



0790CH07

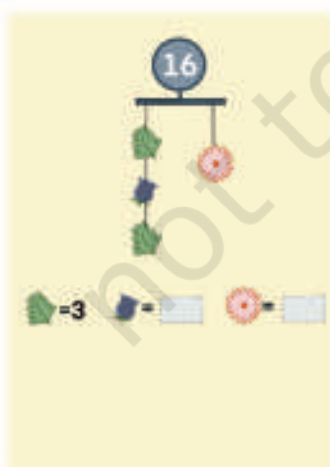
### 7.1 अज्ञात को खोजें

#### अज्ञात भार

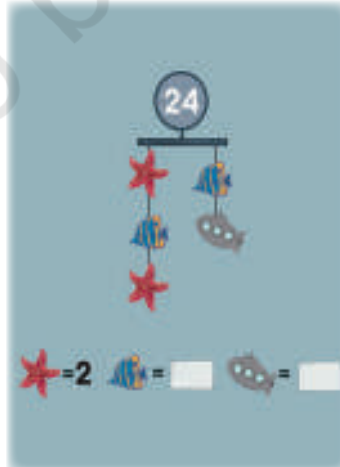
हमारे पास एक तराजू है जो निम्नानुसार कार्य करता है। इसमें दी गई संख्याएँ भार की समान इकाइयों को दर्शाती हैं।



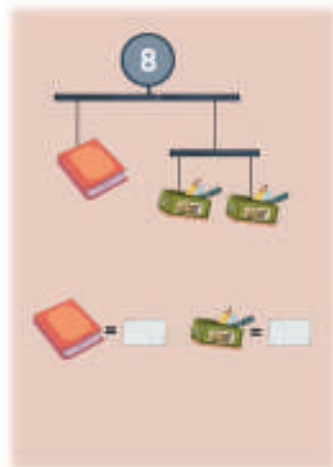
? निम्नलिखित स्थितियों में अज्ञात भार ज्ञात कीजिए।



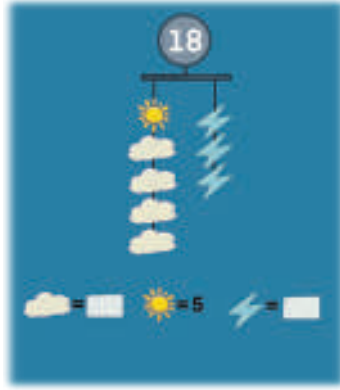
चित्र 7.1



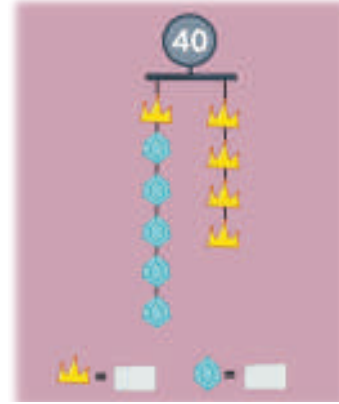
चित्र 7.2



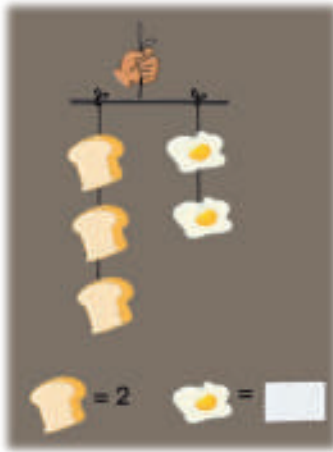
चित्र 7.3



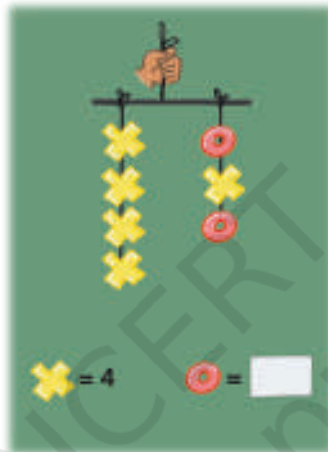
चित्र 7.4



चित्र 7.5



चित्र 7.6



चित्र 7.7

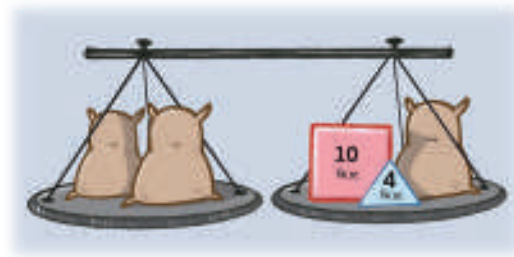


चित्र 7.8

- ❓ प्राप्त उत्तरों की अपने साथियों के साथ चर्चा कीजिए। आपका उत्तर क्यों सही है, कारण सहित बताइए।
- ❓ निम्नलिखित स्थितियों में बोरी का अज्ञात भार ज्ञात कीजिए। चित्र 7.10 में सभी बोरियों का भार समान है।

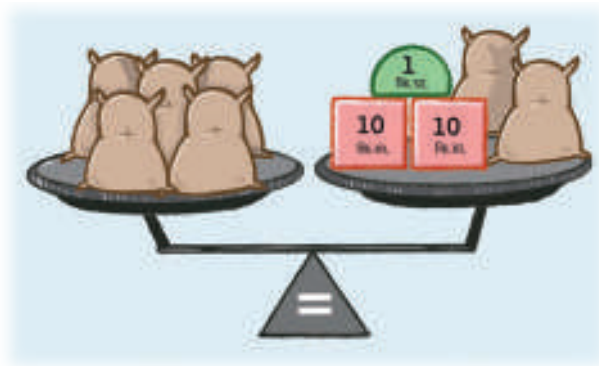


चित्र 7.9



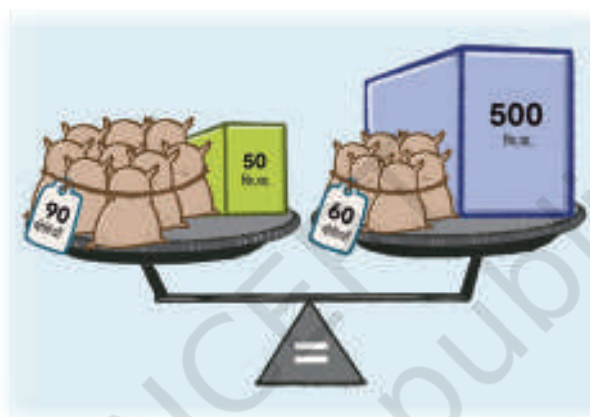
चित्र 7.10

[संकेत— यदि हम दोनों पलड़ों से समान भार हटा दें तो क्या तब भी तराजू संतुलित अवस्था में रहेगा? चित्र 7.10 में प्रत्येक पलड़े से एक बोरी हटाइए।]



चित्र 7.11

[संकेत— क्या आप वस्तुओं को हटा सकते हैं जिससे सभी बोरियाँ एक ही पलड़े पर रहें।]



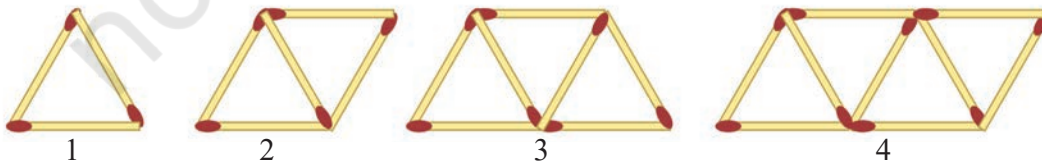
चित्र 7.12

**शिक्षक हेतु टिप्पणी**— आप अपने विद्यार्थियों को विभिन्न प्रक्रियाओं एवं विधियों का उपयोग करके इन समस्याओं का समाधान ढूँढ़ने के लिए प्रोत्साहित कीजिए तथा उनसे अपनी विधियों की तुलना और अंतर करने के लिए कहिए।

आइए, अब हम एक भिन्न प्रकार की व्यवस्था में एक अज्ञात मान खोजते हैं।

### माचिस की तीलियों के प्रतिरूप

तीलियों की व्यवस्था के इस क्रम पर विचार कीजिए।



स्मरण कीजिए कि हमने इस क्रम का अध्ययन पिछले अध्याय में किया है।

चित्र में माचिस की तीलियों के क्रम को उनकी प्रथम 4 स्थिति संख्या के अनुसार दर्शाया गया है।

- ❓ जैसमिन ने 99 तीलियों का उपयोग करते हुए इसी क्रम के अनुसार माचिस की तीलियों की एक व्यवस्था बनाने का निश्चय किया। दिए गए क्रम में इस व्यवस्था की क्रम संख्या क्या होगी?

इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए प्रत्येक स्थिति में माचिस की तीलियों की संख्या जानना उपयोगी है। हमने देखा कि —

स्थिति 1 पर व्यवस्था में  $2 \times (1) + 1 = 3$  माचिस की तीलियाँ हैं,  
 स्थिति 2 पर व्यवस्था में  $2 \times (2) + 1 = 5$  माचिस की तीलियाँ हैं,  
 स्थिति 3 पर व्यवस्था में  $2 \times (3) + 1 = 7$  माचिस की तीलियाँ हैं,  
 और इसी प्रकार आगे भी।

अतः  $n$ वें स्थान पर  $2n + 1$  माचिस की तीलियाँ होंगी।

जैसमिन के प्रश्न का उत्तर देने के लिए, हमें  $n$  का मान ज्ञात करना होगा जिससे  $2n + 1$  का मान 99 हो अथवा

$$2n + 1 = 99$$

- ❓ क्या आप  $n$  का मान ज्ञात करने की विधियाँ खोज सकते हैं, जैसे यदि  $2n + 1 = 99$  हो?

- ❓ क्या 200 तीलियों का उपयोग करके इस क्रम में आने वाली माचिस की तीलियों की व्यवस्था बनाना संभव है?



दो बीजीय व्यंजकों के बीच समानता वाले कथन को **समीकरण** कहते हैं। आजकल जब प्रतीकों का उपयोग किया जा रहा है, तब हम समीकरण को दो बीजीय व्यंजकों के मध्य '=' चिह्न लगाकर लिखते हैं। नीचे समीकरणों के कुछ और उदाहरण दिए गए हैं—

$$3x + 4 = 7,$$

$$20 = y - 3,$$

$$\frac{a}{3} = 50,$$

$$2z + 4 = 5z - 14 \text{ आदि।}$$

अक्षर संख्या जिसके लिए समानता विद्यमान रहती है अथवा जिसके कारण समीकरण के बाएँ पक्ष (LHS) का मान, समीकरण के दाएँ पक्ष (RHS) के समान होता है, उसे ज्ञात करने की प्रक्रिया को समीकरण **हल** करना कहा जाता है।

जैसा कि हमने माचिस की तीलियों की समस्या में देखा कि एक अज्ञात राशि को एक अक्षर संख्या के रूप में उपयोग करके एक समीकरण बनाने से हमें उसका मान ज्ञात करने में सहायता मिल सकती है।

बायाँ पक्ष (LHS)

दायाँ पक्ष (RHS)

$$2n + 1 = 99$$

- ❓ चित्र 7.6, 7.7, 7.8, 7.9, 7.10 और 7.11 में तराजू की समस्याओं के लिए, अज्ञात भार को दर्शाने के लिए अक्षर-संख्याओं का उपयोग करके समीकरण तैयार कीजिए।

चित्र 7.6 में दिए गए प्रश्न के लिए, आइए एक अंडे के भार को  $e$  से दर्शाएँ। चूँकि ब्रेड का प्रत्येक टुकड़ा 2 है, अतः एक ओर  $2 + 2 + 2 = 6$  और दूसरी ओर  $e + e$  है। चूँकि ये दोनों समान हैं, अतः

$$6 = e + e, \text{ अथवा}$$

$$2e = 6$$

चित्र 7.7 में दिए गए प्रश्न के लिए, ✨ = 4 है और हम एक 🍬 जलेबी के भार को  $y$  से निरूपित कर सकते हैं। अतः एक ओर 16 और दूसरी ओर  $4 + 2y$  है। इस प्रकार, हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है।

$$4 + 2y = 16$$

- ❓ आपके द्वारा बनाए गए समीकरणों को हल कीजिए और जाँच कीजिए कि क्या आपको अज्ञात भार के लिए वही मान प्राप्त होता है जो आपको पहले प्राप्त हुआ था।
- ❓ कोई 5 समीकरण बनाइए। इन्हें हल करने की विधियाँ खोजिए।



## 7.2 समीकरणों को व्यवस्थित रूप से हल करना

आपने पिछले भाग में दिए गए विभिन्न समीकरणों को कैसे हल किया? समीकरण को हल करने की एक विधि यह है कि पहले अक्षर संख्या के स्थान पर भिन्न-भिन्न मानों (संख्याओं) को प्रतिस्थापित करना, तत्पश्चात यह जाँचना कि कौन-सा मान  $LHS = RHS$  बनाता है। उदाहरण के लिए, समीकरण  $2n + 1 = 99$  पर विचार कीजिए।

यदि हम  $n = 5$  प्रतिस्थापित करते हैं तो हमें  $LHS = 2 \times (5) + 1 = 11$  प्राप्त होता है। यह 99, RHS से बहुत दूर है।

हम  $n = 10$  से प्रयास कर सकते हैं। बायाँ पक्ष 21 है। यह अभी भी 99 के समान नहीं है।

क्या हम  $n = 30$  ले सकते हैं? बायाँ पक्ष अब 61 है जो अभी भी 99 से बहुत कम है।

आइए  $n = 40$  का प्रयास करें। बायाँ पक्ष 81 है। अब हम 99 के समीप पहुँच रहे हैं।

जब  $n = 50$  हो, तो बायाँ पक्ष 101 होता है। यह थोड़ा अधिक है।

जब  $n = 49$  हो, तो बायाँ पक्ष 99 है।

अतः समीकरण  $2n + 1 = 99$  का हल  $n = 49$  है।

- ❓ क्या इस समीकरण का कोई अन्य हल हो सकता है?
- इस विधि को **परीक्षण और त्रुटि** विधि कहा जाता है।  
परीक्षण और त्रुटि विधि अकुशल हो सकती है।
- ❓ परीक्षण और त्रुटि विधि का उपयोग कर  $5x - 4 = 7$  को हल करने का प्रयास कीजिए।

स्मरण कीजिए कि तराजू के संदर्भ में हमने परीक्षण और त्रुटि विधि का उपयोग नहीं किया था। कुछ समस्याओं का हल ढूँढ़ना सरल था। कुछ के लिए हमने इस तथ्य का उपयोग किया कि जब हम संतुलित तराजू की दोनों प्लेटों से समान भार हटाते हैं तो वह संतुलित रहता है। क्या समीकरणों में भी ऐसा ही गुण विद्यमान होता है?

- ❓ एक समीकरण  $15 + 8 = 23$  पर विचार कीजिए। यदि हम दोनों पक्षों में समान संख्याएँ जोड़ें, घटाएँ, गुणा करें या भाग दें, तो क्या तब भी बाएँ पक्ष और दाएँ पक्ष की समानता बनी रहेगी?

उदाहरण के लिए, आप दोनों पक्षों में 10 जोड़कर जाँच कर सकते हैं।

चूँकि समीकरण के बाएँ पक्ष और दाएँ पक्ष का मान समान होता है, अतः दोनों पक्षों पर समान संक्रिया करने से उनकी समानता में स्पष्ट रूप से कोई परिवर्तन नहीं होगा।

तराजू के प्रश्नों में हमने समान भार हटा दिए जिससे सभी अज्ञात भार तराजू की एक ही प्लेट पर आ जाएँ। इससे समस्या हल करना सरल हो गया। हम इसी रणनीति का उपयोग समीकरण हल करने के लिए भी कर सकते हैं। आइए, पहले कुछ अंकगणितीय प्रश्न हल करते हैं।

- ❓ **उदाहरण 1**— यह ज्ञात है कि  $14593 - 1459 + 145 - 14 + 88 = 13353$  है तो बताइए व्यंजक  $14593 - 1459 + 145 - 14$  का मान क्या होगा?

मान ज्ञात करने के लिए, क्या हमें  $14593 - 1459 + 145 - 14$  की गणना करने की आवश्यकता है? नहीं, हम इसे 13353 में से 88 घटाकर प्राप्त कर सकते हैं।

- ❓ हम ऐसा क्यों कर सकते हैं?

हम ऐसा इसलिए कर सकते हैं क्योंकि जोड़ और घटाव व्युत्क्रम संक्रियाएँ हैं। अतः वांछित व्यंजक का मान दोनों पक्षों (बाएँ पक्ष और दाएँ पक्ष) से 88 घटाकर ज्ञात किया जा सकता है, जिससे पद 88 हट जाता है और केवल बाएँ पक्ष पर मूल्यांकन हेतु व्यंजक शेष रह जाता है।

$$14593 - 1459 + 145 - 14 + 88 - 88 = 13353 - 88$$

- ❓ **उदाहरण 2**— यह ज्ञात है कि  $23 \times 41 \times 11 \times 8 \times 7 = 5,80,888$  है। व्यंजक  $23 \times 41 \times 11 \times 8$  का मान क्या है?

इस तथ्य का उपयोग करते हुए कि गुणन और भाग व्युत्क्रम संक्रियाएँ हैं, हम व्यंजक का मान प्राप्त करने के लिए 5,80,888 को 7 से विभाजित कर सकते हैं।

- ❓ क्या यह दोनों पक्षों को 7 से विभाजित करने के समान है, जिसमें गुणन 7 को हटा दिया जाता है और बाईं ओर केवल जिस व्यंजक का मान ज्ञात करना है वही शेष रहता है?



- ❓ **उदाहरण 3**— यह ज्ञात है कि  $12345 - 5432 + 135 - 24 - (-67) = 7091$  है। व्यंजक  $12345 - 5432 + 135 - 24$  का मान क्या है?

इस समस्या को इस तथ्य का उपयोग करके भी हल किया जा सकता है कि जोड़ और घटाव व्युत्क्रम संक्रियाएँ हैं। इसके लिए हम निम्नलिखित विधि का भी उपयोग कर सकते हैं जिसे समझना आसान है।

बाएँ पक्ष पर केवल मान ज्ञात करने वाले व्यंजक को बनाए रखने के लिए हमें  $-(-67)$  पद को हटाना होगा। हम समीकरण के दोनों पक्षों में  $(-67)$  जोड़कर इस पद को हटा सकते हैं।

$$12345 - 5432 + 135 - 24 - (-67) + (-67) = 7091 + (-67)$$

$$12345 - 5432 + 135 - 24 - (-67) + (-67) = 7091 + (-67)$$

इस प्रकार,  $12345 - 5432 + 135 - 24 = 7024$

- ❓ **उदाहरण 4** — यह ज्ञात है कि  $\left(\frac{35}{113}\right) \times 24 \times 14 \times \left(\frac{8}{9}\right) = \frac{94080}{1017}$  है। व्यंजक  $\left(\frac{35}{113}\right) \times 24 \times 14$  का मान क्या है?

**हल** — बाएँ पक्ष पर केवल मान ज्ञात करने वाले व्यंजक को बनाए रखने के लिए हमें गुणनखंड  $\left(\frac{8}{9}\right)$  को हटाने की आवश्यकता है। हम दोनों पक्षों  $\left(\frac{8}{9}\right)$  से विभाजित करके ऐसा कर सकते हैं।

$$\left[\left(\frac{35}{113}\right) \times 24 \times 14 \times \left(\frac{8}{9}\right)\right] \div \left(\frac{8}{9}\right) = \frac{94080}{1017} \div \left(\frac{8}{9}\right)$$

$$\left(\frac{35}{113}\right) \times 24 \times 14 \times \left(\frac{8}{9}\right) \times \left(\frac{9}{8}\right) = \frac{94080}{1017} \times \left(\frac{9}{8}\right)$$

इस प्रकार,

$$\left(\frac{35}{113}\right) \times 24 \times 14 = \frac{11760}{113}$$

- ❓ **आइए, इन विचारों का उपयोग समीकरण  $5x - 4 = 7$  को हल करने के लिए करें।**

हम ऐसा क्या कर सकते हैं कि  $5x$  एक ओर हो और बाएँ पक्ष (LHS) तथा दाएँ पक्ष (RHS) के बीच समानता बनी रहे?

बाईं ओर केवल  $5x$  को बनाए रखने के लिए हमें  $-4$  पद को हटाना होगा। यह दोनों पक्षों में  $4$  जोड़कर किया जा सकता है।

$$\text{इस प्रकार, } 5x - 4 + 4 = 7 + 4$$

$$\text{अतः } 5x = 11$$

बाईं ओर केवल अज्ञात  $x$  को बनाए रखने के लिए, हमें गुणनखंड  $5$  को हटाने की आवश्यकता है। यह दोनों पक्षों को  $5$  से विभाजित करके किया जा सकता है।

$$\text{इस प्रकार, } \frac{5x}{5} = \frac{11}{5} \text{ होगा।}$$

$$\text{अतः } x = \frac{11}{5} \text{ है।}$$

❓ क्या हम जाँच सकते हैं कि  $x = \frac{11}{5}$  समीकरण का सही हल है?

हम समीकरण  $5x - 4 = 7$  में  $x$  के स्थान पर  $\frac{11}{5}$  का मान रखकर यह जाँच कर सकते हैं कि क्या बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष है?

बाएँ पक्ष (LHS) में  $x$  के स्थान पर  $\frac{11}{5}$  प्रतिस्थापित करने पर

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= 5\left(\frac{11}{5}\right) - 4 \\ &= \cancel{5}\left(\frac{11}{\cancel{5}}\right) - 4 \\ &= 11 - 4 \\ &= 7\end{aligned}$$

यह RHS के समान ही है।

अतः  $\frac{11}{5}$  वास्तव में समीकरण का सही हल है।

❓ **उदाहरण 5** — समीकरण  $11y + (-5) = 61$  को हल कीजिए।

एक ओर केवल अज्ञात पद  $11y$  को बनाए रखने के लिए, हमें पद  $-5$  को हटाना होगा। यह दोनों ओर से  $(-5)$  घटाकर किया जा सकता है।

$$11y + (-5) - (-5) = 61 - (-5)$$

इस प्रकार

$$11y = 66$$

हम प्रत्यक्षतः  $y$  का मान ज्ञात कर सकते हैं, क्योंकि  $11 \times 6 = 66$  है।

हम  $y$  ज्ञात करने के लिए दोनों पक्षों को 11 से भाग भी दे सकते हैं।

$$11y \div 11 = 66 \div 11$$

अतः  $y = 6$  समीकरण  $11y + (-5) = 61$  का हल है।

क्या आप जाँच सकते हैं कि यह हल सही है?

❓ **उदाहरण 6** —  $6y + 7 = 4y + 21$  को हल कीजिए।

इस समीकरण में, अज्ञात पद वाले व्यंजक दोनों ओर हैं।

❓ हमने देखा कि जब अज्ञात पद एक ओर हो तो समीकरणों को कैसे हल किया जाता है। सभी अज्ञात पदों को एक ओर लाने के लिए क्या किया जा सकता है?

दोनों पक्षों से  $4y$  घटाने पर हमें प्राप्त होता है—

$$6y + 7 - 4y = 4y + 21 - 4y$$

अतः

$$2y + 7 = 21$$

अब दोनों पक्षों में से 7 घटाने पर हमें  $2y + 7 - 7 = 21 - 7$  प्राप्त होता है, जिससे हमें  
 $2y = 14$  प्राप्त होता है।

हम प्रत्यक्षतः  $y$  का मान ज्ञात कर सकते हैं, क्योंकि  $2 \times (7) = 14$  है।

हम  $y$  ज्ञात करने के लिए दोनों पक्षों को 2 से विभाजित भी कर सकते हैं।

$$2y \div 2 = 14 \div 2,$$

अतः  $y = 7$  प्राप्त होता है।



स्मरण रखिए, अपने उत्तर की जाँच करना सदैव अच्छा होता है।

### ? पता लगाइए

1. इन समीकरणों को हल कीजिए और हल की जाँच कीजिए।

(a)  $3x - 10 = 35$

(b)  $5s = 3s$

(c)  $3u - 7 = 2u + 3$

(d)  $4(m + 6) - 8 = 2m - 4$

(e)  $\frac{u}{15} = 6$

2. एक ऐसा समीकरण बनाइए जिसका कोई हल न हो।

[संकेत— एक संख्या से 4 अधिक और उसी संख्या से 5 अधिक कभी भी समान नहीं हो सकते।]

किसी समीकरण को व्यवस्थित रूप से हल करने की प्रक्रिया को एक अवलोकन द्वारा कुशल बनाया जा सकता है। समीकरण  $11y + (-5) = 61$  पर विचार कीजिए, जिसे हमने हल कर लिया है। पहले चरण में हमने पद  $-5$  को हटाने के लिए दोनों पक्षों से  $-5$  घटाया।

$$11y + (-5) - (-5) = 61 - (-5)$$

चूँकि इस क्रिया से बाएँ पक्ष से पद  $-5$  हट जाता है, अतः हम इस चरण को इस प्रकार लिख सकते थे—

$$11y = 61 - (-5)$$

ध्यान दीजिए कि हम योग और घटाव को व्युत्क्रम संक्रिया के रूप में देखकर भी इस चरण पर पहुँच सकते थे, जैसा कि उदाहरण 1 में किया गया है।

इसी प्रकार, जब हमारे पास  $11y = 66$  था तो हमने बाएँ पक्ष से गुणनखंड 11 को हटाने के लिए दोनों पक्षों को 11 से विभाजित किया।

$$11y \div 11 = 66 \div 11$$



चूँकि यह क्रिया बाएँ पक्ष में गुणनखंड 11 को हटा देती है, अतः हम इस चरण को इस प्रकार लिख सकते हैं—

$$y = 66 \div 11$$

पुनः, हम गुणन और भाग को व्युत्क्रम संक्रियाओं के रूप में देखकर इस निष्कर्ष पर पहुँच सकते थे, जैसा कि उदाहरण 2 में बताया गया है।

आइए, समीकरण को हल करने की इन दोनों विधियों को लिखते हैं।

|                                 |                   |
|---------------------------------|-------------------|
| $11y + (-5) = 61$               | $11y + (-5) = 61$ |
| $11y + (-5) - (-5) = 61 - (-5)$ | $11y = 61 - (-5)$ |
| $11y = 66$                      | $11y = 66$        |
| $11y \div 11 = 66 \div 11$      | $y = 66 \div 11$  |
| $y = 6$                         | $y = 6$           |

आइए, एक अन्य समीकरण पर विचार करें जिसे हमने पहले हल किया था।

|                              |                    |
|------------------------------|--------------------|
| $6y + 7 = 4y + 21$           | $6y + 7 = 4y + 21$ |
| $6y + 7 - 4y = 4y + 21 - 4y$ | $6y + 7 - 4y = 21$ |
| $2y + 7 = 21$                | $2y + 7 = 21$      |
| $2y + 7 - 7 = 21 - 7$        | $2y = 21 - 7$      |
| $2y = 14$                    | $2y = 14$          |
| $2y \div 2 = 14 \div 2$      | $y = 14 \div 2$    |
| $y = 7$                      | $y = 7$            |

❓  $\frac{u}{15} = 6$  जैसी स्थितियों में क्या होता है?

दोनों ओर 15 से गुणा करने पर बाएँ पक्ष में केवल  $u = 6 \times 15$  शेष रहता है।

$$u = 90$$

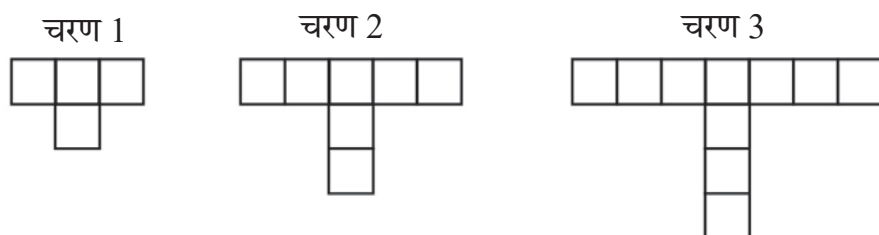
इस प्रकार, हम निम्नलिखित अवलोकन कर सकते हैं—

- जब किसी समीकरण के एक ओर जोड़ा या घटाया गया पद उस ओर से हटा दिया जाता है तो समीकरण का योगात्मक व्युत्क्रम दूसरी ओर एक पद के रूप में प्रदर्शित होना चाहिए जिससे समीकरण संतुलित रहे। उदाहरण के लिए  $2y + 7 = 21$  को  $2y = 21 - 7$  लिखा जा सकता है।
- यदि किसी समीकरण का एक पक्ष दो या अधिक संख्याओं या व्यंजकों का गुणनफल है और हम उनमें से एक गुणनखंड हटा दें जिससे समानता बनाए रखने के लिए दूसरे पक्ष को इस गुणनखंड से विभाजित किया जाना चाहिए। उदाहरण के लिए  $2y = 14$  को  $y = 14 \div 2$  लिखा जा सकता है।
- यदि किसी समीकरण का एक पक्ष दो संख्याओं या व्यंजकों का भागफल है और हम भाजक हटा दें जिससे समानता बनाए रखने के लिए दूसरे पक्ष को इस भाजक से गुणा करना होगा। उदाहरण के लिए  $\frac{u}{15} = 6$  को  $u = 6 \times 15$  लिखा जा सकता है।

## समस्याओं को हल कीजिए

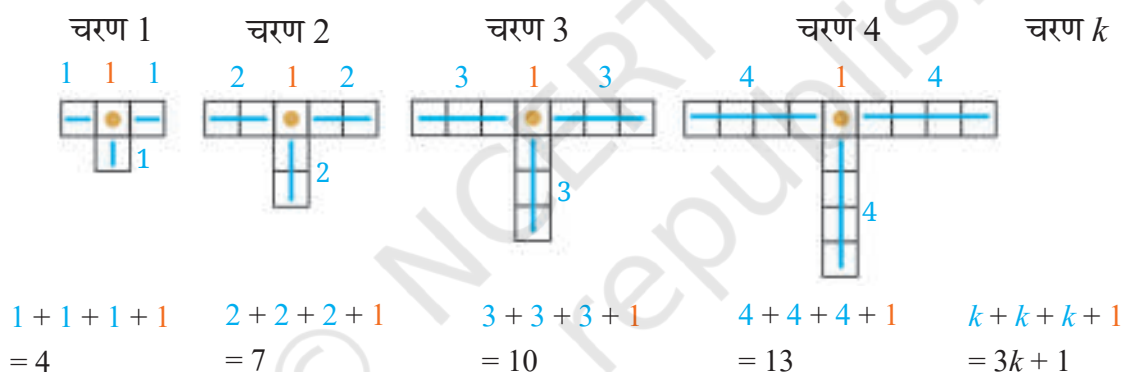
समीकरण बनाने और उन्हें हल करने से हमें अपने जीवन की कई समस्याओं का समाधान ढूँढ़ने की क्षमता प्राप्त होती है। आइए, ऐसे ही कुछ उदाहरण देखते हैं।

- उदाहरण 7**— जैसा कि नीचे दिखाया गया है कि रंजना वर्गाकार टाइलों से व्यवस्थाओं का एक क्रम बनाती है। क्या वह इस क्रम को आगे बढ़ाकर 100 टाइलों का उपयोग करके एक व्यवस्था बना सकती है? यदि हाँ, तो यह क्रम का कौन-सा चरण होगा?

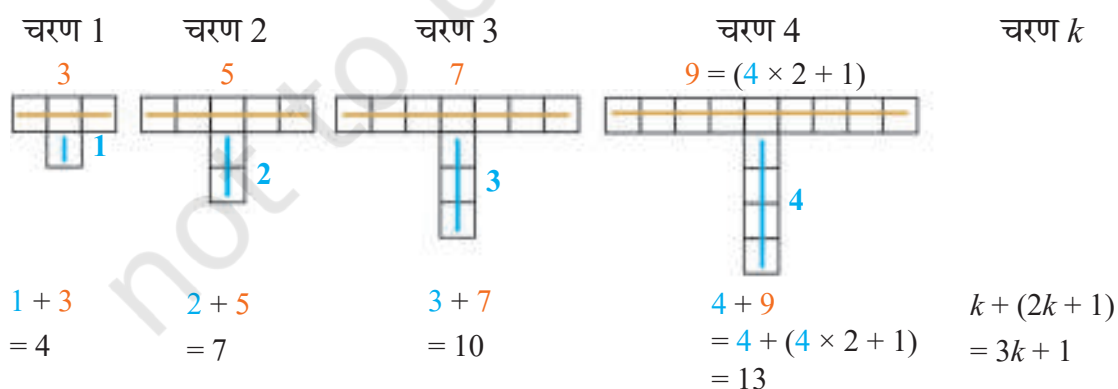


वह प्रतिरूप को भिन्न-भिन्न विधियों से देख सकती है। ये विधियाँ नीचे दर्शायी गई हैं।

### विधि 1



### विधि 2



हमारे पास व्यंजक  $3k + 1$  है जो चरण  $k$  में व्यवस्था बनाने के लिए आवश्यक टाइलों की संख्या बताता है।

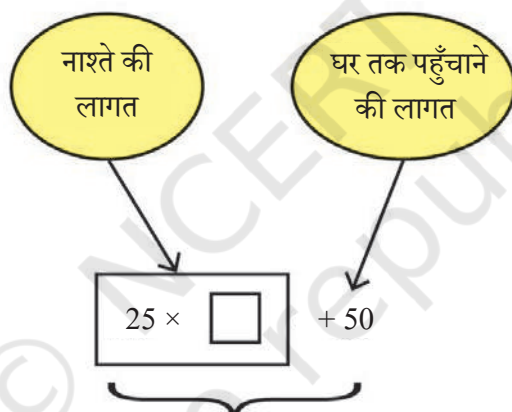
यह जाँचने के लिए कि क्या किसी चरण  $k$  पर 100 टाइलों का उपयोग करके कोई व्यवस्था संभव है, हम समीकरण  $3k + 1 = 100$  को हल कर सकते हैं।  $k$  का मान ज्ञात कीजिए।

**उदाहरण 8** — मधुबंती एक आयोजन करना चाहती है। वह शहर की चाट की दुकान से आयोजन के लिए नाश्ता खरीदने का निश्चय करती है। नाश्ते की प्रत्येक प्लेट की कीमत ₹25 है। यह दुकान मधुबंती के घर तक नाश्ता पहुँचाने के लिए ₹50 अतिरिक्त लेती है।

मधुबंती को मिलाकर उसके परिवार में यदि 5 सदस्य हैं। उसके माता-पिता कहते हैं कि वह इस आयोजन पर ₹500 खर्च कर सकते हैं। यदि वह अपने परिवार और मित्रों सहित प्रत्येक व्यक्ति को एक प्लेट नाश्ता देना चाहती है तो वह आयोजन में कितने मित्रों को बुला सकती है?

इस समस्या को हल करने की फातिमा की विधि नीचे दर्शाई गई है।

उसने एक चित्र का उपयोग कर इस स्थिति को दर्शाया।



यदि ₹500 में से हम घर तक नाश्ता पहुँचाने की लागत घटा दें तो मधुबंती के पास ₹450 बचते हैं। तो प्रश्न यह उठता है, “₹25 प्रति प्लेट नाश्ते की कितनी प्लेटें ₹450 में खरीदी जा सकती हैं?”

इसका उत्तर है  $450 \div 25 = 18$

₹450 में नाश्ते की 18 प्लेट खरीदी जा सकती हैं। अपने परिवार के 5 सदस्यों को ध्यान में रखते हुए वह अपनी पार्टी में  $18 - 5 = 13$  मित्रों को आमंत्रित कर सकती है।

महेश ने आयोजन में सम्मिलित होने वाले कुल व्यक्तियों की अज्ञात संख्या को  $p$  से दर्शाया, जिसमें मधुबंती और उसके परिवार के सदस्य भी सम्मिलित थे।

$$\text{व्यय लागत} = 25p + 50$$

चूँकि यह लागत 500 होनी चाहिए, हमारे पास समीकरण है

$$25p + 50 = 500$$

दोनों पक्षों से 50 घटाने पर हमें प्राप्त होता है

$$25p = 500 - 50$$

$$25p = 450$$

दोनों पक्षों को 25 से भाग देने पर हमें प्राप्त होता है

$$P = 450 \div 25 = 18$$

उसकी पार्टी में 18 व्यक्ति सम्मिलित हो सकते हैं, जिनमें उसके परिवार के 5 सदस्य भी सम्मिलित हैं। इसका अर्थ है कि 13 मित्रों को बुलाया जा सकता है।

श्रीकांत ने मधुबंती द्वारा आमंत्रित किए जा सकने वाले कुल मित्रों की अज्ञात संख्या को  $f$  के रूप में दर्शाने का निर्णय लिया।

इस स्थिति में लागत क्या होगी?

$$\text{व्यय लागत} = 25(f + 5)$$

चूँकि मधुबंती के पास नाश्ते के लिए ₹450 हैं, अतः हमारे पास समीकरण है

$$25(f + 5) = 450$$

दोनों पक्षों को 25 से भाग देने पर

$$f + 5 = 18$$

दोनों पक्षों से 5 घटाने पर

$$f = 13$$

**उदाहरण 9**— दो सहेलियाँ पैसे बचाना चाहती हैं। जाह्नवी ₹4000 से बचत प्रारंभ करती है और इसके अतिरिक्त, प्रत्येक माह ₹650 की बचत करती है। सुनीता ₹5050 से बचत प्रारंभ करती है और प्रत्येक माह ₹500 की बचत करती है। कितने महीनों बाद उनके पास समान रकम होगी?

मान लीजिए  $m$  उन महीनों की संख्या को दर्शाता है जिसके बाद उनकी बचत समान हो जाती है।

$m$  महीने बाद जाह्नवी की बचत कितनी है?

$$\text{जाह्नवी की बचत} = 4000 + 650m$$

$m$  महीने बाद सुनीता की बचत क्या है?

$$\text{सुनीता की बचत} = 5050 + 500m$$

चूँकि ये राशियाँ  $m$  महीनों के बाद समान हो जाती हैं, हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है—

$$4000 + 650m = 5050 + 500m$$

$$4000 + 650m - 500m = 5050 \text{ (दोनों पक्षों से } 500m \text{ घटाने पर)}$$

|         |                       |        |
|---------|-----------------------|--------|
| जाह्नवी | $4000 + 650 \times m$ | → समान |
| सुनीता  | $5050 + 500 \times m$ |        |

$$4000 + 150m = 5050$$

$$150m = 5050 - 4000 \text{ (दोनों पक्षों से 4000 घटाने पर)}$$

$$150m = 1050$$

$$m = 1050 \div 150 \text{ (दोनों पक्षों को 150 से विभाजित करने पर)}$$

$$m = 7$$

अतः 7 महीने बाद दोनों के पास समान धनराशि होगी।

उत्तर की जाँच कीजिए। आइए, कुछ समीकरण हल करें।

**? उदाहरण 10**—  $28(x + 4) + 300 = 1000$  को हल कीजिए।

इस समीकरण को हल करने की कुछ विधियाँ नीचे दी गई हैं।

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>दोनों पक्षों से 300 घटाने पर, हमें</p> $28(x + 4) = 1000 - 300$ $28(x + 4) = 700 \text{ प्राप्त होता है}$ <p>दोनों पक्षों को 28 से भाग देने पर हमें</p> $x + 4 = 700 \div 28$ $x + 4 = 25 \text{ प्राप्त होता है}$ <p>अतः <math>x = 25 - 4</math>, जिससे</p> $x = 21 \text{ प्राप्त होता है।}$ | <p><math>28(x + 4) + 300 = 1000</math></p> <p>चूँकि 28, 300 और 1000 संख्या 4 से विभाज्य हैं, अतः यदि हम दोनों पक्षों को 4 से विभाजित करें तो हमें एक सरल समीकरण प्राप्त होता है,</p> $\frac{28(x + 4) + 300}{4} = \frac{1000}{4}$ <p>भिन्नो के योग के नियमों का उपयोग करते हुए, हम प्राप्त करते हैं</p> $\frac{28(x + 4)}{4} + \frac{300}{4} = \frac{1000}{4}$ $7(x + 4) + 75 = 250$ <p>दोनों पक्षों से 75 घटाने पर</p> $7(x + 4) = 175$ $7x + 28 = 175$ <p>दोनों पक्षों से 28 घटाने पर</p> $7x = 147$ $x = \frac{147}{7} = 21 \text{ प्राप्त होता है।}$ | <p><math>28(x + 4) + 300 = 1000</math></p> <p>बाएँ पक्ष (LHS) को सरल करने पर</p> $28x + 112 + 300 = 1000$ $28x + 412 = 1000$ <p>दोनों पक्षों से 412 घटाने पर हमें</p> $x = 588 \div 28$ $x = 21 \text{ प्राप्त होता है।}$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

- उदाहरण 11**— रियाज ने एक गणित की युक्ति बनाई, जिसे वह अपने मित्र आकाश पर जाँचता है। रियाज ने आकाश से किसी भी मध्यवर्ती चरण का उत्तर बताए बिना निम्नलिखित चरण अनुसरण करने को कहा।

1. एक संख्या के बारे में सोचो।
2. संख्या में से 3 घटाओ।
3. परिणाम को 4 से गुणा करो।
4. गुणनफल में 8 जोड़ो।
5. अंतिम उत्तर बताओ।



आकाश द्वारा बताया गया अंतिम उत्तर 24 था। इसका उपयोग करके रियाज ने आकाश द्वारा सोची गई प्रारंभिक संख्या का उचित अनुमान लगाया। यह संख्या ज्ञात कीजिए।

अलग-अलग संख्याओं को प्रारंभिक संख्या की तरह उपयोग करके दिए गए चरणों के अनुसार कार्य कीजिए। क्या आपको प्रारंभिक संख्या और अंतिम उत्तर के बीच कोई संबंध दिखाई देता है?

इस युक्ति को बीजगणितीय रूप से प्रतिरूपित करके उत्तर ज्ञात किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में हम एक अज्ञात संख्या का उपयोग करके एक समीकरण बना सकते हैं। मान लीजिए कि अज्ञात प्रारंभिक संख्या  $x$  है।

- प्रत्येक चरण के बाद हमें क्या अभिव्यक्तियाँ प्राप्त होती हैं?**

| चरण                        | अभिव्यक्ति             |
|----------------------------|------------------------|
| एक संख्या के बारे में सोचो | $x$                    |
| संख्या में से 3 घटाओ       | $x - 3$                |
| परिणाम को 4 से गुणा करो।   | $4(x - 3) = 4x - 12$   |
| गुणनफल में 8 जोड़ो।        | $4x - 12 + 8 = 4x - 4$ |

चूँकि आकाश का अंतिम उत्तर 24 था, अतः हमारे पास समीकरण है—

$$4x - 4 = 24$$

$$4(x - 1) = 24$$

$$x - 1 = 6 \text{ (दोनों पक्षों को 4 से विभाजित करने पर)}$$

इस प्रकार, आकाश ने संख्या 7 के बारे में सोचा।

- क्या आप कोई सरल नियम सोच सकते हैं जिसका उपयोग करके आप अंतिम उत्तर से प्रारंभिक संख्या प्राप्त कर सकते हैं?**

- उदाहरण 12**— रमेश और सुरेश के पास कुल 60 कंचे हैं। रमेश के पास सुरेश से 30 कंचे अधिक हैं। प्रत्येक के पास कितने कंचे हैं?

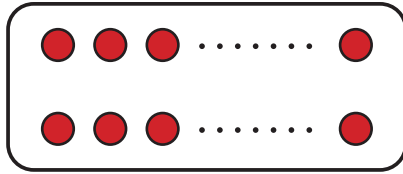
इस समस्या में हमारे पास दो अज्ञात संख्याएँ हैं। यदि हम रमेश के पास कंचों की संख्या को  $x$  और सुरेश के पास कंचों की संख्या को  $y$  से निरूपित करें तो हमें कौन-कौन से विभिन्न समीकरण प्राप्त होंगे?

1. कुल कंचों की संख्या 60 है।

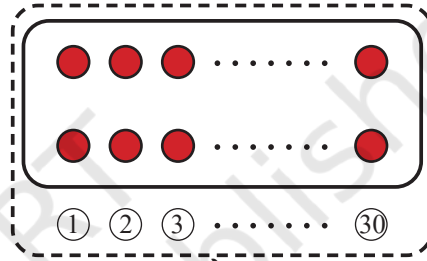
$$x + y = 60$$

2. रमेश के पास सुरेश से 30 कंचे अधिक हैं,

$$x = y + 30$$



सुरेश



रमेश

इन समीकरणों का उपयोग करके हम अज्ञात मान कैसे ज्ञात करते हैं? अभी तक हमने केवल एक अज्ञात मान वाले समीकरण को हल करने की विधि ही विकसित की है। ऐसा समीकरण प्राप्त करने के लिए हम निम्नलिखित कार्य कर सकते हैं।

सुरेश के पास कंचों की संख्या को  $y$  से दर्शाइए तथा रमेश के पास कंचों की संख्या को  $y + 30$  से दर्शाइए।

चूँकि कुल कंचों की संख्या 60 है, अतः हमारे पास समीकरण है —

$$y + (y + 30) = 60$$

$$2y + 30 = 60$$

- ?** इसका उपयोग दोनों अज्ञातों को ज्ञात के लिए कीजिए।

### समीकरण का निर्माण करना

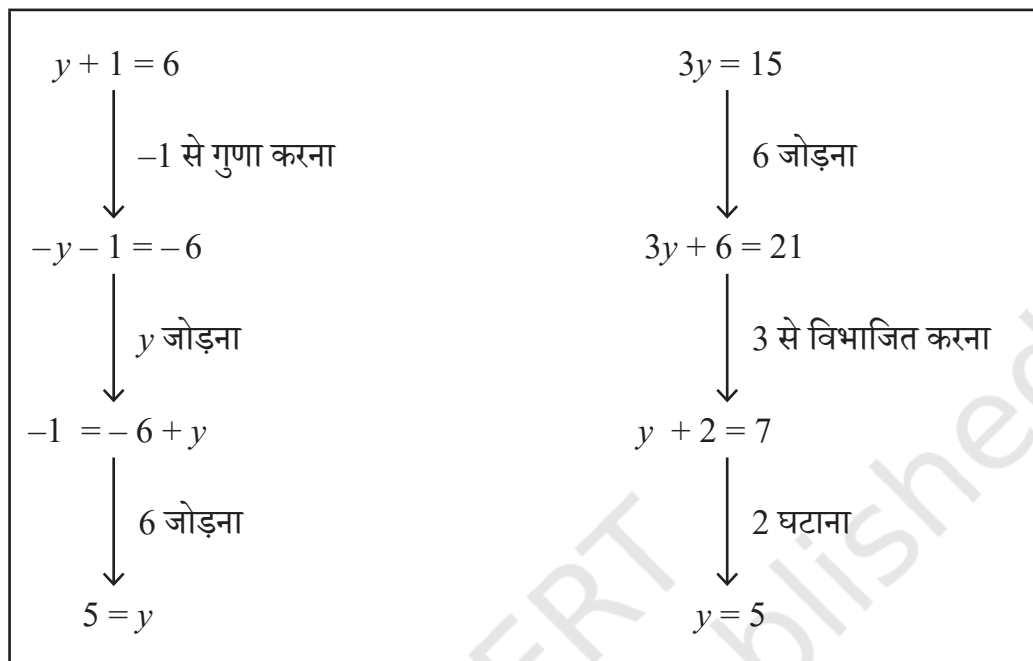
अब तक हमने अक्षर-संख्या का मान ज्ञात करने के लिए दिए गए समीकरण को हल किया है। इसके विपरीत, क्या हम किसी अक्षर-संख्या के दिए गए मान का उपयोग करके समीकरणों को लिख सकते हैं?

- ?** ऐसे समीकरण लिखिए जिनका हल  $y = 5$  हो। अपने द्वारा बनाए गए समीकरणों को एक-दूसरे के साथ साझा कीजिए और प्रयुक्त विधियों पर चर्चा कीजिए।



ऐसे दो समीकरण  $y + 1 = 6$  और  $3y = 15$  हैं।

निम्नलिखित समीकरण श्रृंखला पर विचार कीजिए, जहाँ दोनों पक्षों पर पिछले समीकरण में समान संक्रियाएँ करके एक समीकरण प्राप्त किया जाता है।



- ❓ क्या आप नीचे के समीकरण से ऊपर वाले समीकरण तक एक श्रृंखला बना सकते हैं? ऊपर से नीचे तथा नीचे से ऊपर की ओर जाते समय उपयोग की गई संक्रियाओं की तुलना कीजिए।
- ❓ बिना गणना किए, क्या आप ऊपर दी गई श्रृंखलाओं में प्रत्येक समीकरण में अज्ञात का मान ज्ञात कर सकते हैं?



[संकेत— हमने देखा है कि जो मान किसी समीकरण को संतुष्ट करता है, वह मूल समीकरण के दोनों ओर समान संक्रिया करने पर प्राप्त नए समीकरण को भी संतुष्ट करता है।]

- ❓ **उदाहरण 13** — क्या आप कोई वास्तविक जीवन की ऐसी स्थिति बता सकते हैं, जिसे समीकरण  $100x + 75 = 250$  के रूप में लिखा जा सके?

**हल**— यदि हम इन संख्याओं को धन के रूप में सोचें तो हम देख सकते हैं कि कुल धन ₹250 है।

यहाँ दो पद जोड़ने से ₹250 प्राप्त हो रहे हैं। बाएँ पक्ष (LHS) में दूसरा पद ₹75 स्थिर है और परिवर्तित नहीं होता है। पहले पद का मान 'x' के आधार पर परिवर्तित होगा। अतः हम 100 को इकाइयों की संख्या और 'x' को प्रति इकाई लागत मान सकते हैं। उदाहरण के लिए x एक प्लेट नाश्ते का मूल्य और ₹75 वितरण शुल्क हो सकता है।

## ? पता लगाइए

- ऐसे पाँच समीकरण लिखिए जिनका हल  $x = -2$  है।
- प्रत्येक अज्ञात का मान ज्ञात कीजिए—
  - $2y = 60$
  - $-8 = 5x - 3$
  - $-53w = -15$
  - $13 - z = 8$
  - $k + 8 = 12 - k$
  - $7m = m - 3$
  - $3n = 10 + n$
- मैं एक 3 अंकीय संख्या हूँ। मेरे सैकड़े का अंक मेरे दहाई के अंक से 3 कम है। मेरे दहाई का अंक मेरे इकाई के अंक से 3 कम है। तीनों अंकों का योग 15 है। मैं कौन हूँ?
- एक ईंट का भार उसके आधे से 1 कि.ग्रा. अधिक है। ईंट का भार कितना है?
- किसी संख्या के एक चौथाई भाग में 9 जोड़ने पर वही संख्या प्राप्त होती है। वह संख्या क्या है?
- $4k + 1 = 13$  दिया गया है, निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए—
  - $8k + 2$
  - $4k$
  - $k$
  - $4k - 1$
  - $-k - 2$

## 7.3 त्रुटि ढूँढ़िए और सुधारिए

- ? नीचे कुछ समीकरण दिए गए हैं और साथ ही उन्हें हल करने के चरण भी दिए गए हैं, जिससे अक्षर-संख्या (चर) का मान ज्ञात किया जा सके। प्रत्येक हल को ध्यान से देखिए और तय कीजिए कि चरण सही हैं या नहीं। यदि कोई त्रुटि है तो उसका वर्णन कीजिए, उसे सुधारिए और समीकरण हल कीजिए।

1

$$\begin{aligned} 4x + 6 &= 10 \\ 4x &= 10 + 6 \\ 4x &= 16 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} 7 - 8z &= 5 \\ 8z &= 7 - 5 \\ 8z &= 2 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} 2v - 4 &= 6 \\ v - 4 &= 6 - 2 \\ v - 4 &= 4 \\ v &= 8 \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} 5z + 2 &= 3z - 4 \\ 5z + 3z &= -4 + 2 \\ 8z &= -2 \\ z &= -\frac{2}{8} \end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned} 15w - 4w &= 26 \\ 15w &= 26 + 4w \\ 15w &= 30 \\ w &= 2 \end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= -12 \\ x + 1 &= -\frac{12}{3} \\ x + 1 &= -4 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

7

$$\begin{aligned}
 4(4q + 2) &= 50 \\
 4(4q) &= 50 - 2 \\
 16q &= 48 \\
 q &= 3
 \end{aligned}$$

8

$$\begin{aligned}
 -2(3 - 4x) &= 14 \\
 -6 - 8x &= 14 \\
 -8x &= 14 + 6 \\
 -8x &= 20 \\
 x &= -\frac{20}{8}
 \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}
 3(7y + 4) &= 9 + 5y \\
 7y + 4 &= \frac{9}{3} + 5y \\
 7y + 4 &= 3 + 5y \\
 7y - 5y + 4 &= 3 \\
 2y &= 4 - 3 \\
 y &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

## 7.4 इतिहास की एक झलक

प्राचीन भारत में प्रतीकों का उपयोग करके व्यंजक बनाना और ऐसे व्यंजकों से समीकरण हल करना गणितीय अन्वेषण का एक महत्वपूर्ण घटक था। गणित के इस क्षेत्र को बीजगणित कहा जाता है। बीज शब्द का अर्थ है किसी पादप या जीव का बीज। जिस प्रकार एक बीज के भीतर एक वृक्ष छिपा होता है, उसी प्रकार किसी समस्या का उत्तर एक अज्ञात संख्या के भीतर छिपा होता है। किसी समस्या को हल करना, वृक्ष को चरणबद्ध रूप से बढ़ने में सहायता करने के समान है— हम उस छिपे हुए तत्व को खोजते हैं।

हमने गणित के विभिन्न क्षेत्रों, जैसे— पूर्णांकों और भिन्नों में **ब्रह्मगुप्त** के योगदान को देखा है। ठीक उसी प्रकार जैसे हम आज  $x$  या  $y$  का उपयोग करते हैं, उन्होंने अपनी पुस्तक **ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त** (628 ई.) के अध्याय 18 में अक्षरों का उपयोग करके अज्ञात संख्याओं को जोड़ने, घटाने और गुणा करने की प्रक्रिया को समझाया। यह अध्याय इतिहास में बीजगणित की सबसे प्रारंभिक ज्ञात कृतियों में से एक था। प्रसिद्ध गणितज्ञ और फील्ड्स मेडलिस्ट डेविड ममफोर्ड ने कहा था, जैसा कि हम जानते हैं, “ब्रह्मगुप्त बीजगणित की रचना करने वाले में प्रमुख व्यक्ति हैं।”

आठवीं शताब्दी में, भारतीय गणितीय विचारों का अरबी में अनुवाद किया गया। इनका प्रभाव वर्तमान इराक में रहने वाले **अल-ख्वारिज़्मी** नामक एक प्रसिद्ध गणितज्ञ पर पड़ा। लगभग 825 ई. में, उन्होंने ‘हिसाब अल-जबर-वल-मुकाबला’ नामक एक पुस्तक लिखी, जिसका अर्थ है ‘पुनर्स्थापन और संतुलन द्वारा गणना’।

ये विचार और भी आगे फैले। बारहवीं शताब्दी तक अल-ख्वारिज़्मी की पुस्तक का लैटिन में अनुवाद हो चुका था और उसे **यूरोप** लाया गया, जहाँ यह बहुत लोकप्रिय हो गई। उनकी पुस्तक के शब्द अल-जबर से हमें **बीजगणित** शब्द मिला, जिसका प्रयोग हम आज भी करते हैं।

जिस प्रकार आज हम अज्ञात को दर्शाने के लिए वर्णमाला के अक्षरों का उपयोग करते हैं, उसी प्रकार ब्रह्मगुप्त के समय के प्राचीन भारतीय गणितज्ञ विभिन्न अज्ञात के लिए **या, का, नी, पी, लो** इत्यादि जैसे विशेष प्रतीकों का प्रयोग करते थे। ‘या’ प्रतीक यावत-तावत (जिसका अर्थ है

‘जितना आवश्यक हो’) का संक्षिप्त रूप था। अन्य प्रतीक जैसे ‘का’ और ‘नी’, रंगों के नामों, जैसे— कालक (काला), नीलक (नीला) आदि के पहले अक्षर को बताते हैं। इन अज्ञात राशियों के विपरीत, किसी व्यंजक में ज्ञात राशियों का एक विशिष्ट ‘रूप’ होता था और उन्हें ‘रू’ द्वारा दर्शाया जाता था।

आधुनिक बीजीय व्यंजकों को प्राचीन भारतीय संकेतन में किस प्रकार लिखा जाता था, नीचे इसके कुछ उदाहरण दिए गए हैं—

| आधुनिक संकेतन     | प्राचीन भारतीय संकेतन                                                                 |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $2x + 1$          | या 2 रू 1<br>(प्रत्येक पद में अज्ञात/ज्ञात का संकेत पहले आता था)                      |
| $2x - 8$          | या 2 रू 8<br>(संख्या के ऊपर एक बिंदु यह दर्शाता था कि यह ऋणात्मक है)                  |
| $3x + 4 = 2x + 8$ | या 3 रू 4<br>या 2 रू 8<br>(समीकरण के दो पक्षों को एक के नीचे एक प्रस्तुत किया गया था) |

**उदाहरण 14**— भास्कराचार्य (1150 सामान्य संवत्) द्वारा रचित *बीजगणित* में निम्नलिखित समस्या का उल्लेख है।

एक आदमी के पास ₹300 और 6 घोड़े हैं। दूसरे आदमी के पास 10 घोड़े हैं और उस पर ₹100 का ऋण है। यदि वे दोनों समान रूप से धनी हैं और प्रत्येक घोड़े का मूल्य समान है तो मुझे एक घोड़े का मूल्य बताइए।

**हल**— माना एक घोड़े का मूल्य = ₹  $x$

समस्या के अनुसार

$$300 + 6x = 10x - 100$$

$$300 + 6x + (100) = 10x$$

$$400 + 6x = 10x$$

$$400 = 10x - 6x$$

$$400 = 4x$$

$$400 \div 4 = x$$

$$100 = x$$

अतः एक घोड़े का मूल्य = ₹100

प्राचीन भारत में ऐसी समस्याओं और समाधानों को अच्छी तरह समझा जाता था। वास्तव में, एकल अज्ञात वाली समस्याओं को हल करने की एक बहुत ही व्यवस्थित विधि सबसे पहले आर्यभट्ट (499 सामान्य संवत्) द्वारा प्रस्तावित की गई थी और ब्रह्मगुप्त ने अपने *ब्रह्मस्फुट सिद्धांत* (628 सामान्य संवत्) में इसकी रूपरेखा प्रस्तुत की है। आइए, उनकी विधि को समझें। नीचे दिए गए के कुछ समीकरणों को देखते हैं—

$$5x + 4 = 3x + 8 \text{ या } 3x - 6 = 2x + 4$$

- ❓ क्या हम इन समीकरणों को हल करने का कोई सूत्र बना सकते हैं? अर्थात् क्या पहले समीकरण के लिए 5, 4, 3 और 8 का उपयोग कर और कुछ संक्रियाएँ करके हमें प्रत्यक्षतः हल प्राप्त हो जाएगा? इसी प्रकार, क्या आप 3, -6, 2 तथा 4 संख्याओं का उपयोग करके दूसरे समीकरण को हल कर सकते हैं? सूत्र प्राप्त करने के लिए हम चार संख्याओं A, B, C और D को लेकर इस रूप के समीकरणों का व्यापकीकरण कर सकते हैं अर्थात्,

$$Ax + B = Cx + D$$

ब्रह्मगुप्त इस प्रकार के समीकरणों का हल इस सूत्र से देते हैं—

$$x = \frac{D - B}{A - C}$$

इस प्रक्रिया का उपयोग करके हम समीकरण का हल प्राप्त सकते हैं—

$$650m + 4000 = 500m + 5050$$

गणना द्वारा सामान्यीकृत करने पर  $650m - 500m = 5050 - 4000$

$$m = \frac{5050 - 4000}{650 - 500}$$

- ❓ इस सूत्र का उपयोग करके क्या आप समीकरण  $2x + 3 = 4x + 5$  को हल कर सकते हैं?

प्राचीन भारतीय गणितज्ञ जटिल गणितीय धारणाओं को सरल प्रक्रियाओं में परिवर्तित करने में उत्कृष्ट थे, जिससे कि प्रत्येक व्यक्ति समस्याओं को हल करने के लिए इन प्रक्रियाओं का उपयोग कर सके।

बीजगणित गणित की वह शाखा है जिसमें गणितीय समस्याओं को हल करने के लिए अक्षर चिह्नों का उपयोग किया जाता है। हमने पिछले पृष्ठों में कुछ उदाहरण देखे हैं। बीजगणित का अध्ययन करके हम संख्याओं, आकृतियों और स्थितियों में प्रतिरूपों का व्यापकीकरण करना सीखते हैं। हम इन व्यापकीकरणों को बीजगणित की भाषा का उपयोग करके व्यक्त करते हैं, जो सटीक और प्रभावशाली दोनों हैं।

बीजगणित हमें गणितीय दावों को उचित सिद्ध करने की एक विधि देता है (जैसे कि दो विषम संख्याओं का योग सदैव सम क्यों होता है) और कई प्रकार की समस्याओं को हल करने की प्रक्रिया भी देता है।

प्राचीन भारतीय गणितज्ञों ने बीजगणित की शक्ति को भली-भाँति पहचाना था। हमें आशा है कि आप भी इसे पहचानेंगे और इसका आनंद लेंगे।

### ? पता लगाइए

1. रिक्त स्थानों को पूर्णांकों से भरिए।

(a)  $5 \times \underline{\quad} - 8 = 37$

(b)  $37 - (33 - \underline{\quad}) = 35$

(c)  $-3 \times (-11 + \underline{\quad}) = 45$

2. रंजू एक दिहाड़ी मजदूर है। वह प्रतिदिन ₹750 कमाती है। उसका नियोक्ता उसे 50 और 100 रुपये के नोटों में वेतन देता है। यदि रंजू को 50 और 100 रुपये के नोट समान संख्या में मिलते हैं तो उसके पास प्रत्येक मुद्रा के कितने नोट हैं?

3. दिए गए चित्र में प्रत्येक काला धब्बा समान संख्या में नीले बिंदुओं को छिपाए हुए है। यदि कुल 25 बिंदु हैं तो एक धब्बा कितने बिंदुओं को ढकता है? इस समस्या का वर्णन करने के लिए एक समीकरण लिखिए।



4. नीचे दिए गए चित्र में ऐसी मशीनें दिखाई गई हैं जो आँकड़े लेती हैं, उस पर संक्रियाएँ करती हैं और परिणाम देती हैं।

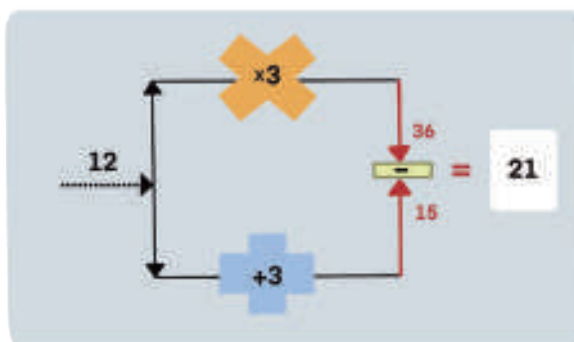
(a)



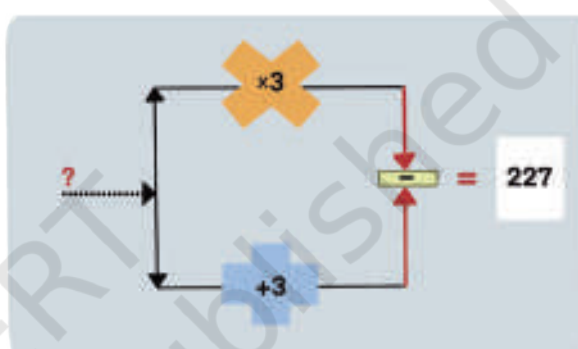
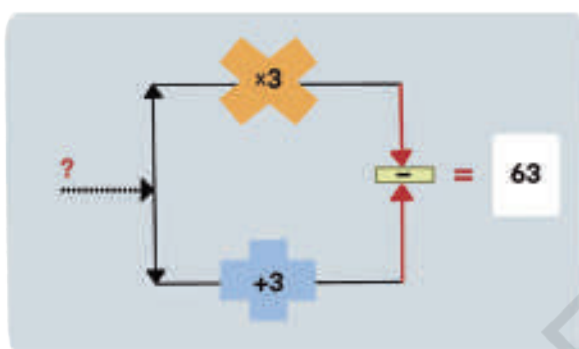
निम्नलिखित के लिए प्रवेशित आँकड़ों को ज्ञात कीजिए—



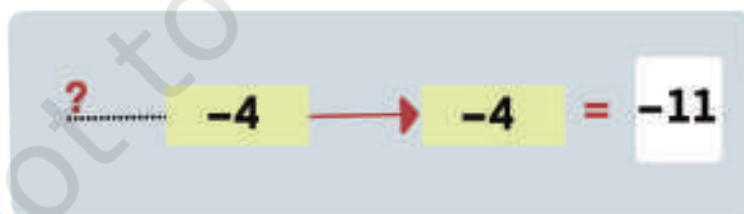
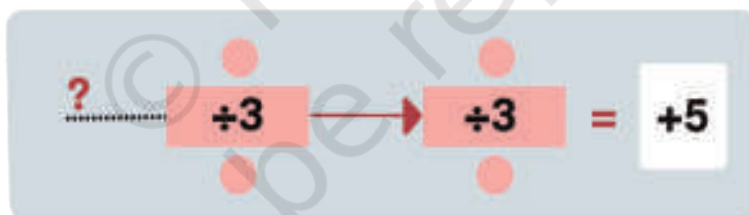
(b)



निम्नलिखित के लिए प्रवेशित आँकड़ों को ज्ञात कीजिए—

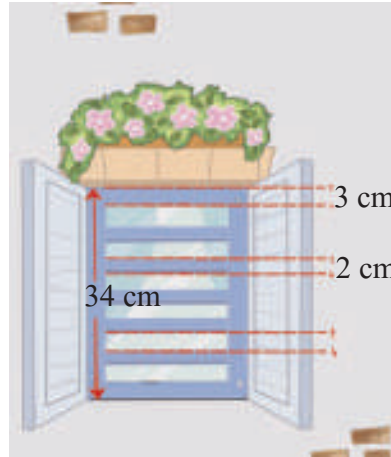


5. इन मशीनों में प्रवेशित आँकड़े क्या हैं?



6. एक टैक्सी चालक प्रतिदिन ₹800 का एक निश्चित शुल्क और प्रति किलोमीटर यात्रा के लिए ₹20 लेता है। यदि टैक्सी की यात्रा का कुल खर्च ₹2200 है तो तय किए गए किलोमीटर की संख्या ज्ञात कीजिए।

7. दो संख्याओं का योग 76 है। एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। वे संख्याएँ क्या हैं?
8. चित्र में एक जाल वाली खिड़की का आरेख दिखाया गया है। जाल में दो छड़ों के बीच कितना अंतर है?



9. एक रेस्तराँ में फलों के जूस का मूल्य एक चॉकलेट मिल्कशेक से ₹15 कम है। यदि 4 फलों के जूस और 7 चॉकलेट मिल्कशेक का मूल्य ₹600 है तो फलों के जूस और मिल्कशेक का मूल्य ज्ञात कीजिए।
10. यदि  $28p - 36 = 98$  दिया गया है तो  $14p - 19$  और  $28p - 38$  का मान ज्ञात कीजिए।
11. तीन समीकरणों को हल करने के चरण नीचे दिए गए हैं। इनमें त्रुटि को पहचानिए और सुधार कीजिए।

(a)  $\cancel{6}x + 9 = \cancel{66}^{11}$

$$x + 9 = 11$$

$$x = 11 - 9$$

$$x = 2$$

(b)  $14y + 24 = 36$

$$7y + 12 = 18$$

$$7y = 6$$

$$y = \frac{6}{7}$$

(c)  $4x - 5 = 9x + 8$

$$4x = 9x + 8 - 5$$

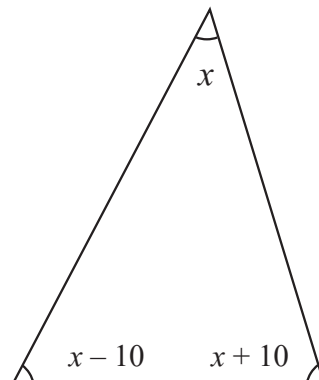
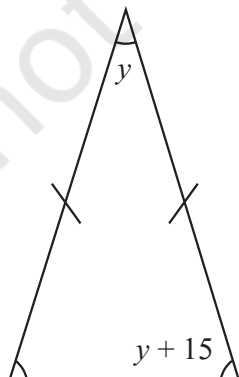
$$4x = 9x + 3$$

$$4x - 9x = 3$$

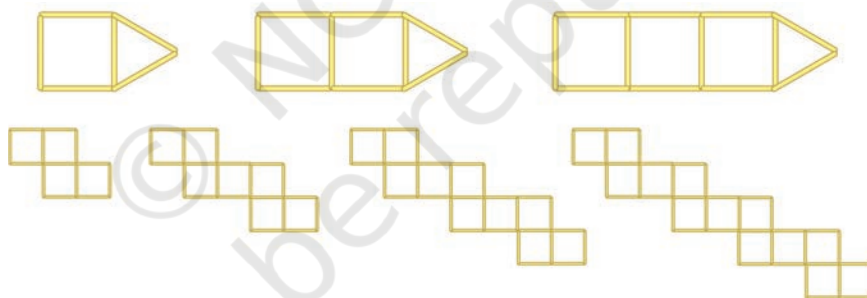
$$-5x = 3$$

$$x = \frac{-5}{3}$$

12. नीचे दिए गए त्रिभुजों के कोणों का माप ज्ञात कीजिए।

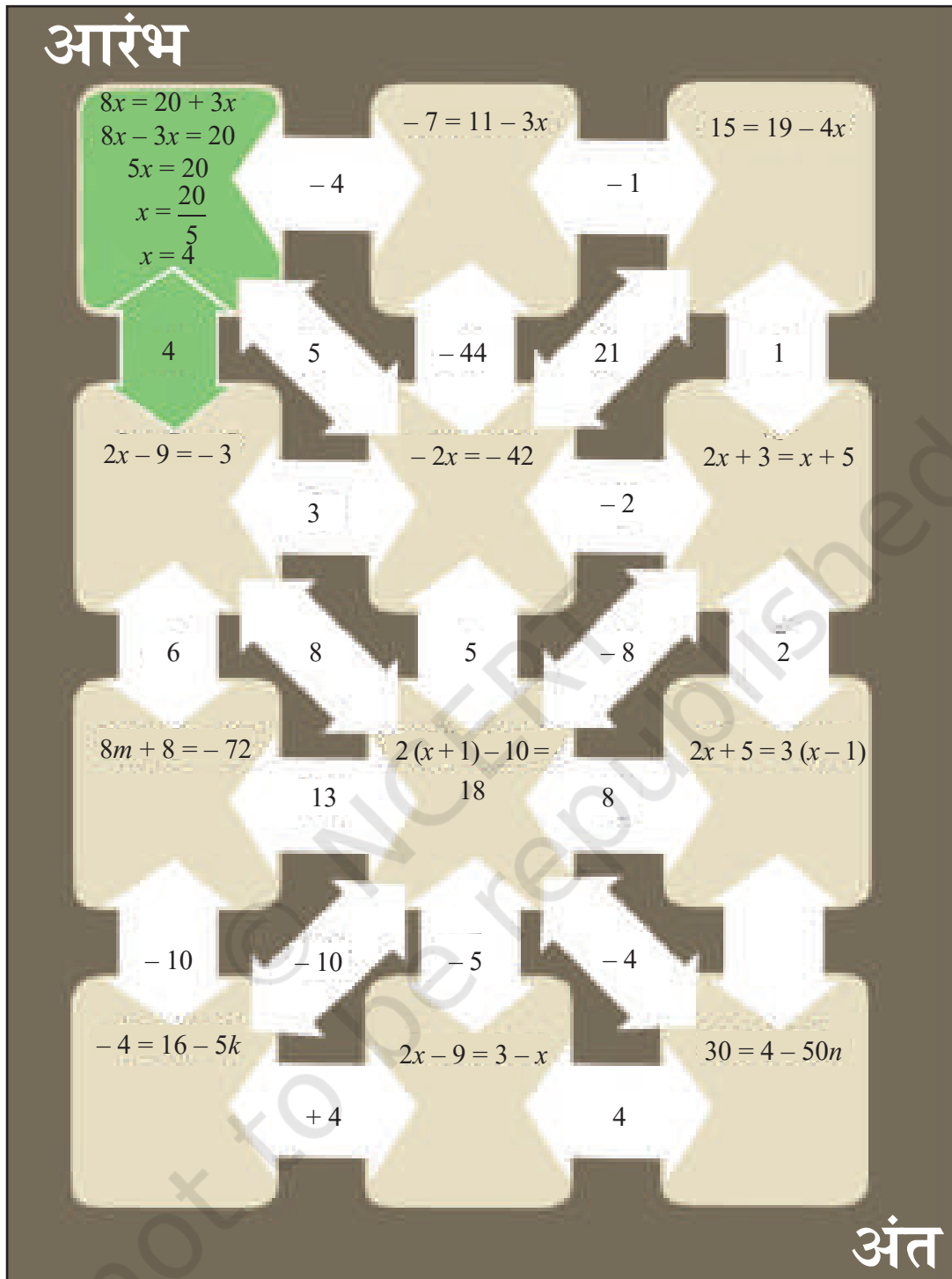


13. चार समीकरण लिखिए जिनका हल  $u = 6$  है।
14. बख्शाली पांडुलिपि (300 सामान्य संवत्) में निम्नलिखित समस्या का उल्लेख है। पहले व्यक्ति को दी गई राशि ज्ञात नहीं है। दूसरे व्यक्ति को पहले व्यक्ति से दुगुना राशि दी गई है। तीसरे व्यक्ति को दूसरे व्यक्ति से तिगुना राशि दी गई है और चौथे व्यक्ति को तीसरे व्यक्ति से चौगुना राशि दी गई है। वितरित की गई कुल राशि 132 है। पहले व्यक्ति को दी गई राशि कितनी है?
15. एक जिराफ की ऊँचाई उसकी आधी ऊँचाई से ढाई मीटर अधिक है। जिराफ की ऊँचाई कितनी है?
16. नीचे दो भिन्न-भिन्न आकृतियाँ दी गई हैं। प्रत्येक आकृति छड़ियों से की गई व्यवस्था के क्रम में पहले कुछ स्थानों को दर्शाती है। प्रतिरूप पहचानिए और प्रत्येक आकृति के लिए निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—
- अनुक्रम की स्थिति संख्या 11 में कितने वर्ग हैं?
  - अनुक्रम की स्थिति संख्या 11 में व्यवस्था बनाने के लिए कितनी छड़ियों की आवश्यकता होगी?
  - क्या इस क्रम में 85 छड़ियों का उपयोग करके एक व्यवस्था बनाई जा सकती है? यदि हाँ, तो यह किस स्थिति संख्या के अनुरूप होगी?
  - क्या इस क्रम में 150 छड़ियों का उपयोग करके एक व्यवस्था बनाई जा सकती है? यदि हाँ, तो यह किस स्थिति संख्या के अनुरूप होगी?



17. एक संख्या में 36 जोड़ने पर वह अपने आप का दस गुना हो जाती है। वह संख्या क्या है?
18. इन समीकरणों को हल कीजिए—
- $5(r + 2) = 10$
  - $-3(u + 2) = 2(u - 1)$
  - $2(7 - 2n) = -6$
  - $2(x - 4) = -16$
  - $6(x - 1) = 2(x - 1) - 4$
  - $3 - 7s = 7 - 3s$
  - $2x + 1 = 6 - (2x - 3)$
  - $10 - 5x = 3(x - 4) - 2(x - 7)$
19. आरंभ से अंत तक का मार्ग ढूँढ़ने के लिए समीकरणों को हल कीजिए। अगले पृष्ठ पर दिए गए भागों में अपना कार्य दिखाइए और आगे बढ़ते हुए अपने मार्ग में रंग भरिए।

# आरंभ



# अंत

20. समुद्र तट पर कुछ बच्चे और गधे हैं। उनके कुल मिलाकर 28 सिर और 80 पैर हैं। वहाँ कितने गधे हैं? वहाँ कितने बच्चे हैं?



### सारांश

- बीजीय समीकरण एक गणितीय कथन है जो दो बीजीय व्यंजकों की समानता को इंगित करता है।
- जब किसी समीकरण के दोनों ओर एक ही संक्रिया की जाती है तो समानता बनी रहती है।
- किसी समीकरण का हल ढूँढ़ने का अर्थ है, व्यंजकों में अज्ञात मानों का इस प्रकार से मान ज्ञात करना कि बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष के बराबर हो।
- सामान्यतः समीकरणों को, दोनों पक्षों पर एक ही संक्रिया करके हल किया जा सकता है, जिससे अज्ञात का मान स्पष्ट हो जाए।



पहेली का समय!

एक जादुई चाल

किसी भी संख्या के बारे में सोचें—

अब इसे 2 से गुणा करें

10 जोड़ें

2 से विभाजित करें

अब उस मूल संख्या को घटाएँ जो आपने सोची थी

अंत में 3 जोड़ें।

मेरा अनुमान है कि अब आपके पास 8 होंगे। क्या मैं सही हूँ?

अपने मित्रों और परिवार के साथ भी पहेली हल कीजिए।

क्या आप बता सकते हैं कि यह युक्ति (ट्रिक) क्यों कार्य करती है?

[संकेत— पहली बार सोची गई संख्या को  $x$  से दर्शाइए।]

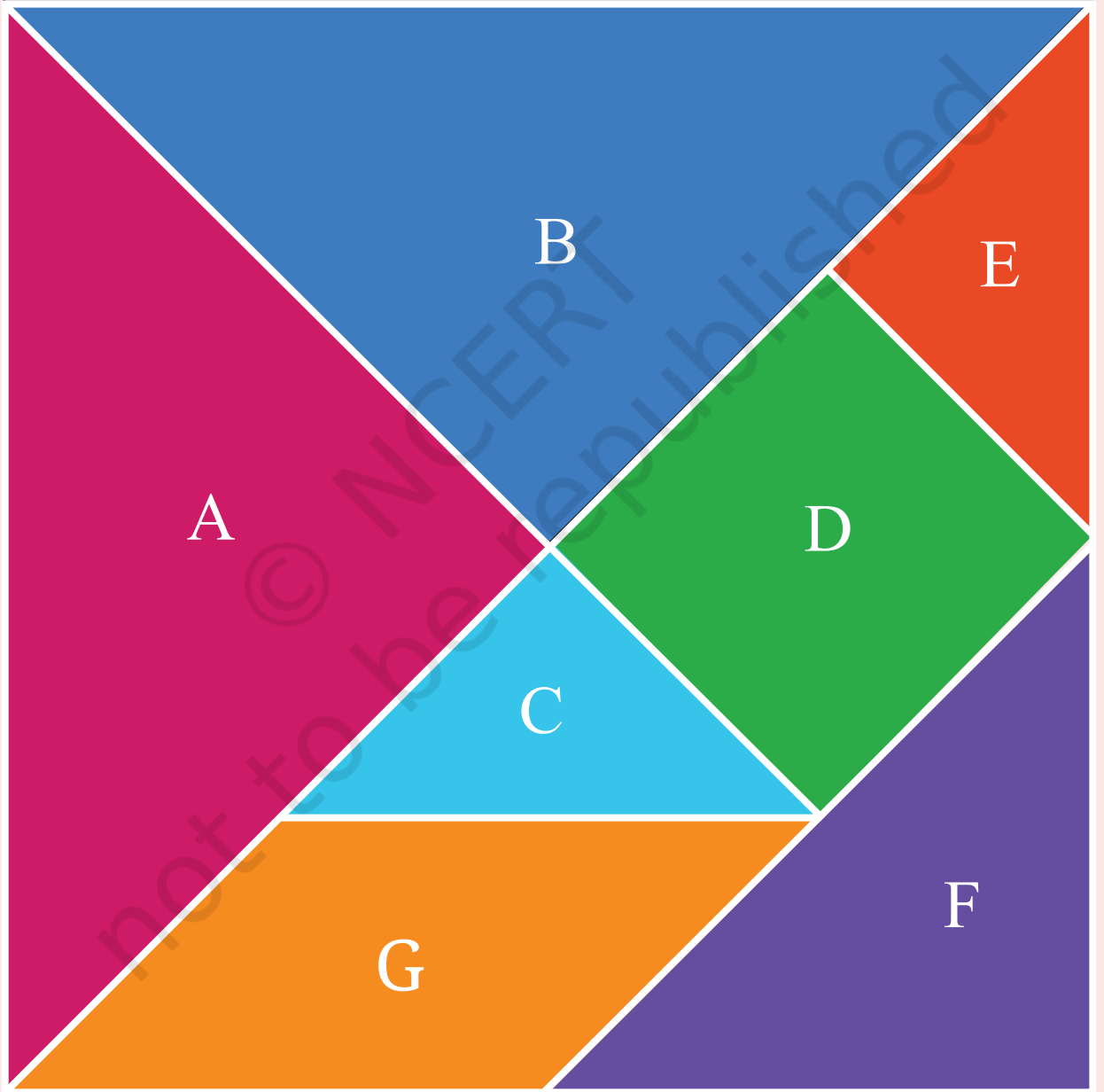
क्या आप स्वयं ऐसी युक्तियाँ बना सकते हैं?





# टैनग्राम

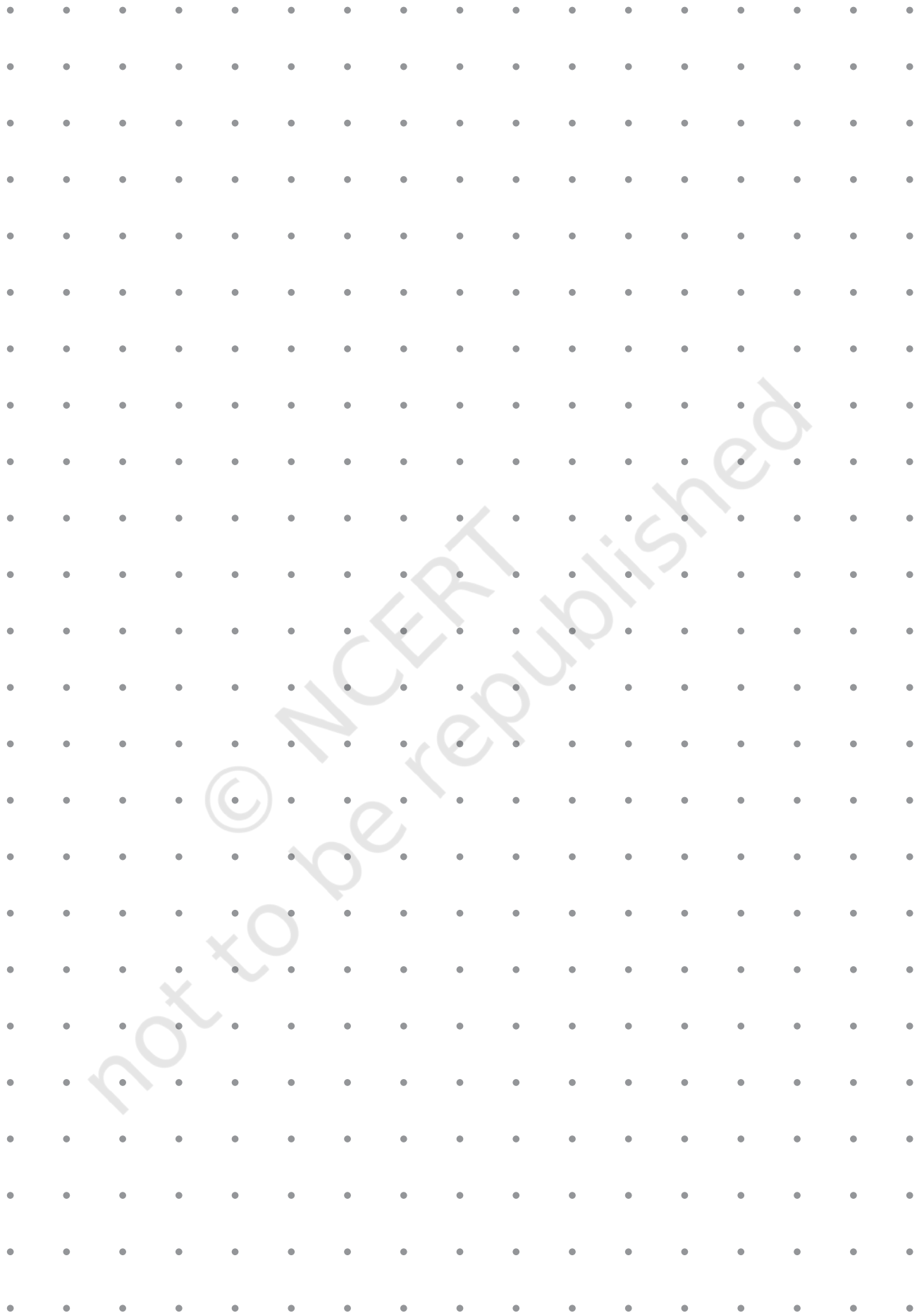
नोट— प्रत्येक आकृति को सफेद किनारों से काटिए।





© NCERT  
not to be republished

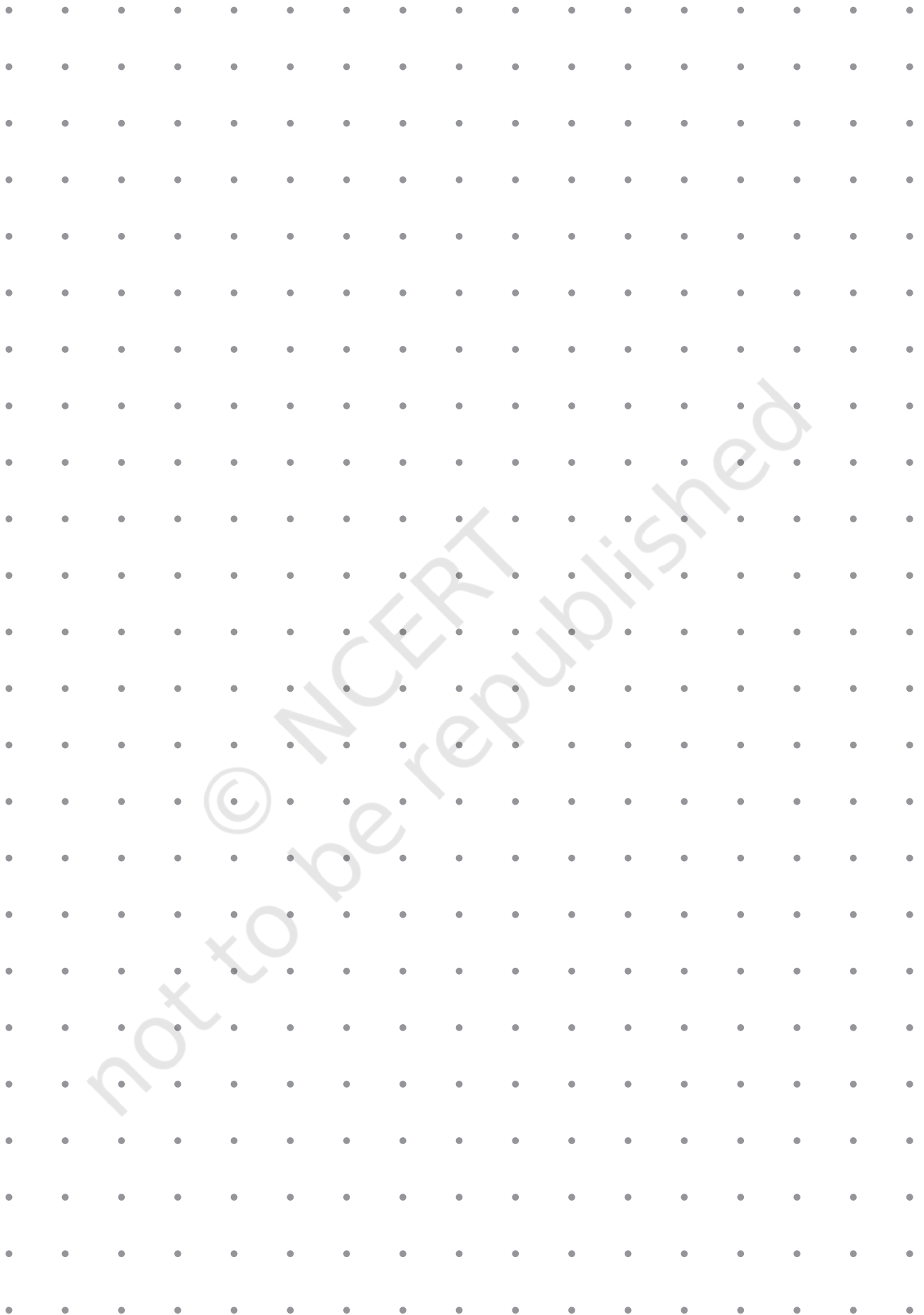






© NCERT  
not to be republished

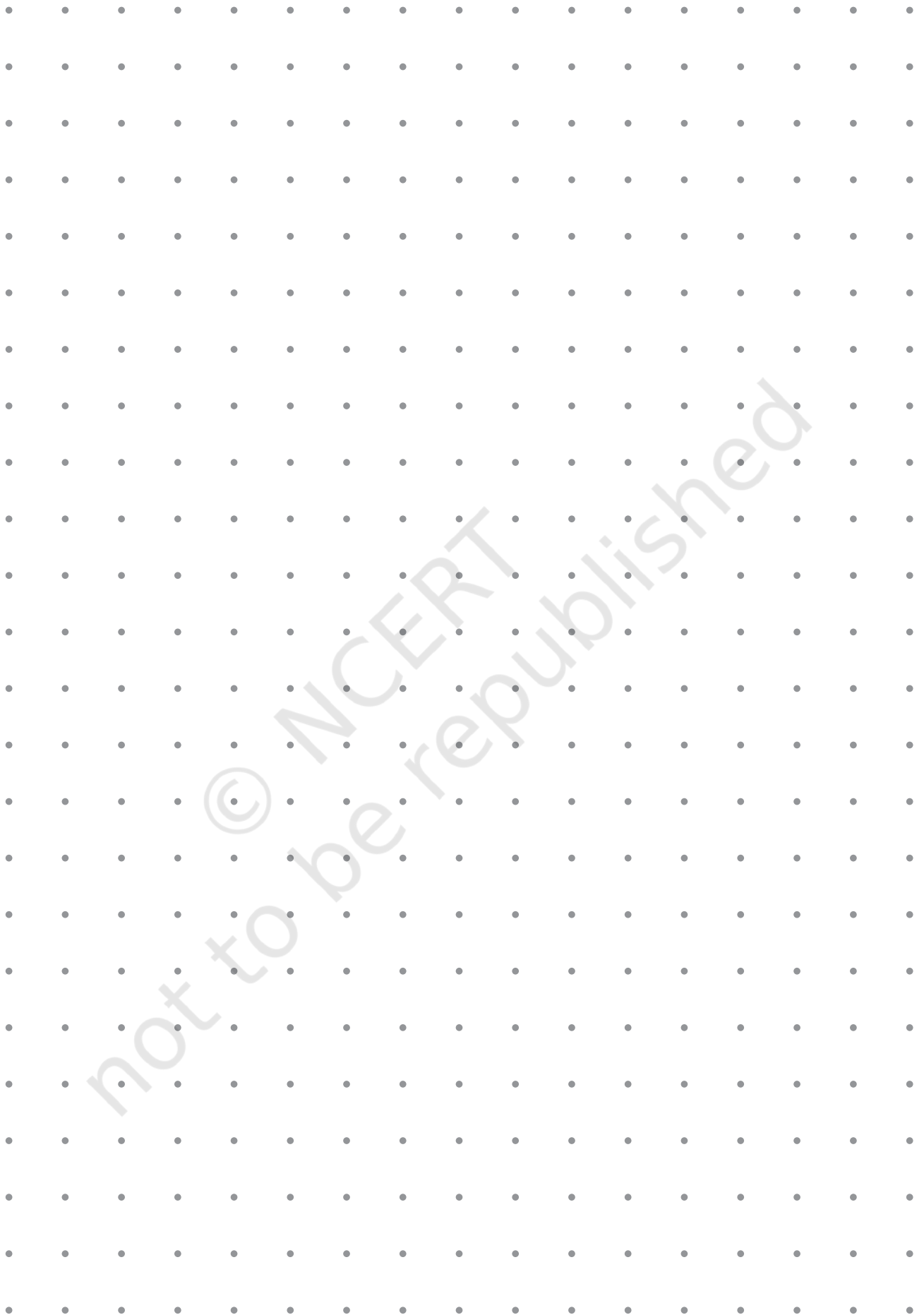






© NCERT  
not to be republished







© NCERT  
not to be republished

