के ऊपर इस प्रकार से खींचे (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है) कि दोनों ओर रस्सी के दोनों भाग पूर्णत: फैले हुए हों। मध्य बिंदु की इस स्थिति को A चिह्नित कीजिए।

अब इसी प्रकार, रस्सी के मध्य बिंदुओं XY के नीचे इस प्रकार से खींचें (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है) कि दोनों ओर रस्सी के दोनों भाग पूर्णत: फैले हुए हों। मध्य बिंदु की इस स्थिति को B चिह्नित कीजिए।

AB आवश्यक लंब समद्विभाजक है।



चित्र 6.4

? पता लगाइए

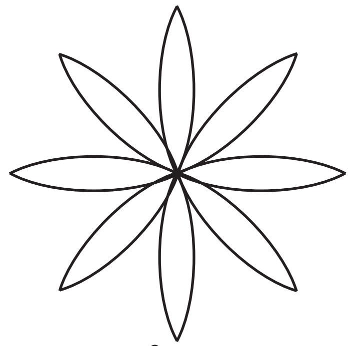
1. सत्यापित कीजिए कि चित्र 6.4 में AB एक लंब समद्विभाजक है।
2. क्या आप रस्सी का उपयोग करके किसी रेखा पर दिए गए बिंदु पर 90° के कोण बनाने की विभिन्न विधियों के विषय में सोच सकते हैं?

गणित चर्चा

© NCERT not to be republished

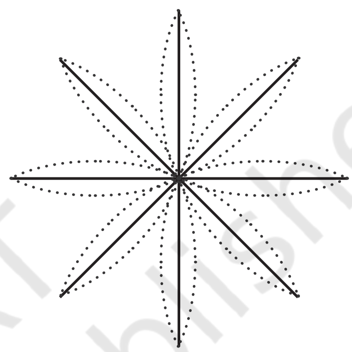
Reprint 2026-27

अभिकल्पना के लिए कोण का समद्विभाजन



चित्र 6.5

? हम इस आकृति की रचना कैसे करेंगे?



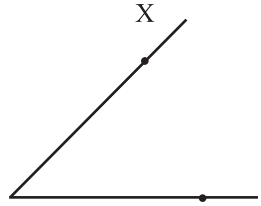
इस आकृति के लिए सहायक रेखाएँ इस प्रकार दिखेंगी।

? दो आसन्न रेखाओं के बीच का कोण क्या है?

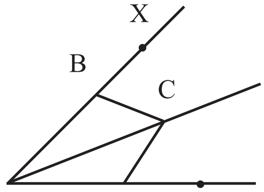
किसी भी आसन्न रेखाओं के प्रत्येक युग्म के बीच का कोण समान होना चाहिए चूँकि 360° का कोण 8 समान भागों में विभाजित है, अत: प्रत्येक कोण 45° का होगा।

? केवल एक मापक और परकार की सहायता से हम एक 45° के कोण की रचना कैसे कर सकते हैं?

हम जानते हैं कि 90° का कोण कैसे बनाया जाता है। यदि हम इसे दो समान भागो में विभाजित कर सकते हैं या इसे समद्विभाजित कर सकें तो हमें 45° का कोण प्राप्त हो सकता है।



किसी भी कोण को समद्विभाजित करने के लिए हम एक सामान्य विधि विकसित करेंगे। एक कोण ∠XOY पर विचार कीजिए।



यदि हम चित्र में दिखाए गए अनुसार दो सर्वांगसम त्रिभुज ΔOBC और ΔOAC बना सकें, तो हम इसे समद्विभाजित कर सकते हैं। तब ∠BOC = ∠AOC होगा।

© NCERT not to be republished

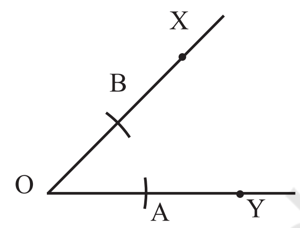
Reprint 2026-27

? यदि कोण दिया हो तब हम उन सर्वांगसम त्रिभुजों की रचना कैसे कर सकते हैं?

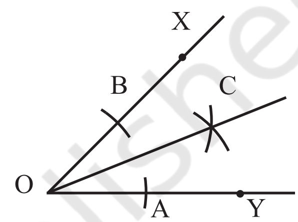
यदि A और B को इस प्रकार चिह्नित किया जाता है कि OA = OB और यदि C का इस प्रकार से चयन किया जाता है कि BC = AC हो, तब SSS सर्वांगसमता विधि द्वारा $\Delta OBC \cong \Delta OAC$, इस प्रकार इस एक कोण को निम्नानुसार विभाजित कर सकते हैं।

कोण समद्विभाजन के चरण

1. A और B को इस प्रकार चिह्नित कीजिए कि OA = OB हो।



2. किसी भी पर्याप्त लंबी एवं समान त्रिज्या का चयन करते हुए, A और B से चाप बनाइए। प्रतिच्छेदन बिंदु को C के रूप में चिह्नित कीजिए।
3. OC, ∠AOB को समद्विभाजित करता है।

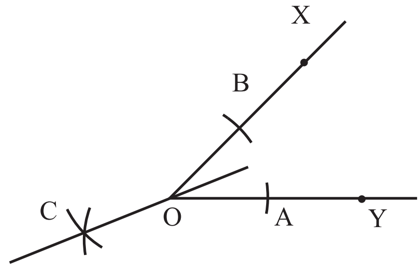


अत: पहले 90° कोण की रचना करके, इसके पश्चात उसे दो समान भागों में विभाजित करके एक 45° के कोण की रचना की जा सकती है।

© NCERT not to be republished

? पता लगाइए

1. कम से कम 4 भिन्न-भिन्न कोण बनाकर उनके समद्विभाजन बनाइए।
2. चित्र 6.5 में दिखाई गई 8 पंखुड़ियों वाली आकृति की रचना कीजिए।
3. कोण समद्विभाजन के चरण 2 में, यदि समान त्रिज्या के चापों को दूसरी ओर खींचा जाता है, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है तो क्या रेखा OC अभी भी एक कोण समद्विभाजक होगी? रचना के माध्यम से इसका अन्वेषण कीजिए और अपने उत्तर को सिद्ध कीजिए।



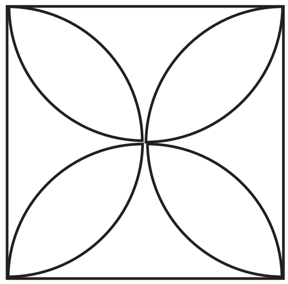
4. कोण समद्विभाजन का उपयोग करके बनाए जा सकने वाले अन्य कोण कौन-से हैं? क्या आप 65.5° का कोण की रचना कर सकते हैं?

गणित चर्चा

5. रस्सी का उपयोग करके कोण समद्विभाजक की रचना के लिए एक विधि ज्ञात कीजिए।

Reprint 2026-27

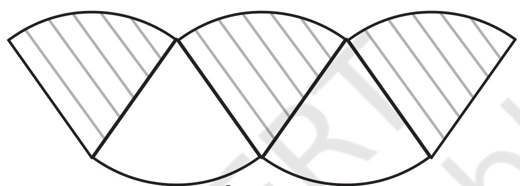
6. निम्नलिखित आकृति की रचना कीजिए।



इन पंखुड़ियों की रचना कैसे करते हैं जिससे कि वे किसी दिए गए वर्ग के भीतर अधिकतम संभव आकार की हों।

इकाइयों और कोणों को दोहराना

? निम्नलिखित आकृति की रचना कीजिए।



चित्र 6.6

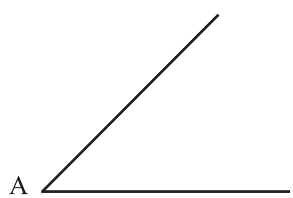
इस आकृति में, एक एकल इकाई स्वयं को दोहरा रही है। इस आकृति की रचना के लिए हमें दो दिशाओं में इस इकाई की सटीक प्रतिलिपियाँ बनानी होंगी।

सटीक प्रतिलिपियाँ बनाने के लिए सभी इकाइयों की भुजाओं की लंबाई समान होनी चाहिए और भुजाओं के बीच समान कोण होना चाहिए। हम परकार का उपयोग करके समान लंबाई की भुजा बना सकते हैं किंतु हम समान कोण कैसे बनाएँगे?

आइए, हम किसी दिए गए कोण की सटीक प्रति बनाने के लिए एक विधि की रचना करें।

? एक कोण बनाइए। केवल एक मापक और परकार की सहायता से इस कोण की एक प्रति बनाइए।

गणित चर्चा



© NCERT not to be republished

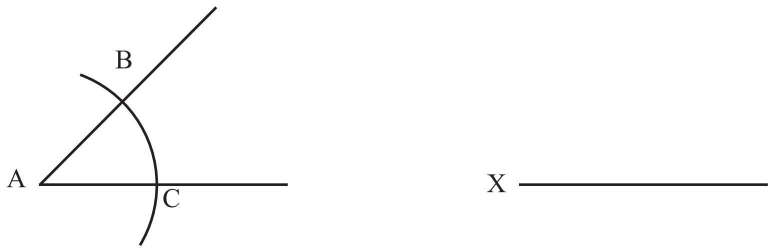
Reprint 2026-27

संभवत: आपने स्वयं की विधि विकसित की होगी, परंतु यहाँ पर एक और सरल विधि है।

एक कोण की प्रतिलिपि बनाने के लिए रचना के चरण

1.

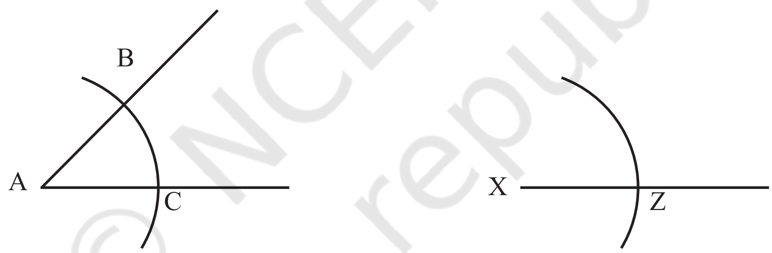
2.



A से एक चाप की रचना कीजिए।

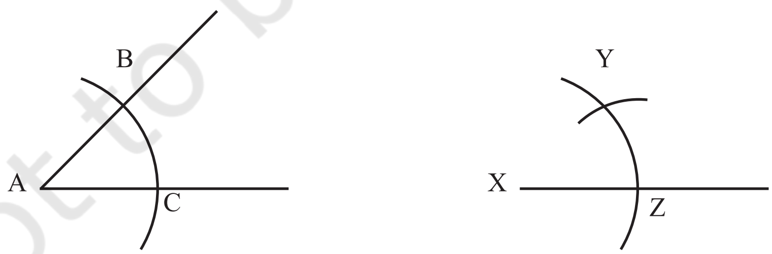
इससे हमें तीन बिंदु प्राप्त होते हैं जो कि एक समद्विबाहु त्रिभुज ΔABC बनाते हैं।

3.



X से समान त्रिज्या का एक चाप बनाइए।

4.

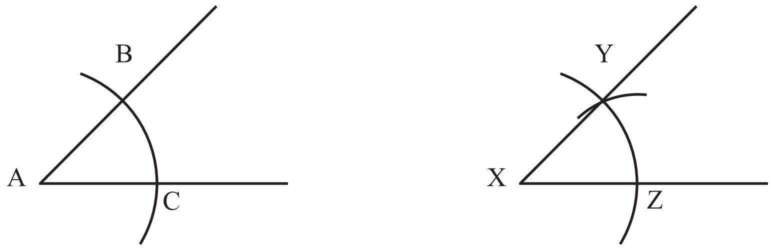


एक परकार की सहायता से BC को मापिए। इस माप को Z से चाप पर स्थानांतरित करने पर YZ = BC प्राप्त होता है।

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

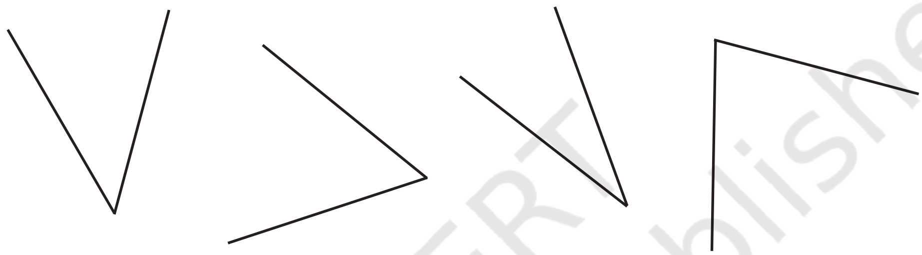
5.



SSS सर्वांगसमता नियम द्वारा $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ होंगे अत: $\angle A = \angle X$ है।

? पता लगाइए

1. बिना कोई माप लिए, अलग-अलग दिशाओं में कम से कम 4 भिन्न-भिन्न कोणों की रचना कीजिए। इन सभी कोणों की एक प्रति बनाइए।



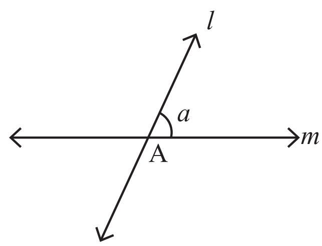
2. चित्र 6.6 बनाइए।

एक कोण की प्रति बनाने की यह विधि केवल एक मापक और परकार की सहायता से समानांतर रेखाओं की रचना करने का एक महत्वपूर्ण अनुप्रयोग है।

किसी दी गई रेखा के समानांतर एक रेखा की रचना

स्मरण कीजिए कि रचना में एक मापक और एक समकोणक (गुनिया) का उपयोग करके, समानांतर रेखाओं को प्राप्त करने के लिए हमने समान संगत कोणों की रचना की है।

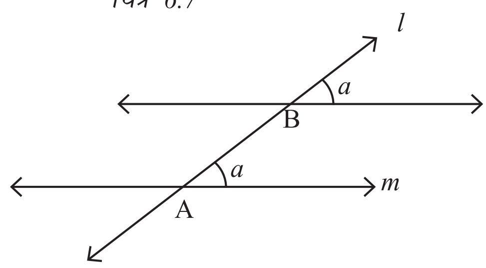
? एक मापक और एक परकार की सहायता से हम इस विचार को कैसे आरंभ करें?



चित्र 6.7

मान लीजिए कि एक रेखा m है जिसके लिए हम एक समानांतर रेखा खींचना चाहते हैं। इससे एक रेखा l खीचते हैं जो रेखा m को काटती है। रेखा l, रेखा m तथा रेखा m के समानांतर रेखा, जो कि हम बनाने जा रहे हैं, के अनुप्रस्थ के रूप में कार्य करेगी।

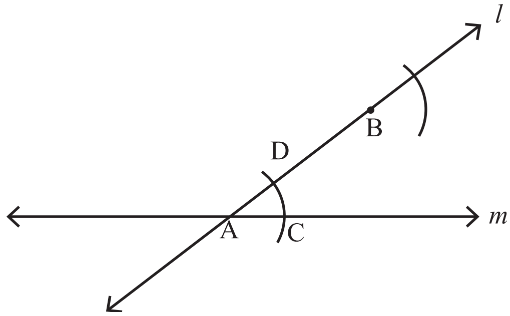
आइए, हम रेखा l पर एक बिंदु B चुनते हैं जिसके माध्यम से हम समानांतर रेखा खींचने जा रहे हैं। इस समानांतर रेखा को समान संगत कोण बनाना चाहिए, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। यह m और l के बीच के कोण का अनुकरण करके किया जा सकता है।



© NCERT not to be republished

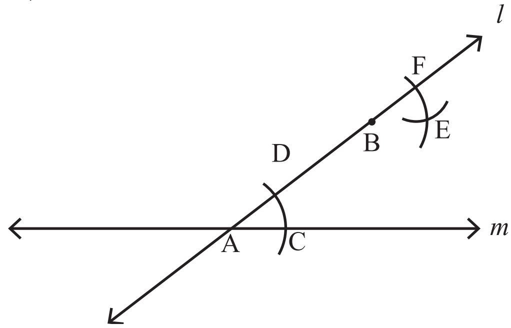
Reprint 2026-27

इसे बनाने के लिए यहाँ एक चरणबद्ध प्रक्रिया दी गई है।



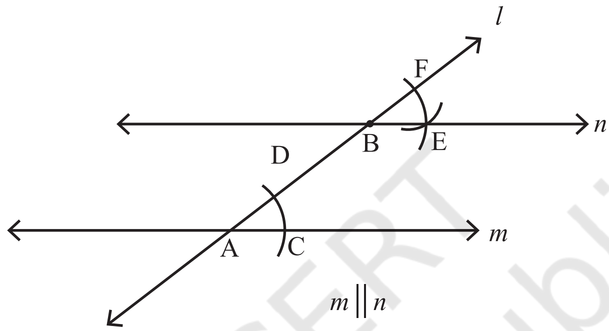
चित्र 6.8

A और B से दो समान त्रिज्या में चाप बनाइए।



चित्र 6.9

आप CD को F से एक चाप में स्थानांतरित कीजिए।

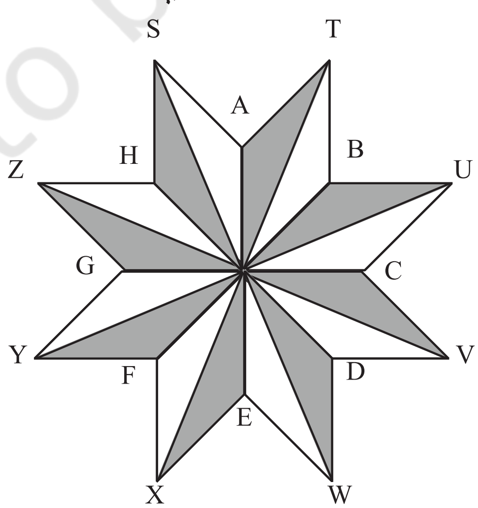


चित्र 6.10

चित्र 6.7–6.10 एक दी गई रेखा के समानांतर रेखा बनाने की विधि का वर्णन करते हैं।

पता लगाइए

1. अलग-अलग दिशाओं में समानांतर रेखाओं के 4 जोड़े बनाइए।
2. नीचे दी गई आकृति की रचना कीजिए।



© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

मेहराब संरचना

तिपतिया मेहराब

क्या आपने इस प्रकार का सुंदर मेहराब देखा है?

https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=28374748
Diwan-i-Aam, Red fort

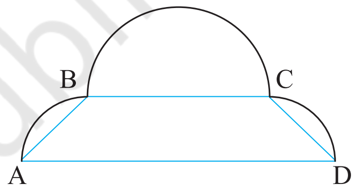
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Central_Park_A.jpg
Central park, New York City

? चित्रों में दिखाए गए इन मेहराबों को कैसे बनाया गया होगा?

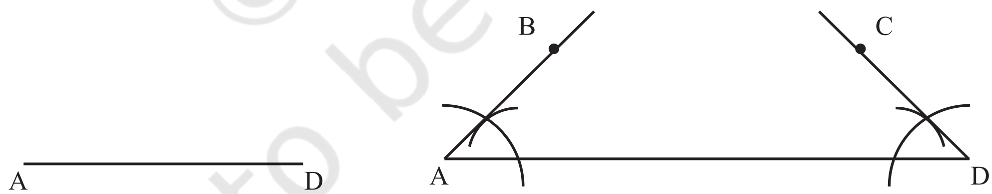
पहला चरण इन्हें किसी समतल सतह, जैसे कि कागज या पत्थर पर खींचने में सक्षम होना है।

? दिए गए मेहराब के आकार को कागज के एक टुकड़े पर बनाइए।

आइए, हम उन सहायक रेखाओं के विषय में विचार करें जिनकी इस चित्र में आवश्यकता होगी।



समरूपता के लिए AB = CD और ∠BAD = ∠CDA आवश्यक है आप इन सहायक रेखाओं की रचना कैसे करेंगे?



A व D पर समान कोण बनाइए। B व C को ऐसे चिह्नित कीजिए कि AB = CD हो।

? एक मेहराब की रचना करने के लिए इन सहायक रेखाओं का उपयोग कीजिए। यदि आवश्यक हो तो मेहराब की त्रिज्या को समायोजित कीजिए जिससे कि मेहराब को अधिक सौंदर्यपूर्ण बनाया जा सके।

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

एक नुकीला मेहराब

कुछ मेहराब इस प्रकार के दिखते हैं।

https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Diwan-i-Aam,_Red_Fort,_Delhi_-_2.jpg
Diwan-i-Aam, Red Fort

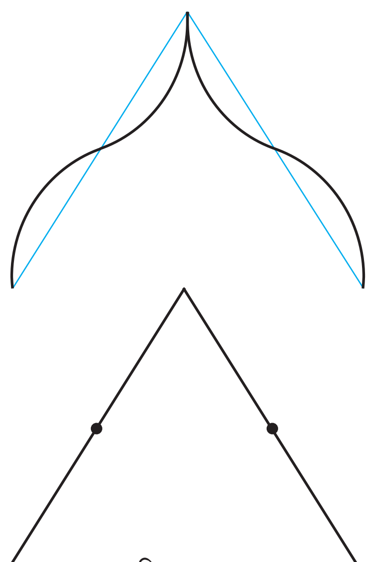
© NCERT not to be republished

? हम इस आकृति की रचना कैसे कर सकते हैं?

इस मेहराब को खींचने के लिए आप किन सहायक रेखाओं का उपयोग करेंगे?

क्या आपको कक्षा 6 की पाठ्यपुस्तक से 'तरंगित तरंग (लहर)' स्मरण है?

यहाँ सहायक रेखाएँ केवल समान लंबाई में दो रेखाखंड हैं।



? यदि दोनों रेखाखंडों के मध्य बिंदुओं को चिह्नित किया जाता है तो क्या आप एक नुकीले मेहराब की रचना कर पाएँगे?

चित्र 6.11

Reprint 2026-27

पता लगाइए

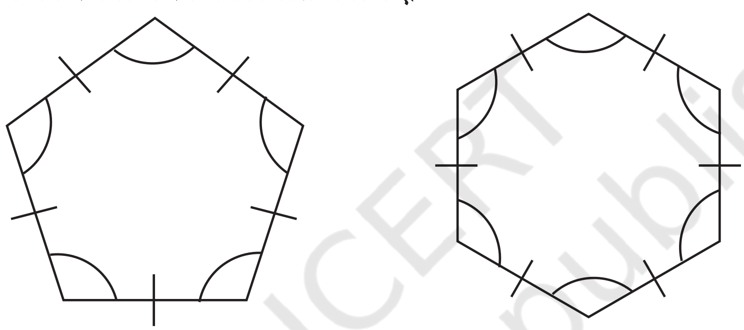
1. एक नुकीले मेहराब की रचना करने के लिए चित्र 6.11 में दी गई सहायक रेखाओं का उपयोग कीजिए।
2. आप स्वयं की एक मेहराब संरचना बनाइए।

सम-षट्भुज

स्मरण कीजिए कि एक सम-बहुभुज की भुजाएँ और कोण समान होते हैं। तीन भुजाओं वाला एक सम-बहुभुज एक समबाहु त्रिभुज होता है तथा चार भुजाओं वाला एक सम-बहुभुज एक वर्ग होता है। हम इन आकृतियों की रचना पहले कर चुके हैं।

हम एक सम-पंचभुज (5-भुजाओं वाली आकृति) और एक सम-षट्भुज (6-भुजाओं वाली आकृति) की रचना कैसे करेंगे? इसे आरंभ करने के साथ ही, समान भुजा वाले एक पंचभुज और षट्कोण की रचना करने का प्रयास कीजिए।

प्रयास कीजिए



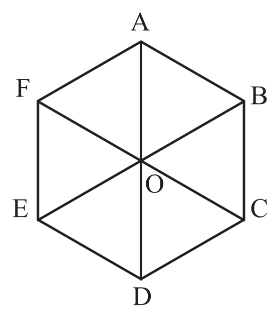
एक सम पंचभुज बनाने के लिए हमें पहले त्रिभुज और पंचभुज की अच्छी समझ होनी चाहिए। हम इस पर आगे के वर्षों में चर्चा करेंगे। यद्यपि एक सम-षट्कोण की रचना करना हमारे लिए संभव है।

क्या हम इस एक सम-षट्कोण को ऐसे छोटे टुकड़ों में तोड़ सकते हैं जिनकी रचना की जा सकती है?

सम-षट्कोण और समबाहु त्रिभुज

क्या होता है जब हम एक सम-षट्कोण के विपरीत बिंदुओं को मिलाते है? चूँकि एक सम-षट्कोण की भुजाएँ और कोण समान होते हैं, तब क्या हम इस प्रकार की आकृति बना सकते हैं।

क्या आकृति के सभी त्रिभुज, समबाहु त्रिभुज होंगे? इन प्रश्नों के उत्तर के लिए हम अपने दृष्टिकोण को बदलेंगे।



चित्र 6.12

क्या चित्र 6.12 के अनुसार 6 सर्वांगसम समबाहु त्रिभुजों को एक साथ रखा जा सकता है? यदि हाँ, तो क्या इसके परिणामस्वरूप एक सम-षट्कोण प्राप्त होगा?

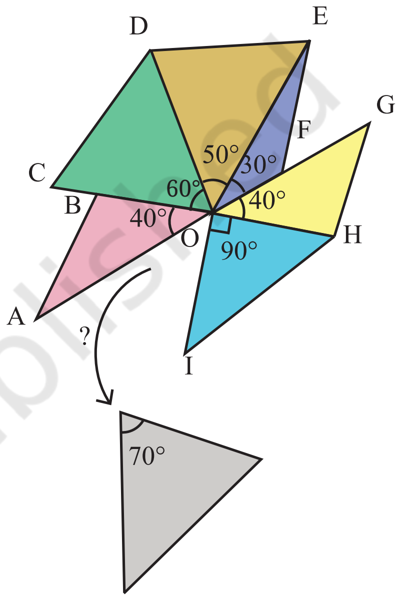
© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

यदि 6 सर्वांगसम समबाहु त्रिभुज इस प्रकार से रखे जा सकते हैं जैसा कि चित्र 6.12 में दिखाया गया है तो परिणामी षट्कोण की भुजाएँ समान होंगी तथा उनके कोण 60° + 60° = 120° होंगे (कैसे?)। अत: हमें यह जाँचने की आवश्यकता है कि क्या 6 सर्वांगसम समबाहु त्रिभुज बिना अतिव्यापी हुए और केंद्र के चारों ओर बिना कोई अंतराल छोड़ें भली-भांति समा सकते हैं।

हमने एक बिंदु के चारों ओर के संपूर्ण कोण को 360° लेकर एक डिग्री को परिभाषित किया है। अत: केंद्र के चारों ओर के सभी कोणों का योग 360° होना चाहिए।

❓ इस चित्र पर विचार कीजिए। क्या दिए गए अंतराल में 70° का कोण समा सकता है? अंतराल कोण ∠AOI क्या है?



हम जानते हैं कि

40° + 60°+ 50° + 30° + 40° + 90° + अंतराल कोण = 360°

इसका उपयोग करके यह निर्धारित कीजिए कि क्या इस अंतराल में 70° कोण समाता है?

इस प्रकार, यदि ऐसे कोण जो मिलकर 360° बनाते हैं तो उनके शीर्ष को एक ही बिंदु पर इस प्रकार से जोड़ा जा सकता है कि—

(a) कोण अतिव्यापी न हो तथा

(b) वे पूर्णत: बिंदु के आस-पास के क्षेत्र को आच्छादित कर ले।

चूँकि समबाहु त्रिभुज में प्रत्येक कोण 60° का होता है, अत: 6 कोण मिलकर 360° बनाते हैं। इस प्रकार 6 सर्वांगसम त्रिभुजों को चित्र 6.12 में दिखाए गए अनुसार व्यवस्थित किया जा सकता है।

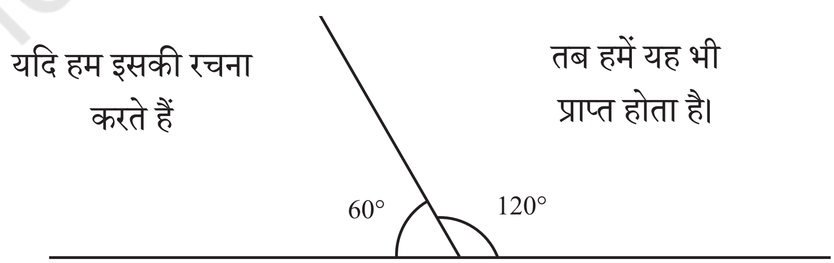
❓ चित्र 6.12 में, क्या आप समझा सकते हैं कि AOD, BOE और COF सीधी रेखाएँ क्यों हैं?

❓ एक मापक और परकार का उपयोग करके 4 से.मी. पार्श्व भुजा के एक सम-षट्कोण की रचना कीजिए।

यदि हम एक मापक और परकार की सहायता से 120° कोण की रचना कर सकें तो हम एक सम-षट्कोण की रचना कर सकते हैं।

❓ हम यह कैसे करते हैं?

यह तब किया जा सकता है जब 60° कोण की रचना की जा सके।



Reprint 2026-27

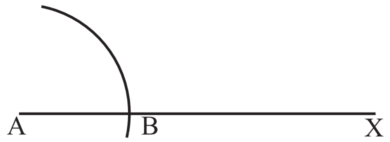
60° कोण की रचना

? हम एक 60° कोण की रचना कैसे करते हैं?

यदि हम एक समबाहु त्रिभुज की रचना करते हैं तो हमें एक 60° कोण प्राप्त होता है। इसके लिए हम निम्नलिखित चरणों का उपयोग कर सकते हैं।

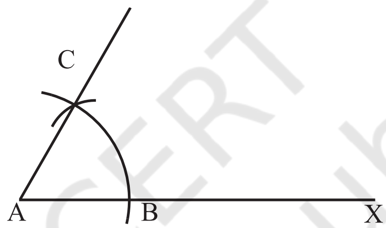
माना कि हमें रेखाखंड AX पर बिंदु A पर 60° कोण की आवश्यकता है।

चरण 1



केंद्र A से किसी भी त्रिज्या के साथ एक चाप बनाइए।

चरण 2

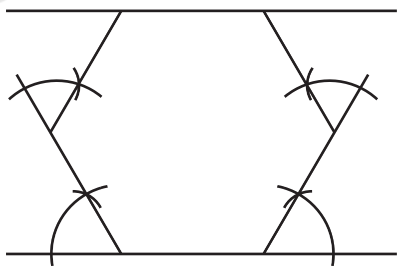


उसी त्रिज्या के साथ, B से एक और चाप बनाइए जो पहले चाप को काटता हो
माना C वह बिंदु है जिस पर चाप मिलते हैं।

तब ∠CAX = 60°

? ∠CAX = 60° क्यों है? क्या यहाँ एक समबाहु त्रिभुज है?

हम इन विचारों का उपयोग एक सम-षट्कोण की रचना के लिए कर सकते हैं।



? 5 से.मी. पार्श्व भुजा का एक सम-षट्कोण बनाइए।

Reprint 2026-27

© NCERT not to be republished

संबंधित रचनाएँ

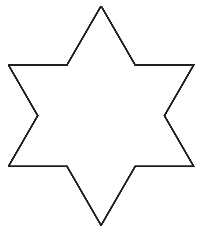
30° और 15° कोणों की रचना

? आप 30° और 15° कोणों की रचना कैसे करेंगे?

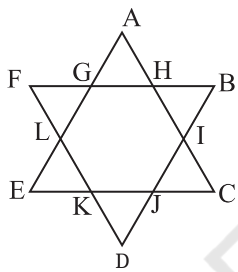
6 बिंदु वाला तारा

? निम्नलिखित 6 बिंदु वाले तारे की रचना कीजिए। स्मरण रखिए कि इसमें घूर्णन समरूपता हो।

गणित चर्चा



संकेत—



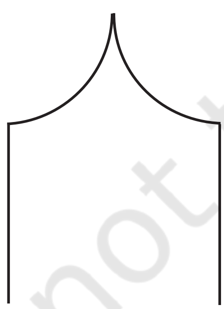
क्या यहाँ आप एक षट्कोण देखते हैं?

? क्या 6 त्रिभुज तारे के 6 बिंदु बनाते हैं, क्या ΔAGH, ΔBHI, ΔCIJ, ΔDJK, ΔELK, ΔFLG समबाहु हैं? क्यों?

[**संकेत**— इनके कोण ज्ञात कीजिए।]

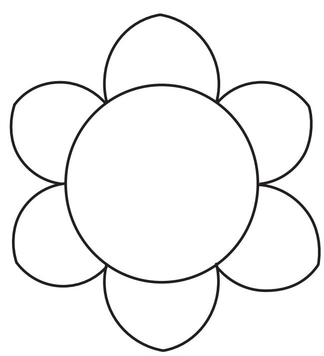
? पता लगाइए

1. नीचे दी गई आकृतियों की रचना कीजिए —



(a)

एक अंतर्वाह चाप

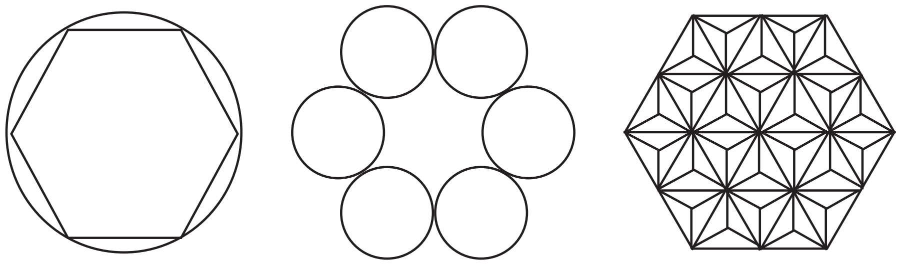


(b)

इस चित्र के विषय में रोचक बात यह है कि इसे केवल एक परकार की सहायता से भी बनाया जा सकता है। क्या आप ऐसा कर सकते हैं?

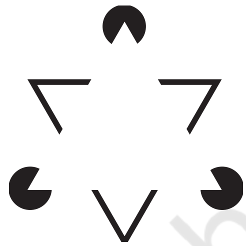
© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

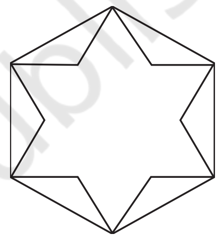


(c) (d) (e)

2. दृष्टि भ्रम— क्या आप नीचे दी गई आकृति में कुछ रोचक देखते हैं? यह कैसे होता है? इसे अपनी अभ्यास पुस्तिका में बनाइए।



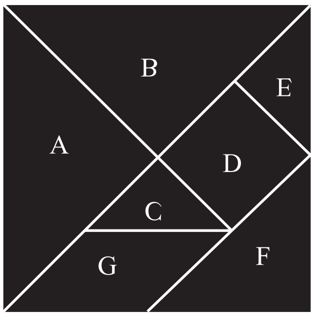
3. इस आकृति की रचना कीजिए।
[**संकेत** — इस आकृति में कोण ज्ञात कीजिए।]



प्रयास कीजिए

4. एक रेखा *l* खींचिए तथा रेखा के बाहर कहीं भी एक बिंदु Pअंकित कीजिए। रेखा *l* पर एक लंब खींचिए जो कि बिंदु P से होकर जाए।
[**संकेत** — इस *l* पर एक रेखाखंड ज्ञात कीजिए जिसका लंब समद्विभाजक P से होकर जाता हो।]

6.2 टाइल लगाना



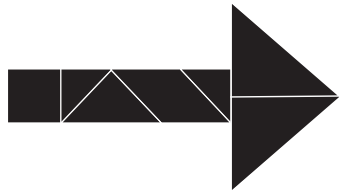
टैनग्राम एक पहेली है जिसकी उत्पत्ति चीन में हुई थी। इसमें एक वर्ग को 7 टुकड़ों में विभाजित करके उनका उपयोग करते हैं, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।

इस समस्या के लिए हमें टैनग्राम के 7 टुकड़ों की आवश्यकता होगी। ये पुस्तक के अंत में दिए गए हैं या आप आकृति को देखकर गत्ते को टुकड़ों में काटकर इन्हें बना सकते हैं।

© NCERT not to be republished

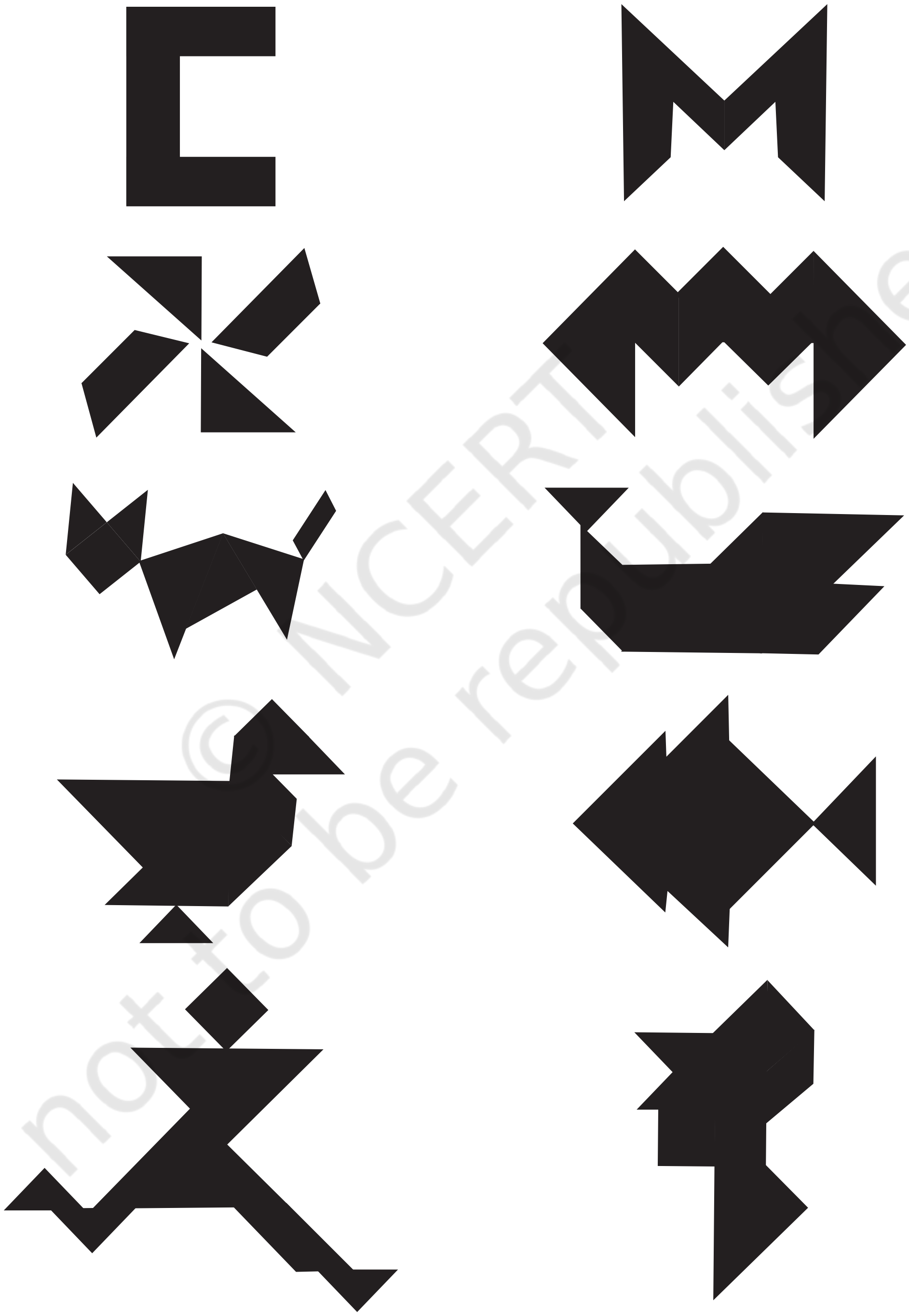
Reprint 2026-27

हम टैनग्राम के टुकड़ों को पुनः व्यवस्थित करके रोचक टुकड़े बना सकते हैं, जैसे कि यहाँ एक तीर है।



पता लगाइए

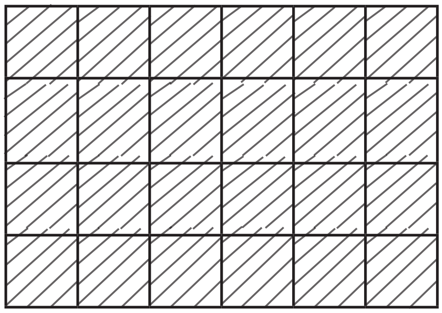
निम्नलिखित आकृतियों को बनाने के लिए टैनग्राम के टुकड़ों को कैसे पुनर्व्यवस्थित किया जा सकता है?



© NCERT not to be republished

आकारों के एक समूह का उपयोग करके बिना किसी अंतराल या अतिव्यापन के एक क्षेत्र को आच्छादित करने को **टाइलिंग** कहा जाता है।

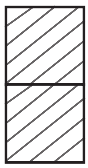
इकाई वर्गों से बना एक आयताकार जाल लीजिए—



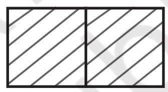
हम इसे 4 × 6 का जाल (ग्रिड) कहते हैं क्योंकि इसमें 4 पंक्तियाँ और 6 स्तंभ हैं।

गणित चर्चा

? क्या 2 × 1 टाइलों की कई प्रतियों का उपयोग करके एक 4 × 6 के जाल को भरा जा सकता है? हमें 2 × 1 टाइल को घुमाकर उपयोग करने की अनुमति है।

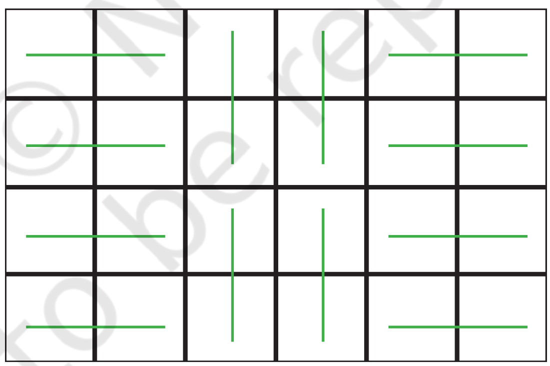


ऊर्ध्वाधर टाइल



क्षैतिज टाइल

यहाँ एक विधि है।



स्पष्टत: केवल यह एकमात्र टाइलिंग संभव नहीं है।

? क्या एक 4 × 7 के जाल को 2 × 1 टाइलों का उपयोग करके बनाया जा सकता है?

? क्या 5 × 7 के जाल में ऐसा किया जा सकता है?

2 × 1 टाइलों का उपयोग करके 5 × 7 के जाल को आच्छादित करने की कोई विधि नहीं है क्योंकि इस जाल में 35 इकाई वर्ग हैं। जबकि प्रत्येक टाइल ठीक 2 इकाई वर्गों को आच्छादित करती है।

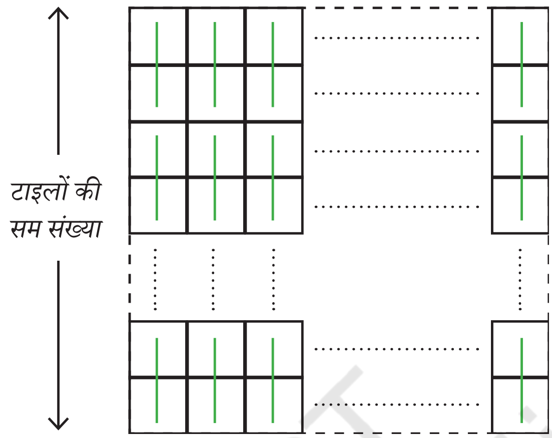
© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

स्पष्टीकरण को पूर्ण कीजिए।

क्या एक $m \times n$ जाल को 2×1 टाइलों के साथ भरा जा सकता है जबकि m और n दोनों सम हों? यदि हाँ, तो इसमें टाइल भरने के लिए एक व्यापक योजना तैयार कीजिए।

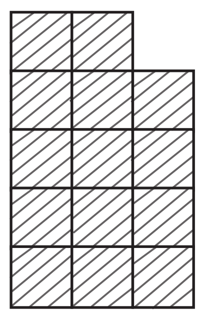
इस स्थिति के लिए एक व्यापक योजना यह है कि प्रत्येक स्तंभ को ऊर्ध्वाधर टाइलों से आच्छादित कर दिया जाए। ऐसा करना संभव है क्योंकि पंक्तियों की संख्या सम है।



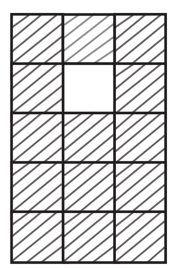
क्या एक $m \times n$ जाल को 2×1 टाइलों के साथ भर सकते हैं जबकि m और n में से एक सम है व दूसरा विषम है? यदि हाँ, तो इसमें टाइल भरने के लिए एक व्यापक योजना तैयार कीजिए।

क्या एक $m \times n$ जाल को 2×1 टाइलों के साथ भर सकते हैं जबकि m और n दोनों विषम हों? कारण बताइए।

यहाँ एक 5×3 जाल है जिसमें एक इकाई वर्ग हटा दिया गया है, अब इसमें सम संख्या में इकाई वर्ग है। क्या इसे 2×1 टाइलों के साथ भरा जा सकता है?



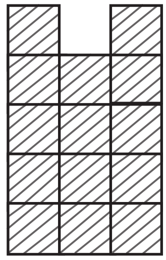
क्या नीचे दिए गए क्षेत्र को 2×1 टाइलों से आच्छादित किया जा सकता है?



© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

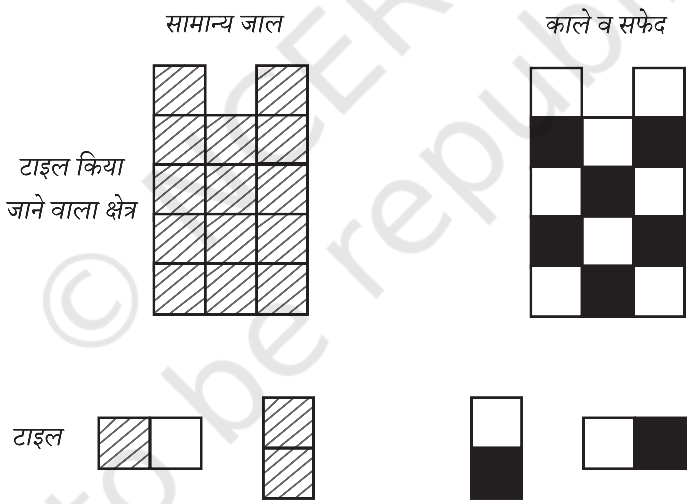
इसके विषय में विचार कीजिए।



चित्र 6.13

क्या आप इसमें टाइल लगाने में सक्षम थे? हम कैसे सुनिश्चित कर सकते हैं कि इसमें टाइल नहीं लगाई जा सकती? क्या हम कोई और इकाई वर्ग ज्ञात कर सकते हैं कि जिसे यदि 5 × 3 जाल से हटा दिया जाए तो यह टाइल लगाने योग्य नहीं रह जाता है?

इन प्रश्नों को देखने की एक रोचक विधि है। इस प्रकार की किसी भी टाइल लगाने की समस्या के लिए, हम काले और सफेद रंग के इकाई वर्गों के साथ इस समस्या को देख सकते हैं जिससे काले वर्गों में केवल सफेद पड़ोसी तथा सफेद वर्गों में काले पड़ोसी हों। चित्र 6.13 की टाइल लगाने की समस्या के लिए हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है—



चित्र 6.14

काले और सफेद क्षेत्र में समस्या, 2 × 1 काले और सफेद टाइलों के साथ क्षेत्र को टाइल से आच्छादित करने की है जिससे एक टाइल का प्रत्येक काला वर्ग, जाल के एक काले वर्ग पर बैठता हो तथा प्रत्येक सफेद वर्ग, जाल के एक सफेद वर्ग पर बैठता हो।

यदि सामान्य जाल टाइल लगाने योग्य है तो क्या काला और सफेद जाल भी टाइल लगाने योग्य है?

यदि काला और सफेद जाल टाइल लगाने योग्य है तो क्या सामान्य जाल टाइल लगाने योग्य है?

हम देख सकते हैं कि उपरोक्त दोनों प्रश्नों का उत्तर 'हाँ' है।

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

क्या चित्र 6.14 में काला और सफेद क्षेत्र टाइल से आच्छादित किया जा सकता है?
काले और सफेद टाइलों से आच्छादित किए गए किसी भी क्षेत्र में काली और सफेद टाइलों की संख्या समान होनी चाहिए।
चूँकि चित्र 6.14 के काले और सफेद क्षेत्र में 8 सफेद वर्ग और 6 काले वर्ग हैं इन्हें इन टाइलों के साथ कभी भी आच्छादित नहीं किया जा सकता है।

इस विचार का उपयोग एक और इकाई वर्ग खोजने के लिए कीजिए, जिसे 5 × 3 जाल से हटाए जाने पर उसे टाइल न लगाने योग्य बनाता है?

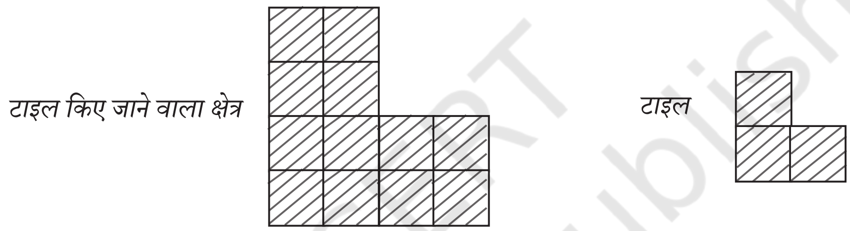
गणित चर्चा

क्या यह आश्चर्य की बात नहीं है कि रंगों के प्रयोग व समस्या को अधिक जटिल बनाने से, इसे सुलझाना सरल हो जाता है? समस्या को देखने की यह एक रोचक विधि है।

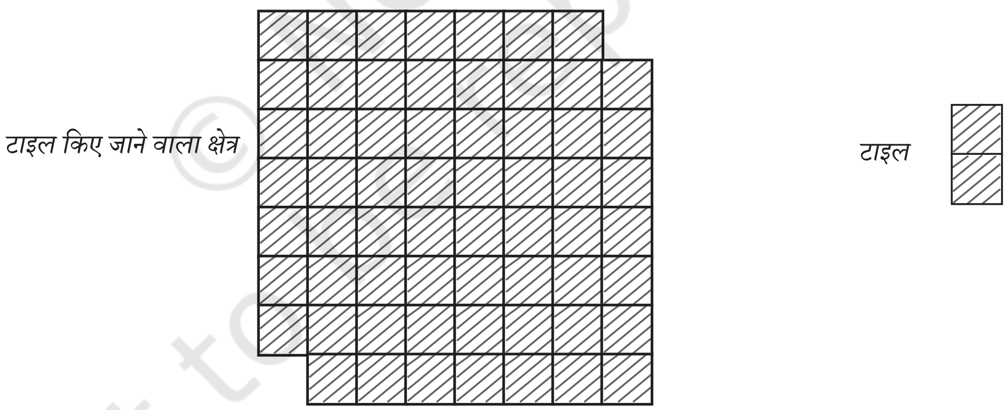
पता लगाइए

क्या निम्न प्रकार से टाइल लगाना संभव है?

1.



2.



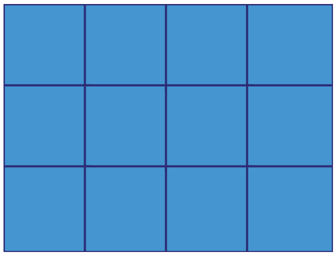
© NCERT not to be republished

पूरी सतह की टाइलिंग करना

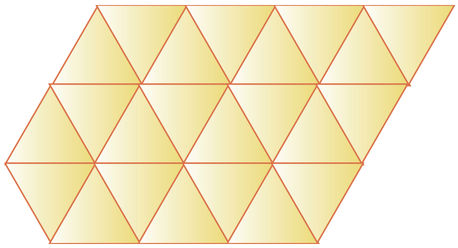
अब तक हमने देखा कि किसी दिए गए क्षेत्र को कैसे टाइल से भरा जाता है। पूरी सतह पर टाइल लगाने के बारे में आप क्या सोचते हैं?

क्या आप एक ऐसी आकृति के बारे में सोच सकते हैं जिसकी प्रतियों से पूरी सतह पर टाइल लगाई जा सकती हैं? स्पष्ट रूप से, वर्ग की आकृति से किया जा सकता है।

Reprint 2026-27

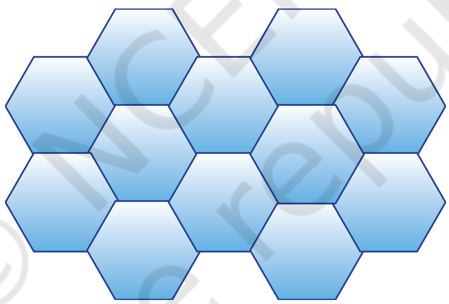


क्या कोई अन्य सम-बहुभुज है जो इस सतह को टाइल लगा सकते हैं? समबाहु त्रिभुजों के विषय में आप क्या सोचते हैं?

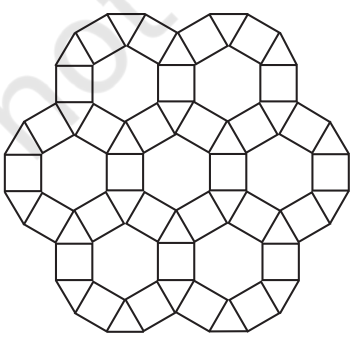


समबाहु त्रिभुज के साथ टाइल लगाने की स्थिति यह दर्शाती है कि एक अन्य सम-बहुभुज के साथ टाइल लगाना भी संभव है।

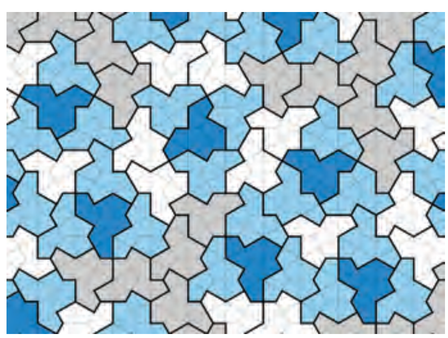
एक सतह को सम-षट्कोणों का उपयोग करके भी टाइल लगाया जा सकता है।



एक सतह को एक से अधिक आकार का उपयोग करके और अनियमित बहुभुज का उपयोग करके भी टाइल किया जा सकता है। महान डच कलाकार एस्चर (1898–1972) जैसे व्यक्तियों के कार्यों ने टाइलिंग जैसे गणितीय विषयों की खोज की। उन्होंने पशुओं के आकार के साथ एक सतह को टाइल करने की रचनात्मक विधि दी। ऐसे कुछ उदाहरण नीचे दिए जा रहे हैं।



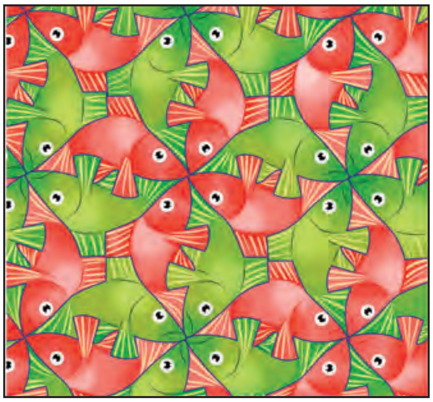
(a)



(b)

© NCERT not to be republished

Reprint 2026-27

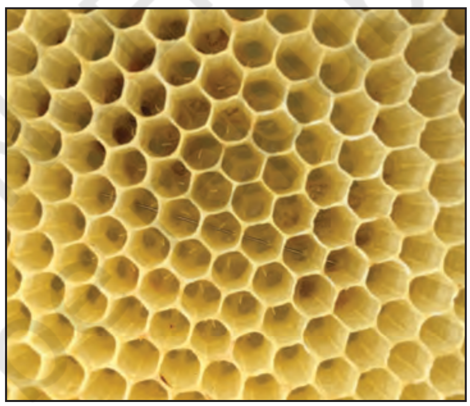


(c)

(d)

गणितज्ञ अभी भी किसी सतह को टाइल लगाने की विभिन्न विधियाँ खोज रहे हैं। टाइल (b) की खोज वर्ष 2023 में हुई है।

क्या आपने टाइलिंग को दैनिक जीवन में देखा है? इनका उपयोग बार-बार इमारतों और रचनाओं में किया जाता है। प्रकृति में भी टाइल पाए जाती हैं। मधुमक्खी के छत्ते और ततैया के घोसले के सामने वाले भाग में षट्कोणीय कोशिकाओं का उपयोग करके टाइल बनाए जाती हैं।



उन कोशिकाओं का उपयोग कीटों द्वारा अपने अंडों, लावा और प्यूपा को सुरक्षित रखने व भोजन को संग्रहीत करने के लिए किया जाता है। चूँकि यह क्षेत्र टाइल से बना है, अत: कोई स्थान व्यर्थ नहीं होता है।

वैज्ञानिक अभी भी आश्चर्य करते हैं कि कैसे मधुमक्खी और ततैया षट्कोणीय कोशिकाएँ बनाने में सक्षम हैं। अगली बार जब आप कोई टाइलिंग देखें तो उस पर अधिक ध्यान दें।

टाइलिंग अभी भी ज्यामिति में अनुसंधान के सबसे रोमांचक और सक्रिय क्षेत्रों में से एक है।

Reprint 2026-27

सारांश

- एक रेखाखंड या किसी भी ज्यामितीय मात्रा को दो समान भागों में विभाजित करने को **समद्विभाजन** कहा जाता है।
- कोई भी बिंदु जो किसी दिए गए रेखाखंड के दो अंतिम बिंदुओं से समान दूरी पर हो, वह उसके **लंब समद्विभाजक** पर स्थित होता है। इस गुण का उपयोग एक मापक और परकार की सहायता से एक लंब समद्विभाजन की रचना के लिए किया जा सकता है।
- लंब समद्विभाजन की रचना की विधि को केवल एक मापक और परकार का उपयोग करके एक रेखा के किसी भी बिंदु पर $90°$ का कोण खींचने के लिए संशोधित किया जा सकता है।
- त्रिभुजों की सर्वांगसमता गुण का उपयोग करके एक कोण को **समद्विभाजन** और प्रतिलिपि किया जा सकता है।
- एक समबाहु त्रिभुज की रचना करके एक मापन व परकार की सहायता से एक $60°$ के कोण की रचना की जा सकती है।
- बिना किसी अंतराल या अतिव्यापन के आकारों के एक समूह का उपयोग करके एक क्षेत्र को पूर्णत: आच्छादित करना, **टाइलिंग** कहलाता है।

© NCERT not to be republished