1 भिन्न के विविध रूप

0890CH01

1.1 प्रतिशत के रूप में भिन्न

संभवत: आपने इस प्रकार के वाक्य सुने होंगे कि — "मेगा सेल — 50% तक की छूट" अथवा आपने सुना होगा "हिया ने अपनी बोर्ड परीक्षा में 83% अंक प्राप्त किए।"

क्या आप जानते हैं कि '%' चिह्न क्या दर्शाता हैं?

इस चिह्न को **प्रतिशत** कहा जाता है।

अंग्रेजी में पर सेंट (Per cent) शब्द लैटिन शब्द '*per centum*' से व्युत्पन्न हुआ है जिसका अर्थ है— 'सौ के आधार पर' अथवा 'सौ में से'।

अत: **25 प्रतिशत (25%)** का अर्थ **प्रत्येक 100 में से 25** है। जैसे — 100 में से 25 व्यक्ति, ₹100 में से ₹25 अथवा 100 अंकों में से 25 अंक।

यदि हम किसी **s मात्रा का 50%** कहते हैं तो इसका अर्थ है —

$$s \text{ का } 50\% = 50 \times \frac{1}{100} \times s \text{ (} s \text{ के इकाई भिन्न का 50 गुणा)}$$

$$= \frac{50}{100} \times s = \frac{1}{2}s$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि प्रतिशत एक प्रकार से भिन्न ही होते हैं **जहाँ हर के रूप में 100 होता है**। उदाहरण के लिए —

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$33\% = \frac{33}{100}$$

हमने देखा कि प्रतिशत एक प्रकार से भिन्न के रूप होते हैं। यदि कोई भिन्न दिया गया है तो क्या हम उसे प्रतिशत के रूप में व्यक्त कर सकते हैं? हाँ, आइए देखते हैं कि इसे कैसे व्यक्त किया जा सकता है।

भिन्न को प्रतिशत के रूप में व्यक्त करना

उदाहरण 1— सूर्या, सूर्यास्त का चित्र बनाने के लिए गहरे नारंगी रंग का उपयोग करना चाहता है। वह इस रंग को बनाने के लिए लाल और पीले रंग को मिश्रित करता है। नारंगी रंग के इस मिश्रण में लाल रंग का भाग $\frac{3}{4}$ है। बताइए कि मिश्रण में लाल रंग का प्रतिशत कितना होगा?

$\frac{3}{4}$ का अर्थ प्रत्येक 4 में 3 है।

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{30}{40} = \frac{75}{100}$$

© NCERT not to be republished

अर्थात प्रत्येक 8 में 6 (समतुल्य भिन्न)

अर्थात प्रत्येक 40 में 30,

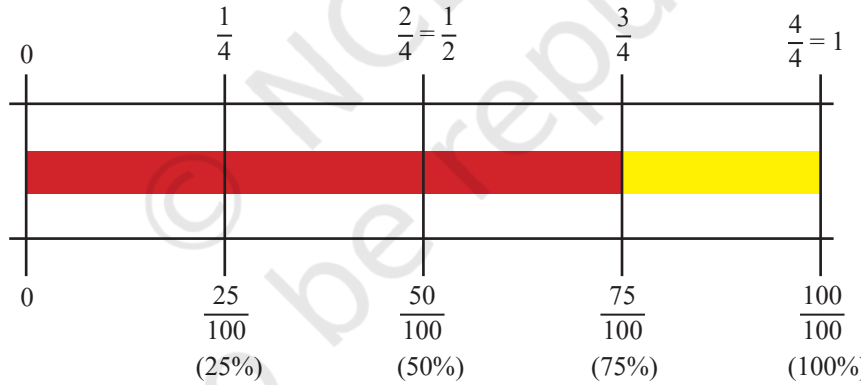
अर्थात प्रत्येक 100 में 75, इसका अर्थ 75% है।

इसे अन्य विधि से स्पष्ट करने पर $\frac{3}{4}$ को प्रतिशत में व्यक्त करने के लिए हमें इसके ऐसे समतुल्य भिन्न को प्राप्त करने की आवश्यकता है जिसका हर 100 हो। इस भिन्न को प्राप्त करने के लिए दो विधियों को निम्नलिखित रूप में दर्शाया गया है।

विधि 1	विधि 2
$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25}$	$\frac{3}{4} = \frac{x}{100}$
$= \frac{75}{100} = 75\%$	$\frac{3}{4} \times 100 = \frac{x}{100} \times 100$
	[दोनों पक्षों को 100 से गुणा करने पर]
	$x = \frac{3}{4} \times 100$
	$= 75$

इस प्रकार $\frac{3}{4}$ को 75% के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

निम्नलिखित बार आरेख (bar diagram) का निरीक्षण कीजिए जो $\frac{3}{4}$ और 75% के बीच समतुल्यता को प्रदर्शित करता है।



? क्या आप ज्ञात कर सकते हैं कि इस रंग में पीले रंग का प्रतिशत कितना है?

? **उदाहरण 2**— सूर्या ने एक प्रतियोगिता में पुरस्कार के रूप में कुछ धनराशि जीती है। वह इस धनराशि में से $\frac{2}{5}$ भाग किरमिच (canvas) क्रय करने के लिए बचाना चाहता है। इस बचत राशि को प्रतिशत में व्यक्त कीजिए।

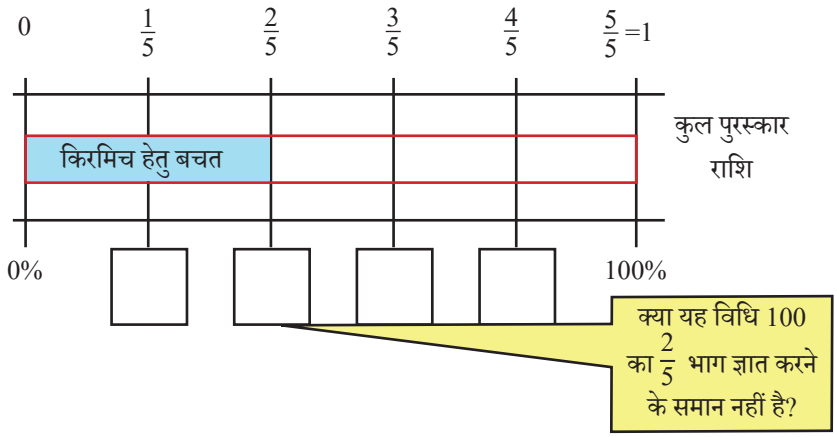
उपर्युक्त समस्या को हल करने के लिए नीचे दर्शाई गई विभिन्न विधियों को समझने का प्रयास कीजिए।

विधि 1	विधि 2
$\frac{2}{5} = \frac{20}{50} = \frac{40}{100}$	$\frac{2}{5} = \frac{x}{100}$
$= 40\%$	$x = \frac{2}{5} \times 100 = 40$

© NCERT not to be republished

नीचे दिए गए रिक्त प्रकोष्ठों को पूरित कर विधि 3 को पूर्ण करने का प्रयास कीजिए।

विधि 3



गणित में विभिन्न प्रश्नों को समझने और हल करने की विभिन्न विधियाँ हो सकती हैं। हालाँकि आप जिस भी विधि को अपनाते हैं वह आपके लिए प्रिय विधि हो सकती है परंतु इस विषय पर दूसरों के विचारों एवं विधियों को जानना रोचक और ज्ञानवर्धक हो सकता है।

भिन्न किसी पूर्ण का हिस्सा होती है जबकि प्रतिशत प्रति 100 होता है। अत: एक भिन्न को प्रतिशत के रूप में व्यक्त करने के लिए हमें भिन्न को 100 से गुणा करना होता है।

उदाहरण 3— यदि कोई प्रतिशत दिया गया है तो क्या आप उसे भिन्न के रूप में व्यक्त कर सकते हैं? उदाहरण के लिए, 24% को भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए।

चूँकि प्रतिशत एक भिन्न होता है, अतः 24%, $\frac{24}{100}$ के समान है।

हम $\frac{24}{100}$ की अन्य समतुल्य भिन्नों को भी ज्ञात कर सकते हैं $\frac{24}{100} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25} = \frac{48}{200}$

व्यापक रूप से हम कह सकते हैं कि एक प्रतिशत, z% को $\frac{z}{100}$ के समतुल्य किसी भी भिन्न के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित भिन्नों को प्रतिशत के रूप में व्यक्त कीजिए।

   (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{7}{14}$ (iii) $\frac{9}{20}$

   (iv) $\frac{72}{150}$ (v) $\frac{1}{3}$ (vi) $\frac{5}{11}$

2. नंदनी के पास 25 कंचे हैं जिनमें से 15 सफेद रंग के हैं। बताइए कि सफेद रंग के कंचों का प्रतिशत कितना है?

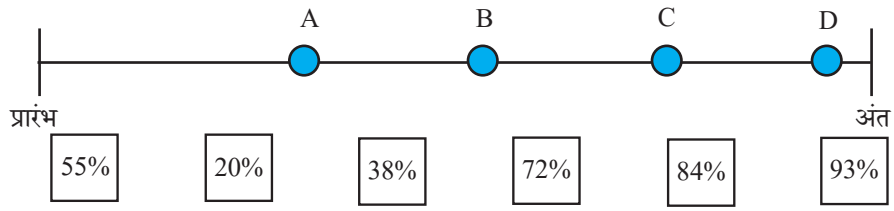
   (i) 10% (ii) 15% (iii) 25%

   (iv) 60% (v) 40% (vi) इनमें में से कोई नहीं

© NCERT not to be republished

3. एक विद्यालय के कुल 80 विद्यार्थियों में से 15 विद्यार्थी पैदल चलकर विद्यालय आते हैं। बताइए कि पैदल चलकर आने वाले विद्यार्थियों का प्रतिशत कितना है?

4. मित्रों का एक समूह लंबी दूरी की दौड़ में भाग ले रहा है। 15 मिनट के पश्चात उनमें से प्रत्येक की स्थिति को निम्नलिखित चित्र में दर्शाया गया है। यह मिलान कीजिए (नीचे दिए गए विकल्पों में से) कि उनमें से प्रत्येक ने दौड़ का लगभग कितना प्रतिशत भाग पूर्ण किया है।



5. राशियों के कुछ युग्मों को नीचे दर्शाया गया है। पहचानिए और रिक्त स्थानों में उपयुक्त चिह्नों '>', '<', '=' को अंकित कीजिए। गणना किए बिना इन्हें हल करने का प्रयास कीजिए।

(i) 50% _____ 5% (ii) $\frac{5}{10}$ _____ 50%

(iii) $\frac{3}{11}$ _____ 61% (iv) 30% _____ $\frac{1}{3}$

? यदि प्रतिशत केवल एक विशेष प्रकार का भिन्न ही है तो हमें प्रतिशत की आवश्यकता क्यों हैं? हम केवल भिन्न का ही उपयोग क्यों नहीं कर सकते?

आइए, हम एक उदाहरण पर विचार करें।

बिस्कुट बनाने वाली एक फैक्ट्री 2 नए प्रकारों के बिस्कुट को बनाने पर प्रयोग कर रही है। प्रकार 1 के बिस्कुट में चीनी की मात्रा $\frac{9}{34}$ है और प्रकार 2 में यह मात्रा $\frac{13}{45}$ है। विचार कीजिए कि कौन-से प्रकार में चीनी की मात्रा अधिक है? संभवत: प्रथम दृष्टया यह स्पष्ट नहीं हो सकता है और हमें इसके लिए कुछ गणना भी करनी पड़ सकती है। परंतु उपर्युक्त सूचना यदि इस प्रकार प्रस्तुत की जाए कि बिस्कुट के प्रकार 1 में चीनी की मात्रा 26.47% है और प्रकार 2 में चीनी की मात्रा 28.88% है तो यह क्षणभर में ही स्पष्ट हो जाता है कि बिस्कुट के किस प्रकार में चीनी की मात्रा अधिक है।

यदि हम भिन्नों में समान हर चाहते हैं तो विचार कीजिए कि हम विशेष रूप से 100 का ही चयन क्यों करते हैं? 10, 50, 1000 अथवा 43 का चयन क्यों नहीं?

सैद्धांतिक रूप से समान हर के रूप में हम किसी भी संख्या का चयन कर सकते हैं परंतु 100 के चयन से कुछ लाभ की स्थिति बनती है। चूँकि हमारी संख्यात्मक पद्धति का आधार 10 है, अतः संख्याएँ, जैसे — 10, 100 और 1000 सरलतापूर्वक दशमलव पद्धति में समायोजित हो जाती हैं। उदाहरण के लिए— $31\% = \frac{31}{100} = 0.31$

भिन्न, दशमलव और प्रतिशत के बीच यह पारस्परिक रूपांतरण सहज और त्वरित हो जाता है।

संख्या के रूप में 100 पूर्ण है और इसे समझना व इसके साथ कार्य करना सरल है। हम "प्रति 1000" अथवा "प्रति 100,000" भी कह सकते थे (इस प्रकार के प्रयोग सांख्यिकी में किए जाते हैं, जैसे— "प्रति हजार लोग" अथवा "प्रति लाख")।

$\frac{9}{34}$ = 26.49 प्रतिशत (प्रति 100)

$\frac{9}{34}$ = 2.647 प्रति दस (प्रति 10)

$\frac{9}{34}$ = 264.7 प्रति हजार (प्रति 1000)

© NCERT not to be republished

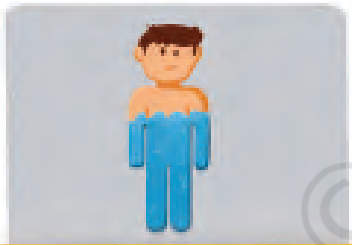
परंतु 100 का प्रयोग सरलता से समझ में आने वाला है। यह विस्तृत विवरण देने में पर्याप्त है। साथ ही समझने के लिए भी सरल व पर्याप्त है। इसके साथ ही यदि 10 पर विचार करें तो प्रति 10 अनेक उद्देश्यों के लिए अत्यंत छोटी संख्या होगी।

दशमलव भिन्न के प्रचलन में आने से पूर्व इसकी आवश्यकता दसवें, बीसवें और सौवें भाग की गणना में अनुभव की गई थी। 'प्रति 100' की संकल्पना का विचार चौथी शताब्दी सामान्य संवत पूर्व के आरंभ में कौटिल्य द्वारा रचित ग्रंथ *अर्थशास्त्र* में देखा जा सकता है— "प्रतिमाह सवा पण प्रति सैकड़ा एक उचित ब्याज है। प्रतिमाह पाँच पण, प्रति सैकड़ा व्यावसायिक ब्याज है। वनों में यह ब्याज प्रतिमाह 10 पण प्रति सैकड़ा प्रचलन में है, जबकि समुद्री व्यापारियों के लिए प्रतिमाह 20 पण प्रति सैकड़ा प्रचलित है।"

इसी अवधि के आस-पास रोमन व्यापारी अपने व्यापार और नीलामी से संबंधित लेन-देन में करों के $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{100}$ का प्रयोग करते थे। 15वीं शताब्दी की इटली की पांडुलिपियों में '*xx p* सेंटों', '*x p* सेंटों' और '*vii p* सेंटों' जैसे व्यंजकों का उल्लेख हुआ है। (यह हमारे 20%, 10% और 7% के समतुल्य हैं)

हमारे आस-पास प्रतिशत का उपयोग

विभिन्न संदर्भों में प्रतिशत का उपयोग व्यापक स्तर पर किया जाता है। नीचे कुछ ऐसे रोचक उदाहरण दिए गए है जिनमें प्रतिशत का प्रयोग किया गया है।



मानव शरीर के भार में औसतन 60% जल होता है।

आइसक्रीम में आयतन के दृष्टिकोण से लगभग 30–50% वायु होती है।

विश्व की 45% जनसंख्या ने वर्ष 2022 के फीफा विश्व कप का कम-से-कम कुछ भाग देखा था।

वैश्विक स्तर पर 80% से अधिक किशोर कम-से-कम 1 घंटे की दैनिक शारीरिक गतिविधि करने का मानक पूरा नहीं कर पा रहे हैं।

सौर मंडल के कुल द्रव्यमान का लगभग 99.86% सूर्य में निहित है।

एक आकलन के अनुसार विश्व की कुल कृषि भूमि के लगभग 52% भाग का क्षरण हो चुका है।

© NCERT not to be republished

1.2 कुछ मात्राओं का प्रतिशत

उदाहरण 1— मधु और माधव में से प्रत्येक ने भिन्न प्रकार के बिस्कुट खाए। मधु द्वारा खाए गए बिस्कुट में चीनी की मात्रा 25% थी जबकि माधव द्वारा खाए गए बिस्कुट में यह मात्रा 35% थी। क्या आप यह ज्ञात कर सकते हैं कि किसने अधिक मात्रा में चीनी का सेवन किया?

जैसा कि हमने देखा है कि प्रतिशत, भिन्नात्मक राशियों या समानुपातों को दर्शाता है। जब दो अलग-अलग मात्राओं या कुल राशियों का संदर्भ हो तो केवल प्रतिशत के आधार पर इस प्रकार की तुलना करना अनुपयुक्त होगा। यदि उन दोनों ने 100 g बिस्कुट खाया तो निश्चित ही मधु के द्वारा किए गए चीनी के सेवन— 25 g (100 g का 25% अर्थात 25 g प्रति 100 g) की अपेक्षा माधव ने अधिक मात्रा में चीनी का सेवन किया जो कि 35 g (100 g का 35% अर्थात 35 g प्रति 100 g) है।

मान लीजिए कि मधु ने 120 g बिस्कुट और माधव ने 95 g बिस्कुट खाया। यह ज्ञात करने का प्रयास कीजिए कि किसने अधिक मात्रा में चीनी का सेवन किया?

हमें ज्ञात है कि चीनी के भार का संबंध खाए गए बिस्कुट के भार के समानुपातिक है। मधु ने 120 g बिस्कुट खाया जिसमें चीनी की मात्रा 25% है। मधु द्वारा सेवन की गई चीनी की मात्रा ही नीचे दिए गए रिक्त स्थान में लिखा जाने वाला मान है—

$$25 : 100 :: ____ : 120$$

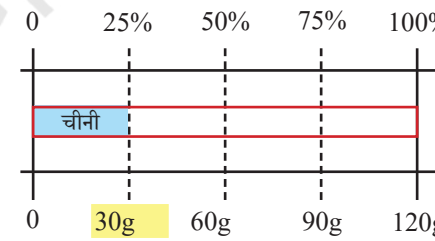
आगे की प्रक्रिया को जारी रखने की कुछ विधियों को नीचे दर्शाया गया है।

25% चीनी का अर्थ है— बिस्कुट के प्रति 100 g में 25 g चीनी अर्थात प्रति 20 g बिस्कुट में 5 g चीनी है, अत: 120 g बिस्कुट में 30 g चीनी है।

समानुपातिक संबंध को इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$\frac{25}{100} = \frac{s}{120}$$

$$s = \frac{25}{100} \times 120 = 30$$



क्या ऊपर दी गई कोई भी विधि आपके विचारों से मेल खाती हैं? क्या आप सभी विधियों को समझ पाए?

आइए, अब हम यह ज्ञात करते हैं कि माधव ने कितनी मात्रा में चीनी का सेवन किया। माधव ने 95 g बिस्कुट खाया जिसमें चीनी की मात्रा 35% है। कभी-कभी कुछ संख्याएँ पूर्व में अपनाई गई विधियों द्वारा गणना करने हेतु सुविधाजनक नहीं होती हैं। अत: आप इसे इस प्रकार भी समझ सकते हैं कि माधव ने 100 g बिस्कुट खाया जिसमें 35 g चीनी का प्रयोग हुआ है।

इसका तात्पर्य है कि 1 g बिस्कुट में $\frac{35}{100}$ g चीनी है।

$$\frac{35}{100} = \frac{x}{1} \rightarrow x = \frac{35}{100}$$

© NCERT not to be republished

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि 95 g बिस्कुट में चीनी की मात्रा $\frac{35}{100} \times 95 = 33.25$ g होगी।

दिए गए समानुपातिक संबंध में इस समस्या को s का मान ज्ञात करके भी हल किया जा सकता है $\frac{35}{100} = \frac{s}{95}$

अत: माधव ने चीनी का सेवन अधिक मात्रा में किया।

उदाहरण के लिए, हम कह सकते हैं कि किसी मान (मान लीजिए 80) का y %, $\frac{y}{100} \times 80$ द्वारा दिया जाता है। हम यह भी कह सकते हैं कि किसी मान (मान लीजिए z) का 45%, $\frac{45}{100} \times z$ द्वारा दिया जाता है।

स्वैच्छिक गणनाएँ

हमने अभी 120 के 25% की गणना की है। क्या 25%, $\frac{1}{4}$ (एक चौथाई) भाग के समतुल्य है?

मान लीजिए हम 40 का 25% ज्ञात करना चाहते हैं। क्या यह 40 के $\frac{1}{4}$ (एक चौथाई) भाग के समतुल्य है?

हाँ, चूँकि 25, 100 का एक चौथाई भाग ($\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$) है।

इस प्रकार 40 का 25% = $\frac{25}{100} \times 40 = \frac{1}{4} \times 40$ के समान है।

? नीचे दी गई तालिका में दर्शाए गए मानों के प्रतिशत की गणना (पेन और कागज का प्रयोग किए बिना) करने का प्रयास कीजिए। अपने उत्तर को तालिका में लिखिए।

	100	200	50	80	10	35	287
25%	25						
10%							
20%							
5%							

? आपने उत्तरों को किस प्रकार प्राप्त किया? प्रयोग की गई विधियों के संबंध में कक्षा में चर्चा कीजिए। क्या आपने तालिका में कुछ रोचक देखा?

आपने यह ध्यान दिया होगा कि किसी मान का 20% उसी मान के 10% का दोगुना है। यह स्थिति सदैव बनी रहेगी क्योंकि 20% (100 में से 20 भाग), 10% (100 में से 10 भाग) का दोगुना होता है।

गणित चर्चा

? इस समझ का उपयोग करते हुए मानसिक रूप से गणना कीजिए कि ऊपर दी गई तालिका में दिए गए मानों का 40% कितना होगा?

आपने किसी मूल्य के 20%, 5% और 25% के बीच किन संबंधों को अवलोकित किया है?

ऐसा प्रतीत होता है कि (y का 20%) + (y का 5%) = y का 25% है। हम यह सत्यापित कर सकते हैं कि यह गुण सदैव ही सत्य होता है—

$$\left(\frac{20}{100} \times y\right) + \left(\frac{5}{100} \times y\right) = \left(\frac{25}{100} \times y\right)$$

© NCERT not to be republished

? इस अवलोकन का उपयोग करते हुए मानसिक रूप से गणना कीजिए कि तालिका में दिए गए मानों का 15% कितना होगा?

? मान लीजिए कि आपको किसी मान के 75%, 90%, 70%, 55% की मानसिक रूप से गणना करनी है। आप यह गणना किस प्रकार करेंगे? इस पर चर्चा कीजिए?

गणित चर्चा

त्रिक (FDP Trio) — भिन्न, दशमलव और प्रतिशत

? **उदाहरण 2**— हम किसी एक मान का 50% उस मान के साथ $\frac{1}{2}$ का गुणा करके प्राप्त कर सकते हैं। क्या उस मान में 0.5 से गुणा करके हम उस मान के 50% का वही परिणाम प्राप्त करेंगे?

हाँ, चूँकि $\frac{1}{2} = 0.5$

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

24 का 50% = 12
$0.5 \times 24 = 12$

? इसी प्रकार किसी मात्रा का 10% प्राप्त करने के लिए इस मान को किस दशमलव मान से गुणा किया जाना चाहिए?

? निम्नलिखित तालिका को पूर्ण कीजिए।

प्रतिशत	50%	100%	25%	75%	10%	1%	5%	43%
भिन्न	$\frac{50}{100}$							
दशमलव	0.5							

गतिविधि— आप कितने निकट पहुँच सकते हैं?

विद्यार्थियों का एक युग्म बनाइए। युग्म में प्रत्येक विद्यार्थी को एक संख्या का चयन करना है। मान लीजिए कि चयनित संख्याएँ a और b हैं। अपनी संख्याओं को एक दूसरे से साझा कीजिए। आप दोनों को उस प्रतिशत का आकलन करना होगा जो भिन्न $\frac{a}{b}$ के समतुल्य हो (जहाँ $a < b$)। इसके साथ ही एक सुनिश्चित समय (मान लीजिए 5 सेकंड) में अपना उत्तर बताइए। जिस विद्यार्थी का आकलन सबसे अधिक सन्निकट होगा, वह इस पारी का विजेता होगा। इसी प्रकार आप 10 पारी के लिए खेलिए।

? **उदाहरण 3**— एक परीक्षा में अधिकतम अंक 75 हैं। इस परीक्षा में यदि विद्यार्थी 80% या उससे अधिक अंक प्राप्त करते हैं तो उन्हें A श्रेणी (ग्रेड) में रखा जाता है। जुबिन को A श्रेणी प्राप्त करने के लिए कम-से-कम कितने अंक प्राप्त करने होंगे?

हम भिन्न और दशमलव के गुणन के साथ ही समानुपातिकता की समझ का उपयोग करके 75 का 80% विभिन्न विधियों से ज्ञात कर सकते हैं।

भिन्न से गुणन $\rightarrow \frac{80}{100} \times 75$

$= \frac{4}{5} \times 75 = 60$

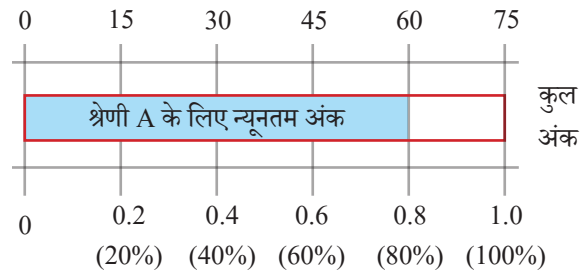
© NCERT not to be republished

दशमलव से गुणन $\rightarrow 0.8 \times 75 = 60$

समानुपातिक तर्कण $\rightarrow$

100 में से न्यूनतम अंक 80 हैं।

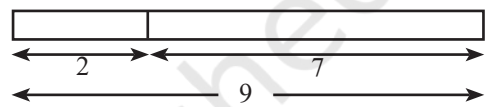
75 में से, यह $\frac{75 \times 80}{100} = 60$ है।



उदाहरण 4 — मान लीजिए कि एक विशेष प्रकार के बाजरे का दलिया बनाने के लिए बाजरे और इसे उबालने के लिए जल का अनुपात 2 : 7 है। बताइए कि इस मिश्रण में बाजरे की मात्रा का प्रतिशत कितना है? यदि 500 ml मिश्रण तैयार करना है तो इसमें बाजरे की मात्रा कितनी होनी चाहिए?

इस स्थिति को दाईं ओर दर्शाए गए बार निदर्श के अनुसार प्रदर्शित किया जा सकता है।

बाजरे और मिश्रण की मात्रा का अनुपात 2 : 9 है। अन्य शब्दों में मिश्रण की एक इकाई में बाजरे की मात्रा $\frac{2}{9}$ इकाई है और जल की मात्रा $\frac{7}{9}$ इकाई है।



सर्वप्रथम आकलन कीजिए कि $\frac{2}{9}$ कितना प्रतिशत (%) होगा?

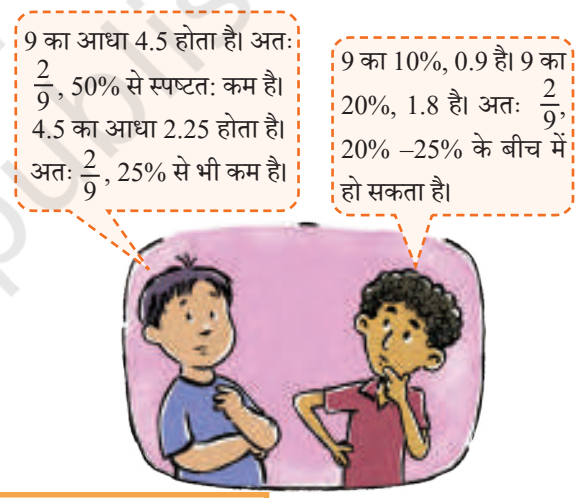
मिश्रण में बाजरे का प्रतिशत (अर्थात ऐसी 100 इकाईयों में)

$$\frac{2}{9} \times 100 = 22.22\% \text{ है।}$$

मिश्रण में जल की मात्रा का प्रतिशत होगा —

$$100 - 22.22 = 77.78\%$$

किसी मिश्रण में बाजरे की मात्रा 22.22% होने का अर्थ है कि 100 ml मिश्रण में बाजरे की मात्रा 22.22 ml होगी। अत: 500 ml में 22.22% बाजरे की मात्रा होने का अर्थ है कि 500 ml के मिश्रण में बाजरे की मात्रा $5 \times 22.22 =$ 111.1 ml होगी।



दिए गए अनुपात को एक भिन्न और इसके पश्चात प्रतिशत में परिवर्तित किया जा सकता है।

गणना करने से पूर्व आकलन करने का अभ्यास संख्या बोध को समृद्ध कर सकता है और त्रुटियों को कम करने में सहायता कर सकता है। प्राय: हमें सटीक मान की आवश्यकता नहीं होती है। त्वरित आकलन करने की क्षमता इन स्थितियों में उपयोगी होती है।

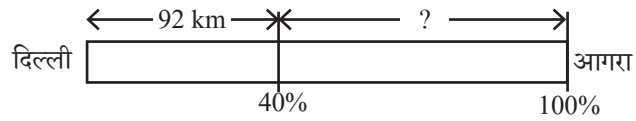
शिक्षक हेतु टिप्पणी— समस्या समाधान प्रक्रिया में गणना करने या हल करने से पूर्व आकलन करने के अभ्यास को सम्मिलित कीजिए। आप आवश्यकतानुसार विद्यार्थियों को पुन: स्मरण एवं प्रोत्साहित कर सकते हैं।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 5— एक साइकिल चालक, साइकिल द्वारा दिल्ली से आगरा की यात्रा करता है और वह यात्रा का 40% भाग पूर्ण कर लेता है। यदि उसने 92 km की यात्रा पूरी कर ली है तो उसे आगरा पहुँचने के लिए अभी और कितने km की यात्रा करनी होगी?

उपर्युक्त स्थिति को समझने के लिए सर्वप्रथम हम इसे एक बार निदर्श से प्रदर्शित करते हैं।

हल करने से पूर्व आकलन कीजिए।



इस प्रश्न को हल करने की कुछ विधियों को नीचे दर्शाया गया है। क्या आपकी विधि नीचे दी गई किसी विधि से मेल खाती है? क्या आप किसी अन्य विधि को प्राथमिकता देना चाहेंगे?

दिया गया है कि कुल दूरी का 40%, 92 km है। हमें शेष 60% दूरी को ज्ञात करना है।

विधि 1

कुल दूरी का 40%, 92 km है
इसलिए 20%,
46 km होगा।
अत: 60%, 92 + 46 = 138 km होगा।

विधि 2

यदि 40%, 92 km है तो 60% कितने km होगा?

40 : 92 :: 60 : ?

$$\frac{40}{92} = \frac{60}{r}$$

(r शेष दूरी है।)

$$r = 60 \times \frac{92}{40} = 138$$

विधि 3

$$\frac{40}{100} = \frac{92}{d}$$

(d कुल दूरी को दर्शाता है।)

$$d = 92 \times \frac{100}{40} = 230$$

शेष दूरी = 230 km – 92 km
= 138 km

विधि 4

यदि x शेष दूरी है तो दिल्ली से आगरा की कुल दूरी $x + 92$ है। चूँकि हम यह जानते हैं कि 92 km कुल दूरी का 40% है। अत:

$$\frac{40}{100} \times (x + 92) = 92$$

$$(x + 92) = 92 \times \frac{100}{40}$$

$$x = 230 - 92 = 138$$

कच्चा आरेख चित्रण के माध्यम से दी गई स्थिति को अधिक सरल रूप से समझा जा सकता है जो समस्या को हल करने की दिशा में आगे बढ़ने को सरल बनाता है।

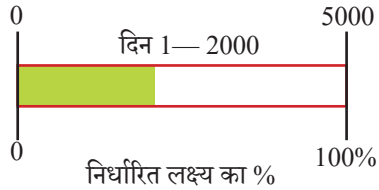
100 से अधिक प्रतिशत

अभी तक हमने 100 या उससे कम मान के प्रतिशत को देखा है। क्या 100 से अधिक मान के प्रतिशत संभव हो सकते हैं? बताइए इसका क्या अर्थ होगा यदि प्रतिशत 100 से अधिक मान का हो? आइए, इसे समझते हैं।

उदाहरण 6— किशनलाल ने कुछ समय पूर्व ही एक कपड़े की दुकान खोली है। उसका लक्ष्य प्रतिदिन कम-से-कम ₹5000 की बिक्री करना है। पहले दो दिनों में उसकी बिक्री क्रमश: ₹2000 और ₹3500 की हुई। बताइए कि उसने अपने निर्धारित लक्ष्य का कितना प्रतिशत प्राप्त किया?

© NCERT not to be republished

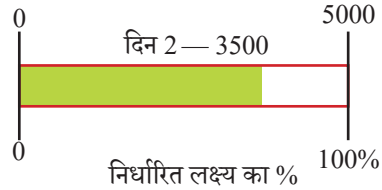
निर्धारित लक्ष्य की प्राप्ति का प्रतिशत नीचे दर्शाया गया है।



निर्धारित लक्ष्य का %

$\frac{2000}{5000} \times 100 = 40\%$

$40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0.4$



निर्धारित लक्ष्य का %

$\frac{3500}{5000} \times 100 = 70\%$

$70\% = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} = 0.7$

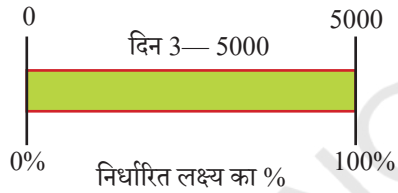
पहले दिन की बिक्री, निर्धारित लक्ष्य का 40% है और दूसरे दिन की बिक्री, निर्धारित लक्ष्य का 70% है।

अन्य शब्दों में कहा जाए तो पहले दिन निर्धारित लक्ष्य से 60% कम और दूसरे दिन 30% कम बिक्री हुई थी।

? अगले दो दिनों में उसने क्रमश: ₹5000 और ₹6000 की बिक्री की है। बताइए कि ये मान किशनलाल के निर्धारित लक्ष्य का कितना प्रतिशत है?

किशनलाल का लक्ष्य ₹5000 है और उसने तीसरे दिन ₹5000 की बिक्री की जो कि 100% है। चौथे दिन उसने ₹6000 की बिक्री की जो उसके निर्धारित लक्ष्य से ₹1000 अधिक है।

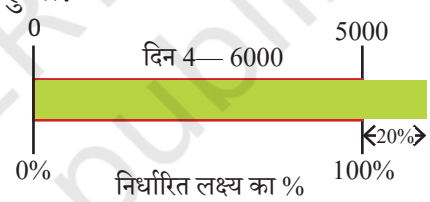
? चौथे दिन निर्धारित लक्ष्य का कितना प्रतिशत प्राप्त हुआ?



निर्धारित लक्ष्य का %

$\frac{5000}{5000} \times 100 = 100\%$

$100\% = \frac{100}{100} = \frac{1}{1} = 1.0$



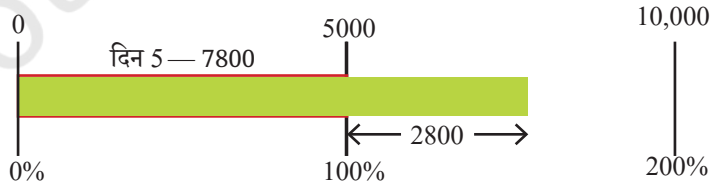
निर्धारित लक्ष्य का %

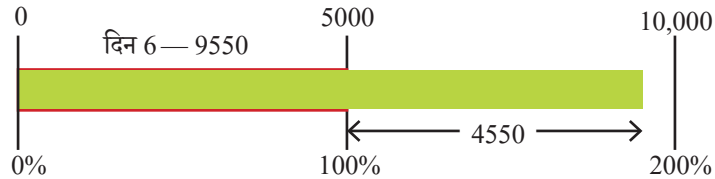
$\frac{6000}{5000} \times 100 = 120\%$

$120\% = \frac{120}{100} = \frac{6}{5} = 1.2$

1000, 5000 का 20% है। इसलिए 6000, (5000 + 1000), 5000 का 100% + 20% = 120% है। इसकी गणना $\frac{6000}{5000} \times 100 = \frac{6}{5} \times 100 = 120\%$ के रूप में भी की जा सकती है। इसका अर्थ यह हुआ कि उसने अपने निर्धारित लक्ष्य का 120% प्राप्त किया जो कि उसके निर्धारित लक्ष्य से 20% अधिक है।

? 5वें और 6वें दिन उसकी बिक्री क्रमश: ₹7800 और ₹9550 हुई। बताइए कि इन दिनों में किशनलाल ने निर्धारित लक्ष्य का कितना प्रतिशत प्राप्त किया?





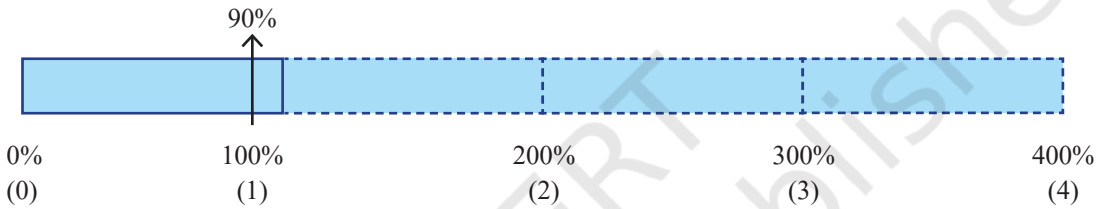
© NCERT not to be republished

7वें दिन उसने अपने निर्धारित लक्ष्य का 150% प्राप्त किया। 8वें दिन उसने अपने निर्धारित लक्ष्य का 210% प्राप्त किया। इन दिनों हुई बिक्री को ज्ञात कीजिए?

मान लीजिए कि किसी दिन उसने ₹2500 की बिक्री की। इसे इस प्रकार भी व्यक्त किया जा सकता है कि उसने अपने निर्धारित लक्ष्य का $\frac{1}{2}$ प्राप्त किया या उसने अपने निर्धारित लक्ष्य का 50% प्राप्त किया या उसने अपने निर्धारित लक्ष्य का 0.5 प्राप्त किया। इसके साथ ही किशनलाल ने अन्य किसी दिन ₹10,000 की बिक्री की तो हम कह सकते हैं कि उसने अपने निर्धारित लक्ष्य का दोगुना/दोहरा प्राप्त किया अथवा "उसने अपने निर्धारित लक्ष्य का 200% प्राप्त किया।"

नीचे दी गई तालिका को पूर्ण कीजिए। निम्नलिखित आरेख में सन्निकट स्थितियों को चिह्नित कीजिए।

प्रतिशत	90%	110%	200%	250%	15%	173%	358%	28.9%	305%
भिन्न									
दशमलव									



उदाहरण 7— एक कृषक ने गत वर्ष 260 kg गेहूँ की कटाई की। वर्तमान वर्ष में उसने 650 kg गेहूँ की कटाई की। वर्तमान वर्ष की फसल गत वर्ष की फसल का कितना प्रतिशत है?

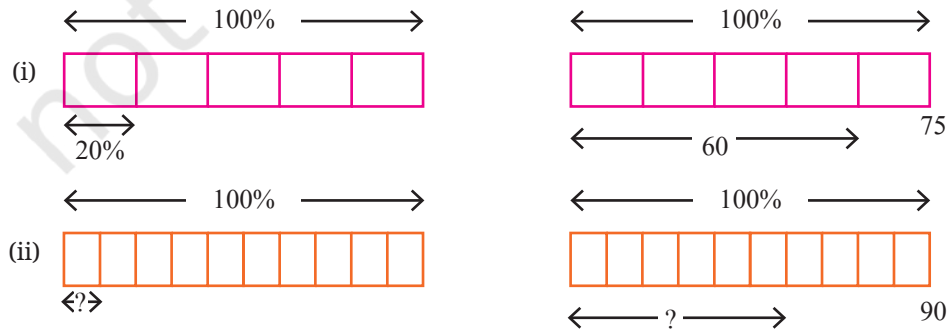
वर्तमान वर्ष की फसल = $\frac{650}{260} \times 100 = 250\%$ है। अर्थात हम कह सकते हैं कि इस वर्ष की फसल, गत वर्ष की फसल का 250% है।

250% संकेत करता है कि यह वास्तविक मान का 2.5 गुना है।

आइए, पता लगाएँ

निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने के लिए किसी भी प्रकार की गणना करने से पूर्व आकलन कीजिए। मानसिक गणना सहित विभिन्न विधियों का उपयोग करने का प्रयास कीजिए।

1. लुप्त संख्याओं को ज्ञात कीजिए। पहले प्रश्न को आपके लिए हल कर दिया गया है।



© NCERT not to be republished

(iii)

2. निम्नलिखित प्रश्नों के मान ज्ञात कीजिए और उनके बार निदर्श भी बनाइए।

   (i) 160 का 25% (ii) 250 का 16% (iii) 360 का 62%

   (iv) 40 का 140% (v) 1 घंटा का 1% (vi) 10 kg का 7%

3. सूर्या ने 60 ml गहरा नारंगी रंग तैयार किया। यदि इस गहरे नारंगी रंग का $\frac{3}{4}$ भाग लाल रंग से बना था तो उसने कितना लाल रंग उपयोग किया?

4. नीचे राशियों के युग्मों को दर्शाया गया है। '>', '<', '=' में से उपयुक्त चिह्न को पहचानिए और रिक्त प्रकोष्ठ में अंकित कीजिए। चित्रण या आकलन इसमें सहायता कर सकता है। केवल सत्यापन के लिए अथवा अत्यावश्यक स्थिति में ही गणना कीजिए।

   (i) 510 का 50% ☐ 515 का 50% (ii) 148 का 37% ☐ 148 का 73%

   (iii) 43 का 29% ☐ 110 का 92% (iv) 40 का 30% ☐ 50 का 40%

   (v) 200 का 45% ☐ 490 का 10% (vi) 80 का 30% ☐ 64 का 24%

5. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

   (i) k का 30%, 70 है, k का 60%, ___ है, k का 90%, ___ है, k का 120%, ___ है।

   (ii) m का 100%, 215 है, m का 10%, ___ है, m का 1%, ___ है, m का 6%, ___ है।

   (iii) n का 90%, 270 है, n का 9%, ___ है, n का 18%, ___ है, n का 100%, ___ है।

   (iv) ऐसे दो और प्रश्न बनाइए और अपने सहपाठियों को उन्हें हल करने के लिए अभिप्रेरित कीजिए।

6. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

   (i) 300 का _____ % 3 है।

   (ii) 4 का 40% ____ है।

   (iii) _____ का 80% 40 है।

गणित चर्चा

7. क्या एक दिन का 10%, एक सप्ताह के 1% से बड़ा है? ऐसे प्रश्न बनाइए और इन्हें हल करने के लिए अपने सहपाठियों को चुनौती दीजिए।

8. मरियम के पास खेती के लिए एक अनोखा बैल है। एक दिन उसने बैल को 2 इकाई चारा दिया और बैल ने उसमें से 1 इकाई चारा खा लिया। इसके अगले दिन उसने बैल को 3 इकाई चारा दिया और बैल ने उसमें से 2 इकाई खा लिया। अगले दिन उसने बैल को 4 इकाई चारा दिया और बैल ने 3 इकाई खा लिया। यह प्रक्रिया निरंतर चलती रही और 99वें दिन उसने बैल को 100 इकाई चारा दिया और बैल ने 99 इकाई चारा खा लिया। इन मात्राओं को प्रतिशत के रूप में व्यक्त कीजिए। यह कार्य पूरी कक्षा के विद्यार्थियों में बाँटा जा सकता है। बताइए कि आपने क्या अवलोकन किया?

© NCERT not to be republished

9. कॉफी के बागान में कार्य करने वाले श्रमिक बागान के 20% भाग में कॉफी के फल तोड़ने में 18 दिन लगाते हैं। यदि उनके कार्य करने की गति समान रहती है तो बताइए कि श्रमिकों को पूरे बागान के फल तोड़ने के कार्य को पूरा करने में कितना समय लगेगा? विचार कीजिए कि यहाँ श्रमिकों के कार्य करने की समान गति की कल्पना क्यों आवश्यक है?
10. बैडमिंटन के प्रशिक्षक ने प्रशिक्षण सत्र की योजना इस प्रकार से बनाई है जिसमें वार्मअप की अवधि : खेल की अवधि : विश्राम की अवधि का अनुपात : 10% : 80% : 10% है। यदि प्रशिक्षक 90 मिनट का एक प्रशिक्षण सत्र संचालित करना चाहते हैं तो बताइए कि प्रत्येक गतिविधि कितने समय में पूर्ण होगी?

11. एक अनुमान के अनुसार विश्व की कुल जनसंख्या का 90% उत्तरी गोलार्द्ध में निवास करता है। इस वर्ष की विश्व की कुल जनसंख्या के आधार पर उत्तरी गोलार्द्ध में निवास करने वाले व्यक्तियों की संख्या (सन्निकट मान) ज्ञात कीजिए।
12. 4 व्यक्तियों के लिए हलवा बनाने की व्यंजन विधि में निम्नलिखित सामग्रियाँ दिए गए अनुपात में उपयोग में लाई गई हैं— रवा 40%, चीनी 40% और घी 20%
    (i) यदि आप 8 लोगों के लिए हलवा बनाना चाहते हैं तो बताइए कि उपर्युक्त सामग्रियों में से प्रत्येक का अनुपात क्या होगा?
    (ii) यदि सामग्रियों का कुल भार 2 kg है तो इसमें रवा, चीनी और घी की मात्रा कितनी है?

1.3 प्रतिशत के अनुप्रयोग

अनुपातों की तुलना करने में

उदाहरण 1— ईशा ने अंग्रेजी की परीक्षा में अधिकतम 50 अंकों में से 42 अंक प्राप्त किए और विज्ञान की परीक्षा में अधिकतम 80 अंकों में से 70 अंक प्राप्त किए। चूँकि उसने अंग्रेजी में 8 और विज्ञान में 10 अंक कम प्राप्त किए हैं, अत: वह सोचती है कि उसने अंग्रेजी में अपेक्षाकृत अच्छा प्रदर्शन किया है। रीमा उससे सहमत नहीं है। वह तर्क देती है कि ईशा ने विज्ञान में अधिक अंक प्राप्त किए हैं और उसने विज्ञान में अच्छा प्रदर्शन किया है। विशु सोचता है कि हम प्राप्तांकों की तुलना नहीं कर सकते हैं क्योंकि अधिकतम अंक असमान हैं। आपके विचार में कौन सही है?

क्या ऐसा नहीं है कि यदि अधिकतम अंक समान होते हैं तो तुलना अपेक्षाकृत अधिक सरल हो जाती है? इस प्रकार की तुलनात्मक स्थितियों में हमें दोनों मानों को प्रतिशत में रूपातंरित करने की आवश्यकता होती है।

अंग्रेजी के प्राप्तांक प्रतिशत के रूप में $= \frac{42}{50} \times 100 = 84\%$

विज्ञान के प्राप्तांक प्रतिशत के रूप में $= \frac{70}{80} \times 100 = 87.5\%$

प्रतिशत में विज्ञान के प्राप्तांक, अंग्रेजी के प्राप्तांक की तुलना में अधिक हैं। इस प्रकार हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि ईशा ने विज्ञान की परीक्षा में अपेक्षाकृत अधिक अच्छा प्रदर्शन किया है।

© NCERT not to be republished

उत्पाद की सामग्रियों को जानिए

उदाहरण 2— मधु और माधव कुछ समय पूर्व ही प्रसंस्कृत खाद्य-पदार्थों को खरीदने से पूर्व उनके ऊपर लगे हुए विवरण पत्र को पढ़ने के महत्व से अवगत हुए थे। वे दुकान पर एक बादाम पेय मिश्रण को खरीदने के लिए जाते हैं। वहाँ पर वे दो उत्पादों को देखते हैं और विचार करते हैं कि बादाम की अधिकतम मात्रा किस उत्पाद में है। क्या आप इसे ज्ञात कर सकते हैं? विचार कीजिए कि किस उत्पाद में सबसे कम मात्रा में खाद्य रसायन का प्रयोग किया गया है?

यदि हम सामग्रियों के अनुपातों को प्रतिशत के रूप में परिवर्तित कर दें तो इनकी तुलना करना अपेक्षाकृत अधिक सरल होता है। उदाहरण के लिए— डी.ई.एफ. बादाम पेय मिश्रण उत्पाद के कुल भार में चीनी की मात्रा का प्रतिशत $= \frac{99}{150} \times 100 = 66\%$ है।

प्रश्नों के उत्तर देने के लिए प्रतिशत की गणना कर तालिका को पूर्ण कीजिए।

	चीनी	ठोस दुग्ध	बादाम चूर्ण	खाद्य रसायन
डी.ई.एफ.	66%			
जेड.ए.सी. एन.आई.				

जाँच कीजिए कि प्रत्येक उत्पाद में सामग्रियों का कुल प्रतिशत मिलाकर 100 होता है।

प्रतिशत वृद्धि या कमी

प्रतिशत का उपयोग प्राय: राशियों में परिवर्तन की दर का वर्णन करने के लिए किया जाता है। उदाहरण के लिए—

1. मान लीजिए कि 3 वर्ष पूर्व 1 kg टमाटर का मूल्य ₹30 था और वर्तमान में इसी मात्रा का मूल्य ₹42 है। इस प्रकार टमाटर के मूल्य में ₹12 की वृद्धि हुई है।

$$\text{प्रतिशत वृद्धि} = \frac{\text{वृद्धि की मात्रा}}{\text{वास्तविक मात्रा या आधार}} \times 100$$

$$= \frac{12}{30} \times 100 = 40\%$$

अत: हम कह सकते हैं कि विगत तीन वर्षों में टमाटर के मूल्य में 40% की वृद्धि हुई है।

© NCERT not to be republished

2. कोविड-19 से पूर्व किसी सिनेमाघर में दर्शकों की संख्या का औसत 160 था। अब दर्शकों की संख्या का औसत केवल 100 है। दर्शकों की संख्या के औसत में 60 की कमी हुई है।

$$\text{प्रतिशत कमी} = \frac{\text{कमी की मात्रा}}{\text{वास्तविक मात्रा या आधार}} \times 100$$

$$= \frac{60}{160} \times 100 = 37.5\%$$

अत: कोविड-19 के पश्चात सिनेमाघर में दर्शकों की संख्या के औसत में 37.5% की कमी हुई है।

उदाहरण 3— क्या निम्नलिखित दो कथनों का अर्थ समान है?

(i) वर्ष 1991 में किसी राज्य की जनसंख्या, वर्ष 1961 की जनसंख्या का 165% है।

(ii) वर्ष 1961 से वर्ष 1991 की अवधि में इसी राज्य की जनसंख्या में 65% की वृद्धि हुई।

हाँ, दोनों का अर्थ समान है। मान लीजिए वर्ष 1961 में राज्य की जनसंख्या p है और वर्ष 1991 में राज्य की जनसंख्या q है।

कथन (i) का अर्थ है,	कथन (ii) का अर्थ है,
$q = p$ का 165%	$q = p + p$ का 65%
$q = \frac{165}{100} \times p = 1.65p$	$q = p + 0.65 \times p = 1.65p$

अन्य शब्दों में हम कह सकते हैं कि वर्ष 1991 में इस राज्य की जनसंख्या वर्ष 1961 की अपेक्षा 1.65 गुना है।

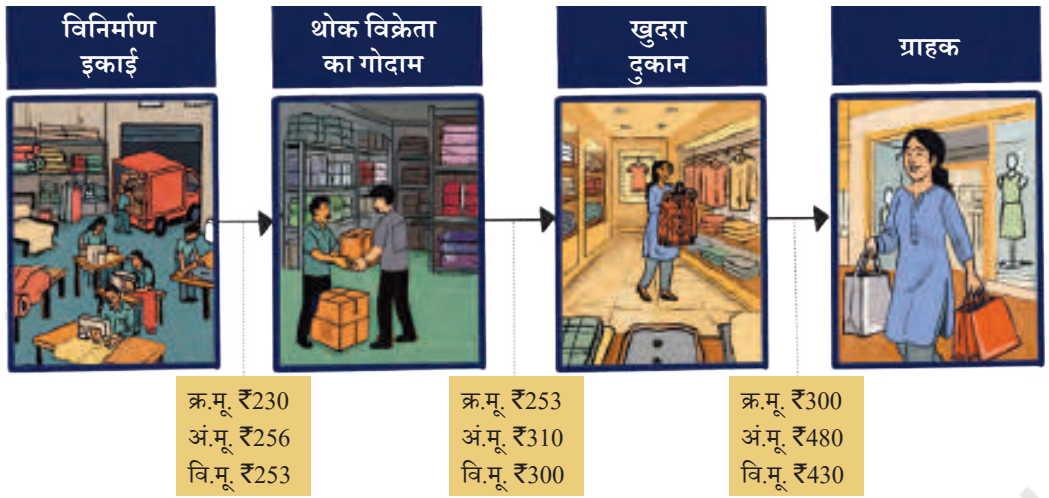
लाभ और हानि

संभवत: आपको कुछ वस्तुओं, जैसे — स्नैक्स, दैनिक उपयोग की वस्तुएँ, वस्त्र, खिलौने इत्यादि खरीदने का अनुभव होगा। प्राय: दुकानदार एक मूल्य बताता है और कुछ मोल-भाव के पश्चात जिस मूल्य पर सहमति सुनिश्चित होती है, ग्राहक उस मूल्य का भुगतान करके वस्तु (वस्तुएँ) खरीदता है। दुकानदार द्वारा बताए गए मूल्य को **अंकित मूल्य** कहा जाता है (कभी-कभी इसे वस्तु का अधिकतम खुदरा मूल्य भी कहा जाता है)। दी गई छूट के पश्चात जिस राशि या मूल्य का भुगतान ग्राहक करता है उसे **विक्रय मूल्य** कहा जाता है। इसके अतिरिक्त दुकानदार भी उस वस्तु को खरीदने के लिए जिस राशि या मूल्य का भुगतान करता है उसे **क्रय मूल्य** कहा जाता है। आइए, इसे एक उदाहरण के माध्यम से समझते हैं कि ये विभिन्न प्रकार के मूल्य वर्तमान संदर्भ में किस प्रकार संबंधित हैं?

आगे दर्शाए गए चित्रों में एक स्वेटर के विनिर्माताओं से लेकर ग्राहक तक की यात्रा को दर्शाया गया है और यह बताया गया है कि प्रत्येक चरण में क्रय मूल्य (क्र.मू.), अंकित मूल्य (अं.मू.), विक्रय मूल्य (वि.मू.) का क्या अर्थ है और इसका क्या महत्व है।

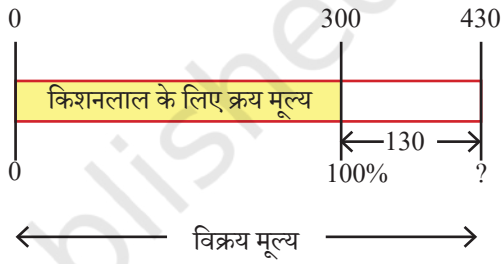
किशनलाल (खुदरा क्रेता) एक थोक विक्रेता से ₹300 प्रति स्वेटर के मूल्य से स्वेटर क्रय करता है। उसने अपने ग्राहकों के लिए अंकित मूल्य ₹480 प्रति स्वेटर निर्धारित किया है। मोल-भाव के पश्चात वह एक स्वेटर को ₹430 के मूल्य पर विक्रय करता है। ध्यान दीजिए कि विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य से बड़ा है जिसके फलस्वरूप ₹430 – ₹300 = ₹130 का लाभ हुआ है। यदि विक्रय मूल्य क्रय मूल्य से कम होगा तो इसका परिणाम सदैव हानि में होगा।

© NCERT not to be republished



उदाहरण 4 — इस स्वेटर पर किशनलाल को होने वाले लाभ प्रतिशत को ज्ञात कीजिए।

हम क्रय मूल्य को 100% मानेंगे ताकि क्रय मूल्य के संदर्भ में अर्जित लाभ प्रतिशत को ज्ञात किया जा सके। दाईं ओर दिया गया कच्चा आरेख इस स्थिति को दर्शाता है।



लाभ की धनराशि ₹130 है।

प्रतिशत लाभ $\frac{130}{300} \times 100 = 43.3\%$ है।

थोक विक्रेता और विनिर्माता का प्रतिशत लाभ ज्ञात कीजिए?

शांभवी की एक स्टेशनरी की दुकान है। उसने 200 पृष्ठों की एक अभ्यास पुस्तिका ₹36 प्रति पुस्तिका मूल्य की दर से क्रय की और 20% के लाभांश पर पुस्तिका का विक्रय कर दिया। विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

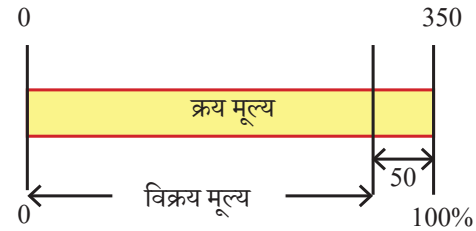
शांभवी क्रेयॉन (मोम-रंग) के बॉक्स 25% के लाभ के साथ ₹50 प्रति बॉक्स की दर से विक्रय करती है। बताइए कि उसने ये बॉक्स थोक विक्रेता से किस मूल्य पर क्रय किए?

उदाहरण 5 — रघु की किराने की दुकान में चावल का भंडार पुराना होता जा रहा है। रघु ने चावल को ₹35 प्रति kg की दर से क्रय किया था। अपने भंडार को खाली करने के लिए वह 10 kg चावल ₹300 के मूल्य पर विक्रय कर देता है। प्रतिशत हानि ज्ञात कीजिए?

रघु ने 10 kg चावल ₹350 में क्रय किए। इसके पश्चात उसने इन्हें ₹300 में विक्रय कर दिया।

हानि ₹350 – ₹300 = ₹50

प्रतिशत हानि $\frac{50}{350} \times 100 = 14.28\%$ है।



क्या हम प्रतिशत हानि की गणना प्रति kg की दर से कर सकते थे? क्या परिणाम इस स्थिति में भी समान होगा?

उदाहरण 6 — श्यामला ने ₹2650 प्रति नग की दर से सजावटी फूलदान क्रय किए थे। इनमें से एक फूलदान थोड़ा क्षतिग्रस्त था। वह इसे 18% की हानि पर विक्रय करने का निर्णय लेती है। बताइए इस फूलदान को विक्रय करने पर उसे कितनी धनराशि प्राप्त होगी?

आकलन करने का प्रयास कीजिए। दी गई स्थिति को दर्शाते हुए एक कच्चा आरेख भी बनाइए।

© NCERT not to be republished

इस समस्या को हल करने की दो विधियों को नीचे दर्शाया गया है—

यदि क्रय मूल्य 100% है, तो विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य से 18% कम है। अर्थात, विक्रय मूल्य 82% होगा। 2650 का 82% = 0.82 × 2650 = 2173	हानि की धनराशि 2650 का 18% है अर्थात, $\frac{18}{100} \times 2650 = 477$ क्रय मूल्य से इसे घटाने पर = 2650 – 477 = 2173

इस प्रकार क्षतिग्रस्त फूलदान का विक्रय मूल्य ₹2173 होगा।

? स्नेहल, तीव्र वर्षा के कारण पंचगनी में स्थित अपने खेत से हैदराबाद तक स्ट्रॉबेरी के परिवहन का कार्य नहीं कर सका। वह अपने भंडार में से कुछ स्ट्रॉबेरी का विक्रय ₹80 प्रति किलोग्राम की दर से 12% की हानि पर करता है। बताइए कि क्रय मूल्य कितना है?

आपने संभवत: उस समय प्रतिशत का चिह्न अवश्य ही देखा होगा जब कोई भी दुकान छूट देने का प्रस्ताव देती है। क्या आप 30% छूट का अर्थ समझते हैं? इसका अर्थ यह है कि दुकानदार वस्तु के मूल्य में 30% की कमी करने को तैयार है।

? एक बर्तन की दुकान, कुकर पर जिसका अधिकतम खुदरा मूल्य ₹1800 है, 35% की छूट का प्रस्ताव दे रही है। बताइए कि कुकर का विक्रय मूल्य कितना होगा? यदि क्रय मूल्य ₹900 था तो छूट के पश्चात प्रतिशत लाभ क्या होगा?

मान लीजिए कि किशनलाल ने गत माह में ₹80,000 की बिक्री की और उसी माह में क्रय की गई वस्तुओं पर व्यय की गई राशि ₹48,000 थी। अंतर राशि अर्थात ₹80,000 – ₹48,000 = ₹32,000, **सकल लाभ** कहलाती है।

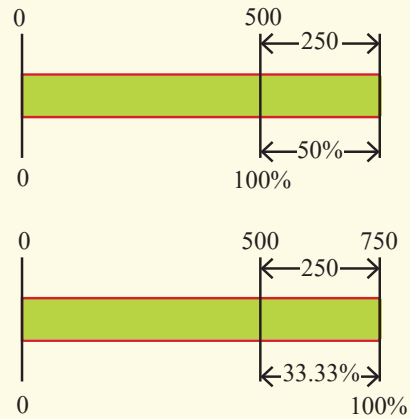
उसने अतिरिक्त व्यय (जैसे — परिवहन व्यय, कर्मचारियों का वेतन, बिजली का बिल इत्यादि) के रूप में ₹8000 व्यय किए। इस अतिरिक्त व्यय को घटाने के पश्चात जो धनराशि शेष रहती है, उसे **शुद्ध लाभ** कहा जाता है जो कि ₹32,000 – ₹8000 = ₹24,000 है।

टिप्पणी— इस अध्याय में लाभ शब्द से अर्थ सकल लाभ से है।

मनीषा उर्वरक विक्रय करती है। वह ₹500 प्रति बोरी की दर से 50 kg बोरियाँ क्रय करती है। वह इसे ₹750 प्रति बोरी की दर से विक्रय करके $\frac{250}{500} \times 100 = 50\%$ लाभ अर्जित करती है।

हालाँकि ₹750 प्रति बोरी बेचकर उसने जो लाभ अर्जित किया, उस संदर्भ में प्रतिशत लाभ $\frac{250}{750} \times 100 = 33.33\%$ है।

प्रतिशत लाभ की गणना का आधार वह मूल्य होता है जिस पर वस्तुएँ क्रय की गई थीं और यह तब प्रासंगिक होता है जब हम जानना चाहते हैं कि 'मैंने वस्तुओं को क्रय करने में जो निवेश किया था, उसकी तुलना में मैंने कितना लाभ अर्जित किया?'



लाभांतर की गणना विक्रय से प्राप्त अर्जित आय के आधार पर की जाती है जब हम जानना चाहते हों "कितना (शुद्ध) लाभ मैंने अपनी कुल अर्जित आय पर प्राप्त किया?"

मान लीजिए, एक माह में उसने ₹1,50,000 की बिक्री की। वस्तुओं का क्रय मूल्य ₹1,00,000 था। इस प्रकार सकल लाभ ₹50,000 है। प्रति माह का व्यय ₹5000 है। अत: शुद्ध लाभ ₹45,000 है। प्रति माह के अर्जित आय राजस्व (₹1,50,000) में से शुद्ध लाभ का प्रतिशत है—

$$\frac{45000}{150000} \times 100 = \frac{3}{10} \times 100 = 30\%$$

कर

कर की दर, जैसे जी.एस.टी. (वस्तु एवं सेवा कर) की दर या आय कर की दर भी प्रतिशत में ही निर्दिष्ट की जाती है। आपने ध्यान दिया होगा कि जी.एस.टी. का उल्लेख विभिन्न प्रकार के भुगतान या बिलों (Bills) पर होता है। इसका अर्थ है कि कर देय राशि का भाग है और यह धनराशि सरकार की निधि में संचित होती है।

XY इलेक्ट्रिकल्स
बिक्री रसीद

दिनांक:			08/07/2025
वस्तु	मात्रा	मूल्य	राशि
[illegible]	3	₹150.00	₹450.00
		Sub Total	₹450.00
		CGST 9%	₹40.50
		SGST 9%	₹40.50
कुल			₹531.00

धन्यवाद

? जाँच कीजिए कि बिल में दर्शाई गई गणना सही है या नहीं?

? आप अपने घर के किसी भी देय राशि के बिल को अपनी कक्षा के साथ साझा कर सकते हैं। देय राशि के बिलों में विभिन्न घटकों पर ध्यान दीजिए। क्या आपको बिलों में कोई समानता या विभिन्नता दिखाई देती है?

प्रयास कीजिए

? आइए, पता लगाएँ

1. एक दुकानदार ₹75 में एक ज्यामिति का बॉक्स (Geometry box) क्रय करता है और इसे ₹110 में विक्रय कर देता है। बताइए कि क्रय मूल्य के सापेक्ष उसका लाभ कितना है?
2. मैं एक बढ़ई हूँ और कुर्सियाँ बनाता हूँ। एक कुर्सी की निर्माण सामग्रियों का मूल्य ₹475 है और मैं इन कुर्सियों पर 50% लाभांतर चाहता हूँ। बताइए कि मुझे किस मूल्य पर एक कुर्सी का विक्रय करना चाहिए?
3. एक कंपनी की कुल बिक्री (जिसे राजस्व या कुल अर्जित आय भी कहा जाता है) गत वर्ष ₹2.5 करोड़ थी। उन्होंने 25% का अच्छा लाभ अर्जित किया था। बताइए कि गत वर्ष कंपनी का कुल व्यय (लागत) कितना था?
4. वस्त्रों की एक दुकान पर सभी शर्ट पर 25% की छूट है। यदि किसी शर्ट का वास्तविक मूल्य ₹300 है तो बताइए कि अनवर को इस शर्ट को खरीदने के लिए कितनी राशि देनी होगी?
5. पेट्रोल का मूल्य वर्ष 2015 में ₹60 था और वर्ष 2025 में यह मूल्य ₹100 था। बताइए कि पेट्रोल के मूल्य में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई?

   (i) 50% (ii) 40% (iii) 60%

   (iv) 66.66% (v) 140% (vi) 160.66%

© NCERT not to be republished

6. सैमसन ने किसी कार विक्रेता से 15% की छूट पर ₹4,40,000 में एक कार खरीदी। बताइए कि कार का वास्तविक मूल्य कितना था?
7. एक चुनाव में 1600 मतदाताओं ने मतदान किया। इस चुनाव में विजेता को 500 मत प्राप्त हुए। बताइए कि विजेता को कुल मतों के कितने प्रतिशत मत प्राप्त हुए? क्या आप चुनाव में सम्मिलित होने वाले उम्मीदवारों की न्यूनतम संख्या का अनुमान लगा सकते हैं?
8. वर्ष 2024 में 1 kg चावल का मूल्य ₹38 था। वर्ष 2025 में यह मूल्य ₹42 प्रति kg था। बताइए कि मुद्रास्फीति की दर क्या होगी? (मुद्रास्फीति मूल्य में प्रतिशत वृद्धि है)।
9. किसी संख्या में 20% की वृद्धि होने पर यह 90 हो जाती है। बताइए कि यह संख्या क्या होगी?
10. एक दूधवाले ने दो भैंसों में से प्रत्येक भैंस को ₹80,000 में बेचा। उनमें से एक भैंस पर उसने 5% लाभ और दूसरी पर 10% हानि अर्जित की। कुल लाभ या हानि ज्ञात कीजिए?
11. गत एक दशक में एक राष्ट्रीय उद्यान में हाथियों की संख्या में 5% की वृद्धि हुई। यदि गत दशक में हाथियों की संख्या p थी तो अब हाथियों की संख्या कितनी है?

    (i) $p \times 0.5$ (ii) $p \times 0.05$ (iii) $p \times 1.5$

    (iv) $p \times 1.05$ (v) $p + 1.50$
12. निम्नलिखित कथन (कथनों) में से कौन-सा कथन इस कथन के अनुरूप है— "विगत एक दशक की अवधि में कैमरों की माँग में 85% की कमी आई है?"

    (i) वर्तमान माँग गत दशक की माँग का 85% है।

    (ii) गत दशक की माँग वर्तमान माँग का 85% है।

    (iii) वर्तमान माँग गत एक दशक की माँग का 15% है।

    (iv) गत दशक की माँग वर्तमान की माँग का 15% है।

    (v) गत दशक की माँग वर्तमान माँग का 185% है।

    (vi) वर्तमान माँग गत दशक की माँग का 185% है।

वृद्धि और चक्रवृद्धि

संभवत: आपने ऐसे कथन सुने होंगे, जैसे— "बैंक में सावधि जमा (एफडी) के लिए वार्षिक ब्याज @ 6% वार्षिक" अथवा "@ 2.5% वार्षिक ब्याज के साथ बचत खाता"। **ब्याज** बैंक, डाक घर आदि संस्थानों द्वारा भुगतान की जाने वाली वह अतिरिक्त धनराशि है जो इन संस्थानों में जमा की गई धनराशि पर दी जाती है। जब व्यक्तियों या संस्थानों द्वारा ऋण लिया जाता है तो उस राशि पर भी ब्याज का भुगतान किया जाता है।

सावधि जमा में आप एक नियत धनराशि पूर्व निर्धारित ब्याज दर पर एक निश्चित अवधि के लिए जमा करते हैं। धनराशि चयनित अवधि के लिए संरक्षित हो जाती है और इस पर बैंक आपको ब्याज का भुगतान करता है। आप परिपक्वता तिथि से पूर्व, बिना शास्ति (Penalty) का भुगतान किए धनराशि का आहरण नहीं कर सकते हैं। परिपक्व होने की तिथि पर आप वास्तविक जमा और अर्जित ब्याज दोनों प्राप्त करते हैं।

© NCERT not to be republished

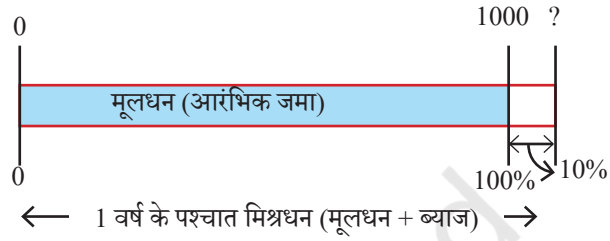
उदाहरण के लिए— कोई बैंक यह प्रस्तावित करता है कि सावधि जमा के लिए ब्याज दर 10% वार्षिक है। इस कथन से आप क्या समझते हैं? प्रतिशत के आगे 'वार्षिक' शब्द से क्या अर्थ है?

वार्षिक का अर्थ प्रति वर्ष होता है। निर्दिष्ट ब्याज दर यह इंगित करती है कि यदि आप बैंक में जमा के रूप में ₹6000 का निवेश करते हैं तो वे इस जमा पर ब्याज के रूप में ₹600 का भुगतान करेंगे। **ब्याज की दर** 10% है और ₹6000 जिस पर ब्याज की गणना की गई है, वह **मूलधन** है। 1 वर्ष के पश्चात आपके बैंक में जो धनराशि होगी

$$6000 + (0.10 \times 6000)$$

(मूलधन) + (मूलधन पर 10% ब्याज)

$$= 6000 + 600 = 6600$$



अन्य शब्दों में जमा की गई ₹6000 धनराशि 110% (10% की वृद्धि) हो जाएगी,

$$6000 \times 110\% = 6000 \times \frac{110}{100} = 6000 \times 1.1 = 6600$$

इसे इस प्रकार भी समझा जा सकता है—

1 वर्ष के पश्चात धनराशि (मिश्रधन) = मूलधन (p) + मूलधन पर ब्याज की दर (r)

उदाहरण 7— यदि कोई व्यक्ति बैंक में ₹6000 जमा करता है तो तीन वर्षों के पश्चात मिश्रधन कितना होगा?

यह सावधि जमा के चयन पर निर्भर करता है। यहाँ दो संभावनाएँ हैं—

1. विकल्प 1 — ब्याज का भुगतान नियमित स्तर पर किया जाता है (उदाहरण के लिए— प्रति वर्ष या वार्षिक)। मूलधन परिपक्वता अवधि के उपरांत वापस दिया जाता है।

		ब्याज का भुगतान (प्रतिवर्ष 10%)	सावधि जमा में मूलधन
वर्ष 1	प्रारंभ तिथि	× 0.10	₹6000
	अंत तिथि	₹600 का भुगतान	₹6000
वर्ष 2	प्रारंभ तिथि	× 0.10	₹6000
	अंत तिथि	₹600 का भुगतान	₹6000
वर्ष 3	प्रारंभ तिथि	× 0.10	₹6000
	अंत तिथि	₹600 का भुगतान	₹6000
कुल प्राप्त धनराशि		₹1800 + ₹6000 = ₹7800	

2. विकल्प 2 — मान लीजिए प्रत्येक अवधि (प्रत्येक वर्ष) में ब्याज की प्राप्ति के उपरांत यह सावधि जमा में जुड़ जाता है। इस प्रकार आगे आने वाली अवधि के लिए मूलधन

© NCERT not to be republished

की राशि में वृद्धि हो जाती है। परिपक्वता की अवधि के उपरांत संपूर्ण धनराशि अर्थात मिश्रधन (मूलधन + ब्याज) का भुगतान किया जाता है। यह अवधारणा **चक्रवृद्धि** कहलाती है।

		वापस जोड़ा गया ब्याज (प्रतिवर्ष 10%)	सावधि जमा में मूलधन
वर्ष 1	प्रारंभ तिथि		₹6000
	अंत तिथि	₹600 वापस जोड़े गए	₹6600
वर्ष 2	प्रारंभ तिथि		₹6600
	अंत तिथि	₹660 वापस जोड़े गए	₹7260
वर्ष 3	प्रारंभ तिथि		₹7260
	अंत तिथि	₹726	₹7986
		₹7986 का भुगतान	
कुल प्राप्त धनराशि		₹7986	

× 0.10 × 1.10 × 0.10 × 1.10 × 0.10 × 1.10

चक्रवृद्धि गणना में हम देखते हैं कि अंतिम राशि अर्थात मिश्रधन अधिक है।

उदाहरण 8— उपर्युक्त दोनों विकल्पों में जमा की गई धनराशि (मूलधन) के सापेक्ष कुल प्राप्त धनराशि (मिश्रधन) का प्रतिशत क्या है?

इसकी गणना $\dfrac{\textit{कुल प्राप्त धनराशि (मिश्रधन)}}{\textit{जमा की गई धनराशि (मूलधन)}} \times 100$ द्वारा की जा सकती है।

चक्रवृद्धि के बिना

$$\frac{7800}{6000} \times 100 = 130\% = 1.3$$

अन्य शब्दों में, कुल प्राप्त धनराशि =

$$6000 \times (1 + 0.1 + 0.1 + 0.1)$$

$$= 6000 \times 1.3$$

3 वर्षों की अवधि में लाभ प्रतिशत 30% है।

चक्रवृद्धि के साथ

$$\frac{7986}{6000} \times 100 = 133.1\% = 1.331$$

अन्य शब्दों में, कुल प्राप्त धनराशि

$$= 6000 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1$$

$$= 6000 \times 1.331$$

3 वर्षों की अवधि में लाभ प्रतिशत 33.1% है।

आइए, पता लगाएँ

1. याहापुर बैंक 10% वार्षिक ब्याज देने का ऑफर देता है। तुलना कीजिए कि यदि कोई व्यक्ति ₹20,000 की धनराशि 2 वर्षों के लिए जमा करता है तो वार्षिक साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में उसे कितनी धनराशि (मिश्रधन) प्राप्त होगी?
2. वाहापुर बैंक 5% वार्षिक ब्याज देने का ऑफर देता है। तुलना कीजिए कि यदि कोई व्यक्ति ₹20,000 की धनराशि 4 वर्षों के लिए जमा करता है तो वार्षिक साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में उसे कितनी धनराशि (मिश्रधन) प्राप्त होगी?

© NCERT not to be republished

3. क्या आपने उपर्युक्त दोनों प्रश्नों को हल करते समय कुछ रोचकता देखी? अपने विचार साझा कीजिए और उन पर चर्चा कीजिए।

आइए, प्रत्येक विकल्प में प्रेक्षित प्रतिरूप के व्यापकीकरण का प्रयास करें।

उदाहरण 9—बताइए कि हमें कितनी धनराशि प्राप्त होगी यदि हम ₹6000, 10% की वार्षिक ब्याज दर से 't' वर्षों के लिए निवेश करते हैं?

साधारण ब्याज की गणना (गणना चक्रवृद्धि ब्याज ना होने पर)

इस स्थिति में प्रत्येक अवधि में अर्जित ब्याज का भुगतान किया जाता है। इसलिए प्रत्येक अवधि के लिए मूलधन समान रहेगा और परिणामस्वरूप प्रत्येक अवधि में अर्जित ब्याज भी समान ही रहेगा।

1 अवधि में अर्जित ब्याज 6000×0.1

3 अवधि में प्राप्त ब्याज $6000 \times 0.1 \times 3$

3 वर्षों की सावधि जमा के लिए कुल धनराशि

$6000 + (6000 \times 0.1 \times 3)$ है।

इसी प्रकार t वर्षों की सावधि जमा के लिए कुल धनराशि

$6000 + (6000 \times 0.1 \times t)$ है।

1 अवधि में अर्जित ब्याज $p \times r$ है

(p मूलधन है, r प्रतिशत में ब्याज की दर है)

t वर्षों में अर्जित ब्याज

$p \times r \times t$ है।

t वर्षों की सावधि जमा के लिए कुल धनराशि

$p + (p \times r \times t) = p + prt$

$= p(1 + rt)$

चक्रवृद्धि ब्याज की गणना

इस स्थिति में प्रत्येक समयावधि या वर्ष में अर्जित ब्याज सावधि जमा में जोड़ दिया जाता है। इसलिए प्रत्येक समयावधि या वर्ष के पश्चात अंत में मूलधन में वृद्धि होती है। इसके परिणामस्वरूप प्रत्येक समयावधि में अर्जित ब्याज में भी समानुपातिक रूप से वृद्धि होती है।

1 वर्ष के पश्चात सावधि जमा में कुल धनराशि

$(6000) \times 1.1$ है।

(पहले वर्ष के लिए मूलधन)

2 वर्ष के पश्चात सावधि जमा में कुल धनराशि

$(6000 \times 1.1) \times 1.1$ है।

(दूसरे वर्ष के लिए मूलधन)

3 वर्ष के पश्चात सावधि जमा में कुल धनराशि

$(6000 \times 1.1 \times 1.1) \times 1.1$ है।

(तीसरे वर्ष के लिए मूलधन)

t वर्षों के पश्चात में सावधि जमा में कुल धनराशि

$6000 \times (1.1 \times 1.1 \times 1.1 \ldots \times 1.1)$

t बार

$6000 \times (1.1)^t$

1 वर्ष के पश्चात सावधि जमा में कुल धनराशि

$(p) \times (1 + r)$

(पहले वर्ष के लिए मूलधन)

2 वर्षों के पश्चात सावधि जमा में कुल धनराशि

$p \times (1 + r) \times (1 + r)$ है।

(दूसरे वर्षों के लिए मूलधन)

3 वर्षों के पश्चात सावधि जमा में कुल धनराशि

$p \times (1 + r) \times (1 + r) \times (1 + r)$ है।

(तीसरे वर्ष के लिए मूलधन)

t वर्षों के पश्चात सावधि जमा में कुल धनराशि

$p \times (1 + r) \times (1 + r) \times \ldots \times (1 + r)$

t बार

$p \times (1 + r)^t$

© NCERT not to be republished

? मान लीजिए हम परिपक्वता अवधि के अंत में अर्जित ब्याज को ज्ञात करने हेतु एक व्यंजक या सूत्र जानना चाहते हैं। बताइए कि उपर्युक्त दोनों विकल्पों में प्रत्येक के लिए क्या सूत्र होगा?

गणित चर्चा

? आइए, पता लगाएँ

1. जैस्मिन 'p' धनराशि 6% वार्षिक ब्याज दर से 4 वर्षों के लिए निवेश करती है। निम्नलिखित व्यंजक या व्यंजकों में से कौन-सा व्यंजक यह दर्शाता है कि 4 वर्षों के पश्चात जैस्मिन कुल कितनी धनराशि प्राप्त करेगी जबकि यहाँ चक्रवृद्धि ब्याज लागू नहीं हो रहा है?

   (i) $p \times 6 \times 4$ (ii) $p \times 0.6 \times 4$ (iii) $p \times \frac{0.6}{100} \times 4$

   (iv) $p \times \frac{0.06}{100} \times 4$ (v) $p \times 1.6 \times 4$ (vi) $p \times 1.06 \times 4$

   (vii) $p + (p \times 0.06 \times 4)$

2. एक डाकघर 7% प्रति वर्ष की दर से ब्याज प्रदान करने का ऑफर देता है। साधारण ब्याज की स्थिति में यदि कोई व्यक्ति 3 वर्षों के लिए ₹50,000 का निवेश करता है तो बताइए कि ब्याज के रूप में वह कितनी धनराशि प्राप्त करेगा? इसके साथ यह भी बताइए कि चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में उसे कितनी धनराशि प्राप्त होगी?

3. गिरिधर 12% वार्षिक ब्याज की दर से ₹12,500 साधारण ब्याज पर ऋण लेता है। जबकि राघव समान धनराशि समान वर्षों के लिए 10% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज के साथ ऋण लेता है। बताइए कि इन दोनों में से कौन अधिक ब्याज का भुगतान करेगा और इनके ब्याज का अंतर कितना होगा?

4. ₹1000 की धनराशि लेते हैं। यदि इसमें 10% की वार्षिक दर से वृद्धि होती है तो बताइए कि ब्याज चक्रवृद्धि होने एवं चक्रवृद्धि ना होने, दोनों स्थितियों में इसे दोगुना होने में कितना समय लगेगा? क्या चक्रवृद्धि ब्याज घातांकी वृद्धि का उदाहरण है? विचार कीजिए कि साधारण ब्याज रेखीय वृद्धि का उदाहरण है?

   गणित चर्चा

5. एक नगर की जनसंख्या में प्रति वर्ष 3% की वृद्धि हो रही है। यदि वर्तमान जनसंख्या 1.5 करोड़ है तो बताइए कि आगामी 3 वर्षों में अनुमानित जनसंख्या कितनी होगी?

6. एक प्रयोगशाला में किसी प्रयोग के समय जीवाणुओं की संख्या में 2.5% प्रति घंटे की दर से वृद्धि होती है। 2 घंटे में जीवाणुओं की संख्या में कितनी वृद्धि हुई यदि प्रारंभ में इसकी संख्या 5,06,000 थी।

अवमूल्यन अथवा मूल्य ह्रास

समय के साथ विभिन्न वस्तुओं और सामग्रियों का वित्तीय मूल्य कम हो जाता है। मान लीजिए आपके घर में कोई ₹1,00,000 में मोटरसाइकिल खरीदता है और कुछ वर्षों के पश्चात वह इसे विक्रय करना चाहता है। विक्रय के समय मोटरसाइकिल का मूल्य ₹1,00,000 से कम होगा। यह विभिन्न कारकों पर निर्भर करता है जिसमें मोटरसाइकिल को क्रय किए हुए कितने वर्ष हो चुके हैं, मोटरसाइकिल कितने किलोमीटर उपयोग में लाई गई है, यह क्षतिग्रस्त हुई है या नहीं अथवा इसके

© NCERT not to be republished

भागों को बदला गया है आदि सम्मिलित हैं। संक्षेप में इसे **मूल्य ह्रास** कहा जाता है, अर्थात वस्तु के प्रयोग और पुराने होने के कारण जो अवमूल्यन हुआ।

उदाहरण 10— एक टेलीविजन ₹21,000 के मूल्य पर क्रय किया गया था। 1 वर्ष के पश्चात इसके मूल्य में 5% की कमी होती है। 1 वर्ष के पश्चात टेलीविजन का मूल्य ज्ञात कीजिए।

मूल्य में कमी ₹21000 का 5% है
$= 0.05 \times 21{,}000 = 1050$
एक वर्ष पश्चात मूल्य
$21{,}000 - 1050 = 19{,}950$ है।

1 वर्ष पश्चात टेलीविजन का मूल्य वर्तमान मूल्य का 95% होगा
= 21,000 का 95% $= 0.95 \times 21{,}000$
$= 19{,}950$

1 वर्ष पश्चात टेलीविजन का मूल्य ₹19,950 होगा।

उदाहरण 11— एक गाँव की जनसंख्या में प्रति दशक 10% की कमी देखी गई। यदि वर्तमान जनसंख्या 1250 है, तो 3 दशकों के पश्चात अनुमानित जनसंख्या क्या होगी?

1 दशक के पश्चात जनसंख्या, वर्तमान जनसंख्या की 0.9 गुना होगी।
अत: 1 दशक के पश्चात जनसंख्या
1250×0.9 होगी।
2 दशकों के पश्चात
जनसंख्या $1250 \times 0.9 \times 0.9$ होगी।
3 दशकों के पश्चात जनसंख्या
$= 1250 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9$
$= 911.25$ होगी।

पहले दशक की अवधि में जनसंख्या ह्रास
$= 0.1 \times 1250 = 125$
1 दशक के पश्चात जनसंख्या
$= 1250 - 125 = 1125$
दूसरे दशक की अवधि में जनसंख्या ह्रास
$= 0.1 \times 1125 = 112.5 \cong 112$
2 दशकों के पश्चात जनसंख्या
$= 1125 - 112 = 1013$
तीसरे दशक की अवधि में जनसंख्या ह्रास
$= 0.1 \times 1013 = 101.3 \cong 101$
3 दशकों के पश्चात जनसंख्या
$= 1013 - 101 = 912$

सन्निकटन करने पर हम कह सकते हैं कि 3 दशकों के पश्चात अनुमानित जनसंख्या लगभग 910 के समान होगी।

युक्तिमय प्रतिशत

आप किसका चयन करेंगे?

आपने एक प्रतियोगिता जीती है। आयोजक आपको चयन करने हेतु दो विकल्प प्रस्तावित करते हैं—

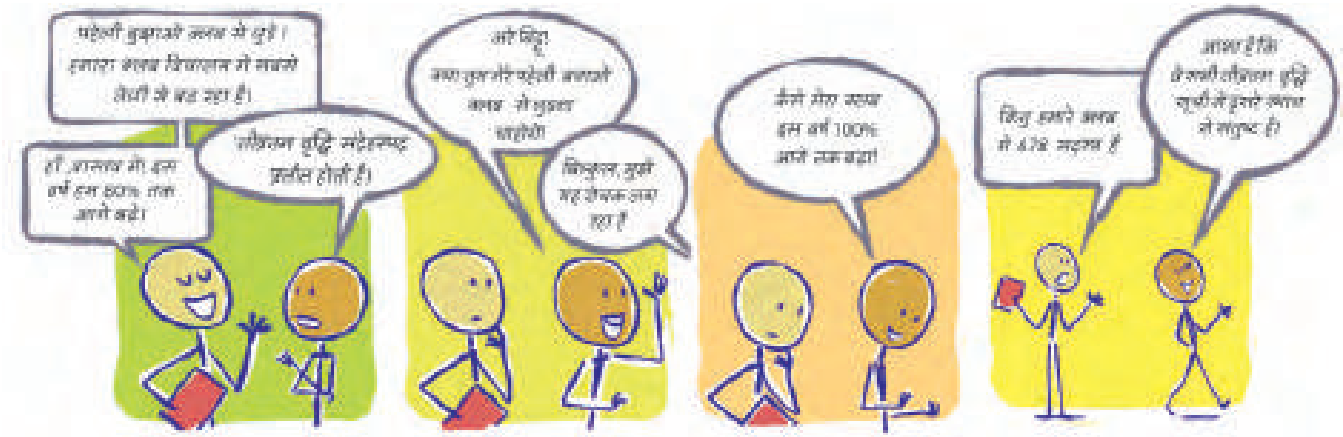
विकल्प A — आप ₹100 जमा करते हैं और ₹300 प्राप्त करते हैं।

विकल्प B — आप ₹1000 जमा करते हैं और ₹1500 प्राप्त करते हैं।

प्रत्येक विकल्प में कितने प्रतिशत लाभ प्राप्त होता है? आप किसी भी विकल्प का मात्र एक बार ही चयन कर सकते हैं। आप किस विकल्प का चयन करेंगे? क्यों?

गणित चर्चा

© NCERT not to be republished



प्रतिशत की तुलना करते समय हमें सतर्क रहना चाहिए क्योंकि हम भिन्नों और अनुपातों की तुलना कर रहे होते हैं न कि उनके निरपेक्ष मान की।

? एक किराना दुकान में बचे हुए माल की खपत हेतु बिक्री पर छूट चल रही है। इसके अंतर्गत ग्राहक ₹150 से अधिक की वस्तुएँ क्रय करने पर दो विकल्पों में से एक का चयन कर सकते हैं— 20% छूट या ₹50 की छूट यदि आप निम्नलिखित लाभ प्राप्त करना चाहते हैं तो आप किस विकल्प का चयन करेंगे?

(i) ₹180 मूल्य की वस्तुएँ खरीदते हैं।

(ii) ₹225 मूल्य की वस्तुएँ खरीदते हैं।

(iii) ₹300 मूल्य की वस्तुएँ खरीदते हैं।

? **उदाहरण 12**— केकली नामक एक बेकरी अपने सभी केक पर 30% + 20% की छूट दे रही है। केकिफाई नामक एक अन्य बेकरी अपने सभी केक पर 50% छूट का प्रस्ताव दे रही है। यदि आप कम मूल्य वाला केक क्रय करना चाहते हैं तो आप केकली या केकिफाई में से किसका चयन करना चाहेंगे?

ऐसा प्रतीत होता है कि दोनों विकल्प एक समान हैं और इनसे एक ही प्रकार का लाभ मिलना चाहिए। यद्यपि गणितीय रूप से 30% + 20% और 50% एक समान हैं, परंतु क्रय करने की स्थिति में 30% + 20% का अर्थ चक्रवृद्धि है। मान लीजिए आप ₹200 मूल्य का एक केक क्रय करना चाहते हैं।

केकली की 30% + 20% छूट →

30% छूट लागू करने पर→ केक का मूल्य ₹200 – ₹60 = ₹140 है।

₹140 पर 20% की छूट लागू करने पर केक का मूल्य

₹140 – ₹28 = ₹112 है।

केकिफाई की 50% छूट लागू करने पर केक का मूल्य ₹100 है।

© NCERT not to be republished

गणना दोष

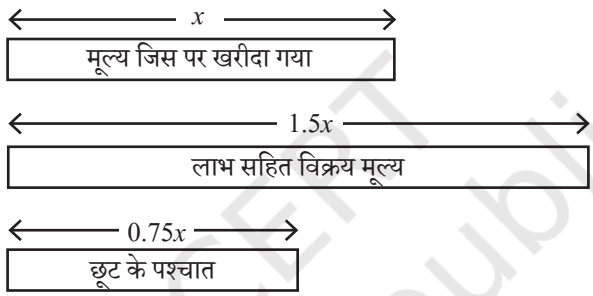
उदाहरण 13— सुरभि ने एक थोक विक्रेता से बर्तन क्रय करने के पश्चात सभी वस्तुओं पर अपना लाभ 50% निर्धारित किया। शेष भंडार को खाली करने के लिए उसने सोचा कि यदि वह 50% छूट का प्रस्ताव दे तो उसे किसी भी प्रकार की हानि नहीं होगी।

(i) क्या आपके विचार से सुरभि को किसी प्रकार की हानि नहीं होगी?

(ii) यदि सुरभि ने छूट के पश्चात ₹12,000 में वस्तुओं का विक्रय किया तो बताइए कि उसे कितनी हानि हुई? हानि का प्रतिशत क्या है?

(iii) सुरभि को कितने प्रतिशत की छूट प्रस्तावित करनी चाहिए थी ताकि वह वस्तुओं को उसी मूल्य पर विक्रय कर सके जिस मूल्य पर उसने वस्तुओं को क्रय किया था (अर्थात न कोई लाभ और न कोई हानि)।

आइए, पहले इस स्थिति का निदर्श तैयार करें।



मान लीजिए उसके द्वारा थोक विक्रेता से क्रय की गई वस्तुओं का मूल्य x है।

विक्रय मूल्य के संगत मूल्य (50% लाभांश के साथ) $1.5\,x$ है।

इस मूल्य पर 50% की छूट देने से इसका मूल्य $0.75\,x$ हो जाएगा।

(i) इसका अर्थ यह है कि विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य का $\frac{3}{4}$ है, अर्थात 25% की हानि।

(ii) यदि सुरभि ने ₹12,000 मूल्य की वस्तुएँ बेची थी

$$0.75x = 12{,}000$$

$$x = 16{,}000$$

अत: उसे ₹4000 की हानि हुई।

(iii) वस्तुओं को उसी मूल्य पर विक्रय करने के लिए दी जाने वाली छूट होनी चाहिए—

$$1.5x - d \times (1.5x) = x$$

$$d = \frac{1}{3} = 0.33$$

दी जाने वाली प्रस्तावित छूट 33.33% होनी चाहिए।

अरिबा और अरुण के पास कुछ कंचे हैं अरिबा कहती है— "मेरे पास कंचों की संख्या अरुण के कंचों की संख्या का 120% है।" अरिबा के कंचों की संख्या की तुलना में अरुण अपने कंचों की संख्या के विषय में क्या उचित कथन दे सकता है?

प्रयास कीजिए

© NCERT not to be republished

आइए, पता लगाएँ

1. वर्ष 2025 में बेंगलुरु की जनसंख्या, वर्ष 2000 की जनसंख्या का लगभग 250% है। यदि वर्ष 2000 में जनसंख्या 50 लाख थी तो बताइए वर्ष 2025 में जनसंख्या कितनी होगी?
2. वर्ष 2025 में विश्व की जनसंख्या 8.2 अरब (820 करोड़) है। वर्ष 2025 में विश्व के कुछ देशों की जनसंख्या निम्नलिखित है। उनका मिलान वैश्विक जनसंख्या में उनके अनुमानित प्रतिशत भाग से कीजिए। [**संकेत** — इन संख्याओं को इनके मानक रूप में लिखिए। इससे आकलन में सहायता प्राप्त हो सकती है।]

जर्मनी	भारत	बांग्लादेश	सं.रा.अमेरिका
83 मिलियन	146 बिलियन	175 मिलियन	347 मिलियन

13%	8%	18%	10%	1%	35%	2%	2%	0.1%

3. एक मोबाइल फोन का मूल्य ₹8,250 है। इसके मूल्य में 18% वस्तु एवं सेवा कर (जी.एस.टी.) जोड़ा गया है। निम्नलिखित में कौन-सा विकल्प वस्तु एवं सेवा कर सहित फोन का अंतिम मूल्य दर्शाता है?

   (i) $8250 + 18$ (ii) $8250 + 1800$

   (iii) $8250 + \frac{18}{100}$ (iv) 8250×18

   (v) 8250×1.18 (vi) $8250 + 8250 \times 0.18$

   (vii) 1.8×8250
4. एक प्रयोगशाला में चूहों की संख्या में मासिक प्रतिशत परिवर्तन (विगत माह की तुलना में) दिया गया है — प्रथम माह में परिवर्तन + 5% था, द्वितीय माह में परिवर्तन –2% था और तृतीय माह में परिवर्तन –3% था। निम्नलिखित में से कौन-सा (कौन-से) कथन सत्य है (हैं)? ध्यान दीजिए कि चूहों की प्रारंभिक संख्या p है।

   (i) तीन माह के पश्चात चूहों की संख्या $p \times 0.05 \times 0.02 \times 0.03$ थी।

   (ii) तीन माह के पश्चात चूहों की संख्या $p \times 1.05 \times 0.98 \times 0.97$ थी।

   (iii) तीन माह के पश्चात चूहों की संख्या $p + 0.05 - 0.02 - 0.03$ थी।

   (iv) तीन माह के पश्चात चूहों की संख्या p थी।

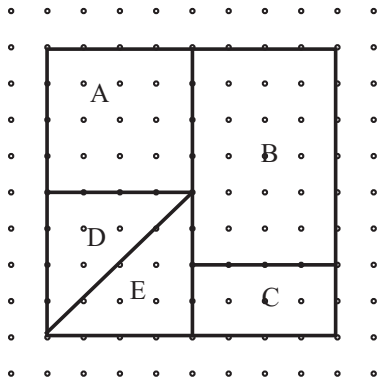
   (v) तीन माह के पश्चात चूहों की संख्या p से अधिक थी।

   (vi) तीन माह के पश्चात चूहों की संख्या p से कम थी।
5. एक दुकानदार ने किसी वस्तु का प्रारंभिक मूल्य 35% लाभांश के साथ निर्धारित किया। अत्यंत कम बिक्री होने के कारण दुकानदार ने विक्रय मूल्य पर 30% छूट देने का निर्णय लिया। बताइए कि वह लाभ अर्जित करेगा या हानि? अपने उत्तर के लिए तर्क दीजिए।
6. आगे दिए गए चित्र में 'E' से चिह्नित क्षेत्र कितने प्रतिशत क्षेत्रफल को घेरता है?
7. 40 का 5% कितना है? 5 का 40% कितना है? 12 का 25% कितना है? 25 का 12% कितना है?

© NCERT not to be republished

60 का 15% कितना है? 15 का 60% कितना है? आपने क्या अवलोकन किया?

क्या आप एक सामान्य कथन बना सकते हैं और उसे बीजगणित के प्रयोग से सिद्ध कर सकते हैं जहाँ y% के x और x% के y की तुलना की जाए।



8. एक विद्यालय अपने विद्यार्थियों के लिए भ्रमण यात्रा का आयोजन कर रहा है। इनमें से 40% विद्यार्थी कक्षा 8 के हैं और शेष विद्यार्थी कक्षा 9 के हैं। कक्षा 8 के इन विद्यार्थियों में 60% लड़कियाँ हैं [**संकेत** — कच्चा आरेख बनाना सहायक हो सकता है।]
   (i) भ्रमण यात्रा पर जा रहे विद्यार्थियों में कक्षा 8 की लड़कियों का प्रतिशत क्या है?
   (ii) यदि भ्रमण यात्रा पर जा रहे विद्यार्थियों की कुल संख्या 160 हो तो बताइए इनमें कक्षा 8 की लड़कियों की संख्या कितनी है?

प्रयास कीजिए

9. एक दुकानदार पेंसिलें इस मूल्य पर विक्रय करता है कि 3 पेंसिलों का विक्रय मूल्य 5 पेंसिलों के क्रय मूल्य के बराबर हो जाता है। वह लाभ अर्जित करता है या हानि? बताइए कि उसका लाभ या हानि प्रतिशत कितना है?
10. गत वर्ष बस के किराये में 3% की वृद्धि हुई थी और वर्तमान वर्ष में 4% की वृद्धि हुई। बताइए कि गत दो वर्षों की अवधि में किराये में कुल कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई?
11. यदि आयत की लंबाई में 10% की वृद्धि होती है और क्षेत्रफल अपरिवर्तित रहता है तो बताइए कि चौड़ाई में आई कमी का प्रतिशत कितना है?
12. चित्र में 65 g के चिप्स के पैकेट पर उत्पाद निर्माण सामग्रियों के प्रतिशत को दर्शाया गया है। इस पैकेट में प्रत्येक सामग्री का भार ज्ञात कीजिए?

13. तीन दुकानें समान वस्तुओं को समान मूल्य पर विक्रय करती हैं। दुकानदार निम्नलिखित प्रस्ताव देते हैं —

दुकान A — "1 क्रय कीजिए और 1 नि:शुल्क पाइए"

दुकान B — "2 क्रय कीजिए और 2 नि:शुल्क पाइए"

दुकान C — "3 क्रय कीजिए और 1 नि:शुल्क पाइए"

उपर्युक्त के आधार पर निम्नलिखित का उत्तर दीजिए—
   (i) यदि एक वस्तु का मूल्य ₹100 है तो प्रत्येक दुकान में प्रति वस्तु का प्रभावी मूल्य क्या होगा? दुकानों को उनके मूल्य के अनुसार (सस्ती से मँहगी) क्रम में व्यवस्थित कीजिए।
   (ii) प्रत्येक दुकान के लिए वस्तुओं पर प्रतिशत छूट की गणना कीजिए? [**संकेत** — नि:शुल्क वस्तुओं की तुलना आपको प्राप्त कुल वस्तुओं से कीजिए।]
   (iii) मान लीजिए आपको 4 वस्तुओं की आवश्यकता है। बताइए कि आप किस दुकान का चयन करेंगे? और क्यों?

© NCERT not to be republished

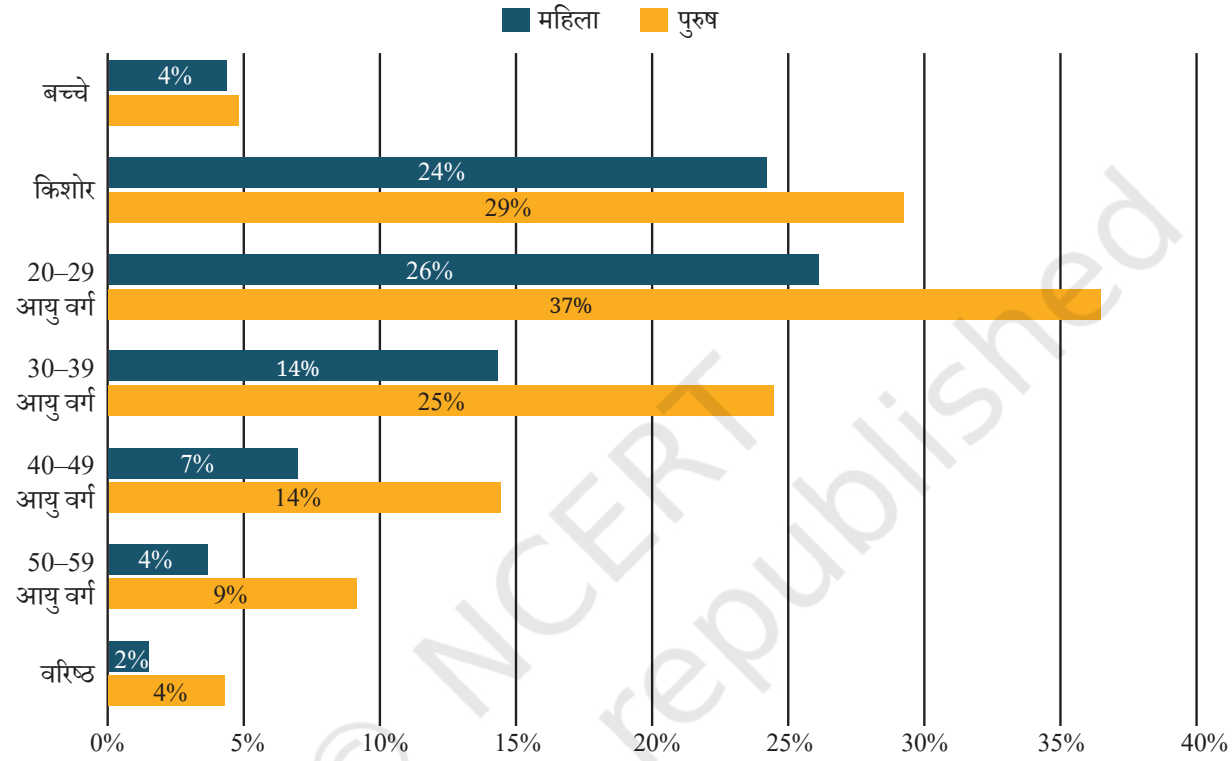
प्रयास कीजिए

14. 100 व्यक्तियों के कक्ष में 99% व्यक्ति बाएँ हाथ से कार्य करते हैं। बाएँ हाथ से कार्य करने वाले लोगों का प्रतिशत 98% तक लाने के लिए कितने व्यक्तियों को कक्ष से बाहर जाना होगा?

15. निम्नलिखित आलेख को देखिए।

लिंग एवं आयु के आधार पर संगणक को उपयोग करने की क्षमता (2023)

संगणक का उपयोग करने की क्षमता (20–29) की आयु वर्ग और किशोरों में सबसे अधिक होती है।



एन.एस.एस. (रा.प्रति.सर्वे.) 79वाँ चक्र, व्यापक वार्षिक मॉड्यूलर सर्वेक्षण, राष्ट्रीय सांख्यिकी कार्यालय

Data For India

बताइए कि आलेख के आधार पर निम्नलिखित में से कौन-सा या कौन-से कथन वैध हैं?

(i) सभी आयु वर्गों में 20–29 आयु वर्ग के लोग सर्वाधिक संगणक (computer) साक्षर हैं।

(ii) सभी आयु वर्गों में महिलाएँ संगणक की उपयोग की क्षमता में पिछड़ी हुई हैं।

(iii) किशोरों की अपेक्षा 20–29 आयु वर्ग के व्यक्ति अधिक हैं।

(iv) 30–39 आयु वर्ग के व्यक्तियों के एक चौथाई से अधिक व्यक्ति संगणक साक्षर हैं।

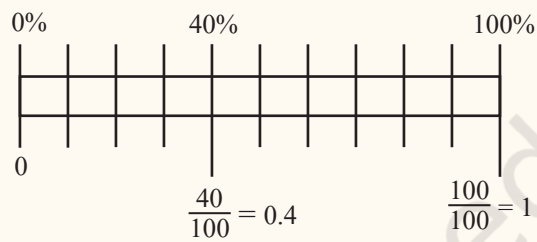
(v) 60 वर्ष और उससे अधिक आयु के 10 में से 1 से भी कम व्यक्ति संगणक का प्रयोग कर सकते हैं।

(vi) 20–29 आयु वर्ग के व्यक्तियों में से आधे लोग संगणक का प्रयोग कर सकते हैं।

© NCERT not to be republished

सारांश

- प्रतिशत का प्रयोग हमारे दैनिक जीवन में व्यापक रूप से होता है।
- प्रतिशत ऐसी भिन्नें हैं जिनके हर में 100 होता है। प्रतिशत को '%' चिह्न द्वारा दर्शाया जाता है, इसका उच्चारण 'प्रतिशत' के रूप में किया जाता है। $x\% = \frac{x}{100}$
- भिन्नों को प्रतिशत में परिवर्तित किया जा सकता है और इसके विपरीत प्रतिशतों को भी भिन्नों में परिवर्तित किया जा सकता है। दशमलव को भी प्रतिशतों में और प्रतिशतों को भी दशमलवों में परिवर्तित किया जा सकता है। उदहारण स्वरुप, $\frac{4}{10} = 0.4 = 40\%$



- हम सीख चुके हैं की जब कुल मात्रा का एक निश्चित प्रतिशत दिया गया हो तो सटीक संख्या किस प्रकार ज्ञात करते हैं।
- यदि एक राशि के कुछ भाग हमें अनुपात के रूप में दिए गए हों तो हमने देखा है कि उन्हें प्रतिशत में किस प्रकार परिवर्तित करना है।
- किसी नियत राशि में वृद्धि या ह्रास को भी प्रतिशत में व्यक्त किया जा सकता है।
- कर की दर और अंतरण में हुए लाभ और हानि को प्रतिशत के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।
- हमने देखा कि चक्रवृद्धि ब्याज से किसी राशि या संख्या में किस प्रकार वृद्धि होती है। यदि p मूलधन है, r ब्याज की दर है और t वर्षों की संख्या है तब परिपक्वता अवधि के पश्चात कुल धनराशि (मिश्रधन) है—

साधारण ब्याज के साथ, $p\,(1 + rt)$ p संपूर्ण अवधि के लिए मूलधन बना रहता है।	चक्रवृद्धि ब्याज के साथ, $p \times (1 + r) \times (1 + r) \times \cdots \times (1 + r) = p\,(1 + r)^t$

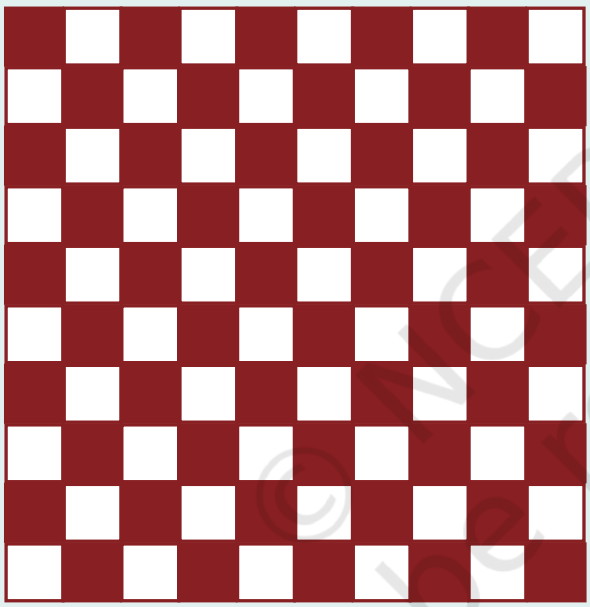
- किसी स्थिति या समस्या को सामान्यत: एक कच्चे आरेख का उपयोग करते हुए समझाकर हल किया जा सकता है। हमने प्रतिशत से संबंधित प्रश्नों को हल करने के लिए मानसिक रूप से गणना और आकलन करना सीखा है।

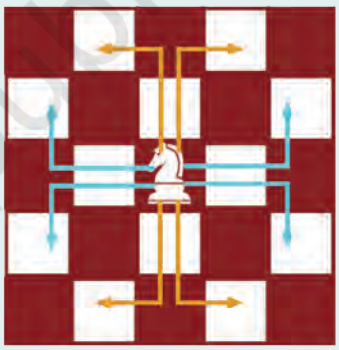
© NCERT not to be republished

पहेली का समय!

शांतिप्रिय घोड़े (Peaceful Knights)

शतरंज के बोर्ड पर 8 घोड़ों को इस प्रकार रखिए कि कोई भी घोड़ा दूसरे पर आक्रमण न करे। एक घोड़ा L- आकार में गतिमान होता है। यह या तो (क) लंबवत रूप से दो कदम और क्षैतिज रूप से एक कदम चल सकता है या (ख) क्षैतिज रूप से दो कदम और लंबवत एक कदम चल सकता है। घोड़े की संभावित चालें नीचे दर्शाई गई हैं।





© NCERT not to be republished