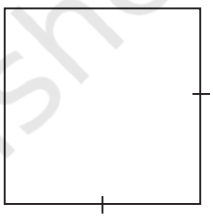
2 बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय

0890CH02

2.1 वर्ग को दोगुना करना

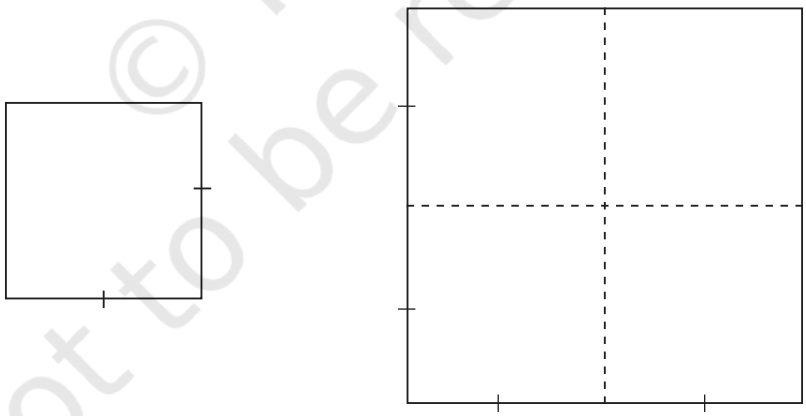
बौधायन ने अपनी रचना *शुल्बसूत्र* (लगभग 800 सामान्य संवत पूर्व) में निम्नलिखित प्रश्न पर विचार किया—



? किसी दिए गए वर्ग के क्षेत्रफल के दोगुना क्षेत्रफल वाले वर्ग की रचना किस प्रकार की जा सकती है?

पहला अनुमान यह हो सकता है कि वर्ग की प्रत्येक भुजा को दोगुना कर दिया जाए लेकिन क्या इस नए वर्ग का क्षेत्रफल मूल वर्ग के क्षेत्रफल का दोगुना होगा?

यह सरलता से देखा जा सकता है कि नए वर्ग का क्षेत्रफल मूल वर्ग के क्षेत्रफल का $2 \times 2 = 4$ गुना होगा।

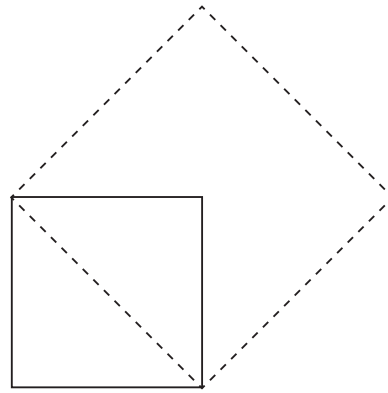


तब हम एक दोगुना क्षेत्रफल वाले वर्ग को किस प्रकार बना सकते हैं? बौधायन ने अपने *शुल्बसूत्र* (श्लोक 1.9) में इस प्रश्न का सहज उत्तर दिया—

> किसी वर्ग का विकर्ण एक ऐसे वर्ग का निर्माण करता है जोकि मूल वर्ग के क्षेत्रफल का दोगुना होता है।

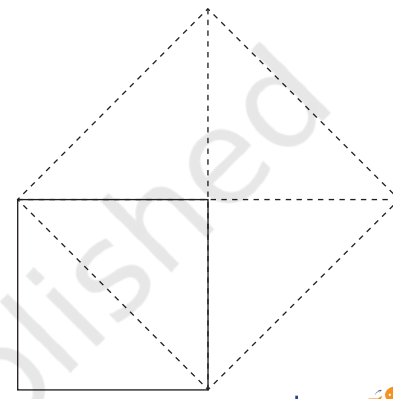
बौधायन के अनुसार मूल वर्ग के विकर्ण को भुजा मानकर एक नए वर्ग को बनाना एक मुख्य समाधान है।

© NCERT not to be republished



? नए बिंदुकित वर्ग का क्षेत्रफल, मूल वर्ग के क्षेत्रफल से दोगुना क्यों है?

शुल्बसूत्र में वर्णित अनेक रचनाओं में आवश्यकतानुसार क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाओं का निर्माण करना वांछनीय है। बौधायन ने इन रेखाओं को 'पूर्व-पश्चिम' और 'उत्तर-दक्षिण' रेखाएँ कहा है, जो कि एक-दूसरे के लंबवत हैं। नए वर्ग का क्षेत्रफल मूल वर्ग के क्षेत्रफल का दोगुना क्यों है, यह देखने के लिए क्या आप कुछ क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाएँ बना सकते हैं? दाहिनी ओर बने चित्र के अनुसार आप कुछ क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर रेखाएँ बना सकते हैं।



गणित चर्चा

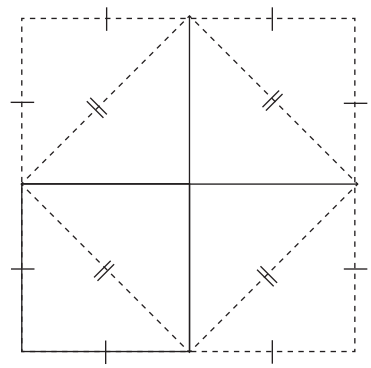
? मूल वर्ग की ऊर्ध्वाधर एवं क्षैतिज रेखाओं का विस्तार करने पर वे बिंदुकित वर्ग के शीर्षों से होकर क्यों जाती हैं?

[**संकेत**— वर्ग के विकर्ण गुणधर्म के अनुसार किसी कोण को समद्विभाजित करने वाली रेखा सम्मुख, शीर्ष से होकर जाती है। मूल वर्ग की क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर भुजाएँ बिंदुकित वर्ग के दो कोणों को समद्विभाजित क्यों करती हैं? तर्क दीजिए]

अत: नए वर्ग का क्षेत्रफल मूल वर्ग के क्षेत्रफल का दोगुना इसलिए होता है क्योंकि मूल वर्ग दो छोटे त्रिभुजों से निर्मित है जबकि नया वर्ग चार छोटे त्रिभुजों से निर्मित है।

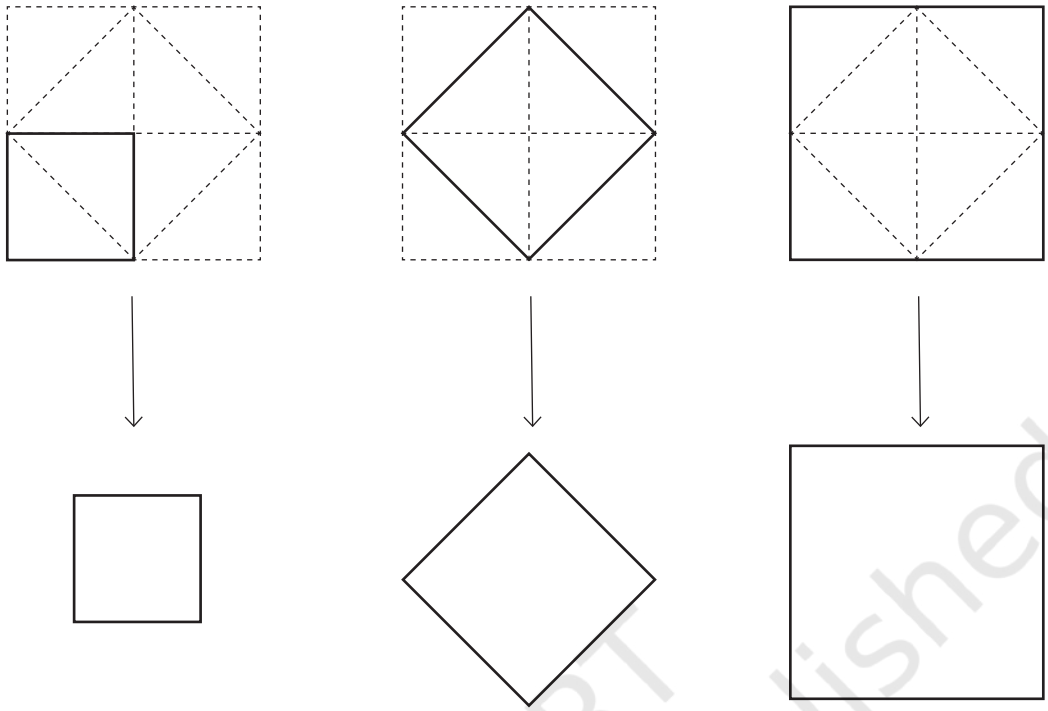
? इसके अतिरिक्त ये सभी छोटे त्रिभुज एक दूसरे के सर्वांगसम हैं। क्या आप इसकी व्याख्या कर सकते हैं कि ऐसा क्यों है?

कुछ और क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर रेखाओं को जोड़ने से स्थिति और भी स्पष्ट हो जाएगी—



© NCERT not to be republished

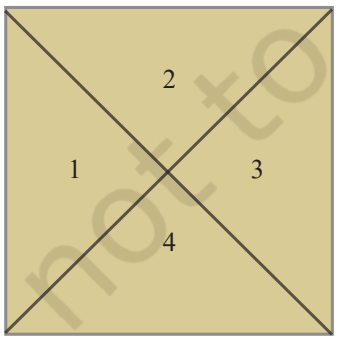
अत: हम वर्गों का निम्नलिखित अनुक्रम बना सकते हैं—



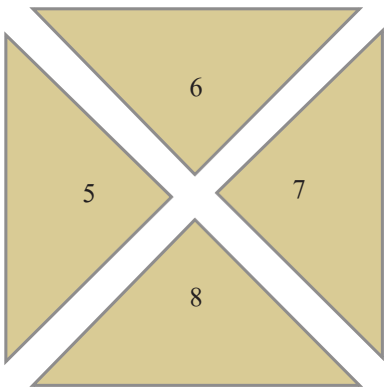
चित्र में प्रत्येक वर्ग का क्षेत्रफल उससे पहले आए वर्ग के क्षेत्रफल का दोगुना है क्योंकि वे क्रमश: 2, 4 और 8 छोटे त्रिभुजों से निर्मित हैं।

कागज के उपयोग से वर्ग को दोगुना करना

? किसी कागज को दो समान वर्गों के रूप में काटिए। इसके पश्चात नीचे दर्शाए गए चित्र के अनुसार उन पर रेखाएँ बनाइए, नाम लिखिए तथा उन्हें काटिए—



वर्ग 1

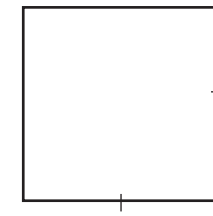


एक समान वर्ग 2

अब वर्ग 1 के चारों ओर कागज के टुकड़े 5, 6, 7 व 8 को इस प्रकार रखिए कि आपको दोगुना क्षेत्रफल वाला वर्ग प्राप्त हो जाए।

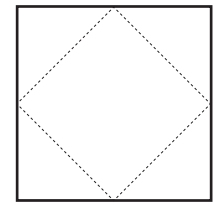
© NCERT not to be republished

2.2 वर्ग को आधा करना

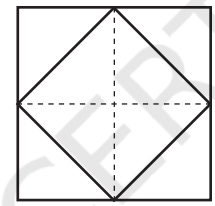


? मान लीजिए हमारे पास एक वर्ग है और हम एक ऐसा वर्ग बनाना चाहते हैं जिसका क्षेत्रफल मूल वर्ग के क्षेत्रफल का आधा हो। आप इसे किस प्रकार बनाएँगे?

इसे बनाने की एक विधि पिछले भाग की रचना को उलट देना है। हम बड़े वर्ग के भीतर एक झुका हुआ छोटा वर्ग बनाते हैं, जैसे—



? भीतर वाले छोटे वर्ग का क्षेत्रफल बड़े वाले वर्ग के क्षेत्रफल का आधा क्यों है? इसमें हम कुछ पूर्व-पश्चिम और उत्तर-दक्षिण रेखाओं को जोड़कर इसकी व्याख्या कर सकते हैं—

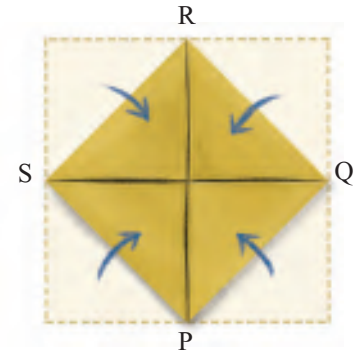


कागज के उपयोग से वर्ग को आधा करना

? कागज के एक टुकड़े से एक वर्ग काटिए। अब एक ऐसा वर्ग बनाइए जिसका क्षेत्रफल पहले वर्ग के क्षेत्रफल का आधा हो।

? क्या ऐसे वर्ग का क्षेत्रफल, मूल वर्ग के क्षेत्रफल का आधा होगा जिसकी भुजाओं की लंबाई मूल वर्ग की भुजाओं की लंबाई की आधी हो? यदि नहीं, तो क्यों नहीं? ऐसे कितने वर्ग मिलकर मूल वर्ग को पूरा करेंगे?

एक कागज के वर्ग को अंदर की ओर इस तरह मोड़िए (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है) कि मोड़ की रेखाएँ भुजाओं के मध्य बिंदुओं से होकर निकले तब PQRS आधे क्षेत्रफल का अभीष्ट वर्ग होगा।



© NCERT not to be republished

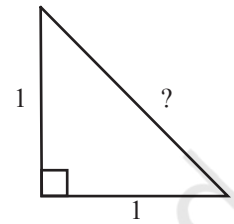
? PQRS एक वर्ग क्यों है? इसका क्षेत्रफल मूल वर्ग के क्षेत्रफल का आधा क्यों है?

QS और PR को मिलाकर, विभिन्न बने हुए कोणों को ज्ञात कीजिए। इसके पश्चात त्रिभुज सर्वांगसमता का उपयोग करके इसकी व्याख्या कीजिए।

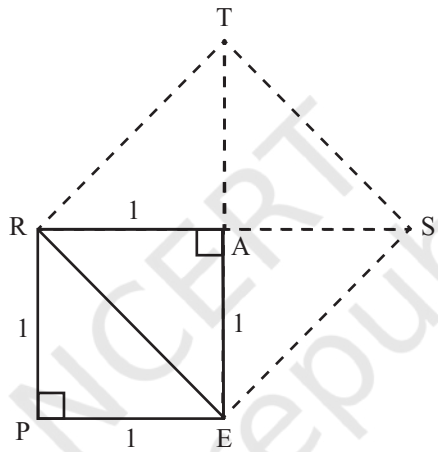
2.3 समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का कर्ण

स्मरण कीजिए, किसी समकोण त्रिभुज में समकोण की सम्मुख भुजा को **कर्ण** कहा जाता है।

? चित्र में दर्शाए गए समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का कर्ण ज्ञात कीजिए।



हम जानते हैं कि 1 इकाई भुजा वाला वर्ग ऐसे दो समद्विबाहु समकोण त्रिभुजों से मिलकर बनता है। हमें यह भी ज्ञात है कि इस वर्ग के कर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल मूल वर्ग के क्षेत्रफल का दोगुना होता है।



हमें अभी तक कर्ण की लंबाई ज्ञात नहीं है परंतु इस कर्ण पर बने वर्ग REST का क्षेत्रफल ज्ञात है।

REST का क्षेत्रफल = 2 × PEAR का क्षेत्रफल

= 2 × 1 = 2 वर्ग इकाई

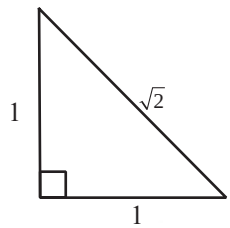
एक वर्ग की भुजा और उसके क्षेत्रफल के बीच के संबंध को हम जानते हैं। यदि कर्ण ER का मान c है तब

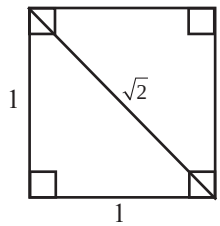
REST का क्षेत्रफल $= c \times c = c^2$

इसलिए $c^2 = 2$

अतः $c = \sqrt{2}$

इस प्रकार कर्ण की लंबाई $\sqrt{2}$ इकाई होगी।





© NCERT not to be republished

इस अध्याय के शेष भाग में जब तक कि अन्यथा निर्दिष्ट न हो हम मानेंगे कि सभी लंबाइयाँ एक नियत इकाई में हैं।

? $\sqrt{2}$ का मान क्या है?

$\sqrt{2}$ का दशमलव निरूपण

$\sqrt{2}$ का दशमलव निरूपण निम्नलिखित तर्क से ज्ञात किया जा सकता है।

? क्या $\sqrt{2}$, 1 से छोटा है या बड़ा है?

1 इकाई भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाई होता है। $\sqrt{2}$ इकाई भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल 2 वर्ग इकाई होता है। अतः 1, $\sqrt{2}$ से छोटा है।

अन्य शब्दों में $1^2 = 1$ तथा $\sqrt{2}^2 = 2$

इसलिए $1 < \sqrt{2}$

क्या $\sqrt{2}$, 2 से छोटा है या बड़ा है?

? 2 इकाई भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई होता है। तथा $\sqrt{2}$ इकाई भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल 2 वर्ग इकाई होता है। अतः 2, $\sqrt{2}$ से बड़ा है।

अन्य शब्दों में $\sqrt{2}^2 = 2$ तथा $2^2 = 4$ है।

इसलिए $\sqrt{2} < 2$

अतः $1 < \sqrt{2} < 2$

हम कह सकते हैं कि 1, $\sqrt{2}$ का निम्न परिबंध (Lower bound) तथा 2, $\sqrt{2}$ का उपरि परिबंध (upper bound) है।

? क्या हम $\sqrt{2}$ के निकटतम परिबंध ज्ञात कर सकते हैं?

$1.1^2 = 1.21$
$1.2^2 = 1.44$
$1.3^2 = 1.69$
$1.4^2 = 1.96$
$1.5^2 = 2.25$
अतः $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$

$1.41^2 = 1.9881$
$1.42^2 = 2.0164$
अतः $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$

$1.411^2 = 1.990921$
$1.412^2 = 1.993744$
$1.413^2 = 1.996569$
$1.414^2 = 1.999396$
$1.415^2 = 2.002225$
अतः $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$

? क्या हम कभी सांत (terminating) दशमलव निरूपण के साथ कोई ऐसी संख्या प्राप्त कर सकेंगे जिसका वर्ग 2 हो?

यदि 1.414... से आरंभ होने वाली ऐसी कोई संख्या सांत दशमलव संख्या है, जिसका वर्ग 2 हो तब उसका अंतिम अंक अवश्य ही शून्यरहित होगा। यदि ऐसा है तब इसके वर्ग के दशमलव निरूपण में भी, दशमलव बिंदु के पश्चात अंतिम अंक शून्यरहित होगा। उदाहरणस्वरूप यदि $\sqrt{2}$ का रूप 1.414....4 हो तब इसमें वर्ग का रूप निम्न प्रकार से होगा—

$$\square \cdot \square \ \square \cdots \square \ 6$$

© NCERT not to be republished

अत: एक सांत दशमलव संख्या का वर्ग 2 या 2.000... नहीं हो सकता है।

इस प्रकार $\sqrt{2}$ का दशमलव प्रसार सदैव चलता जाएगा अर्थात इसका दशमलव निरूपण असांत (non-terminating) होगा।

प्रयास कीजिए

? क्या $\sqrt{2}$ को भिन्न $\frac{m}{n}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जहाँ m और n गणन संख्याएँ हैं?

यदि $\sqrt{2}$ एक भिन्न $\frac{m}{n}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके तो हमें प्राप्त होगा—

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$2n^2 = m^2$$

स्मरण कीजिए कि किसी वर्ग संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में प्रत्येक अभाज्य संख्या किसी सम संख्या जितनी बार आती है। अत: समीकरण $2n^2 = m^2$ में अभाज्य संख्या 2, बाईं ओर किसी विषम संख्या जितनी बार और दाईं ओर किसी सम संख्या जितनी बार आएगी। जो कि असंभव है। अत: $\sqrt{2}$ को भिन्न $\frac{m}{n}$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है।

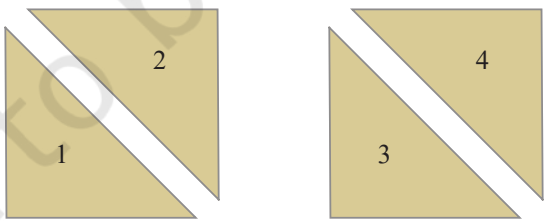
युक्लिड ने अपनी पुस्तक *एलिमेंट्स* (लगभग 300 सामान्य संवत् पूर्व) में यह प्रमाण दिया कि $\sqrt{2}$ को $\frac{m}{n}$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है, जहाँ m और n गुणन संख्याएँ हैं। इस विषय पर हम अगली कक्षा में विस्तार से चर्चा करेंगे।

इस प्रकार संख्या $\sqrt{2}$ को सांत दशमलव या भिन्न के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। परंतु हम इसे एक निश्चित असांत दशमलव के रूप में मान सकते हैं, जैसे — $\sqrt{2} = 1.41421356.....$

? आइए, पता लगाएँ

गणित चर्चा

1. प्रारंभ में हमने एक वर्गाकार कागज से दोगुना क्षेत्रफल वाला वर्ग बनाने की विधि देखी थी। इसे बनाने की एक अन्य विधि भी है जिसमें दो समान वर्गाकार कागजों को निम्नांकित विधि से काटा जाता है।



क्या आप इन टुकड़ों को व्यवस्थित करके ऐसा वर्ग बना सकते हैं जिसका क्षेत्रफल इनमें से किसी भी वर्ग के क्षेत्रफल का दोगुना हो?

2. एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की दो समान भुजाओं की लंबाई दी गई है। कर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए। इसके कर्ण के परिबंध इस तरह ज्ञात कीजिए, जिनमें दशमलव बिंदु के पश्चात कम-से-कम एक अंक हो।

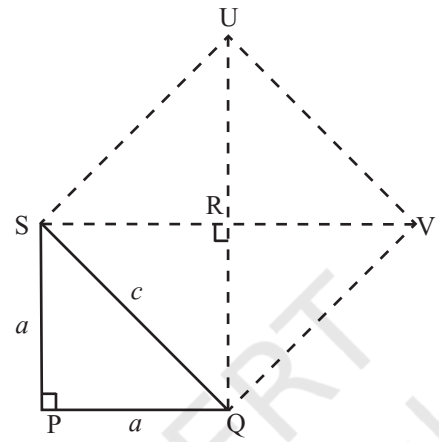
(i) 3 (ii) 4 (iii) 6 (iv) 8 (v) 9

© NCERT not to be republished

3. किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज में कर्ण की लंबाई 10 है। इसकी अन्य दो भुजाओं की लंबाई क्या होगी? [**संकेत**— इस प्रकार के दो समकोण त्रिभुजों को मिलाकर बनने वाले वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।]

व्यापक हल

किसी वर्ग के क्षेत्रफल और उसके विकर्ण पर बने वर्ग के क्षेत्रफल के बीच के संबंध का उपयोग किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के कर्ण और अन्य दो भुजाओं के बीच व्यापक संबंध को ज्ञात करने में किया जा सकता है।



माना दो समान भुजाओं की लंबाई a तथा कर्ण की लंबाई c है।

SQVU का क्षेत्रफल = 2 × PQRS का क्षेत्रफल

इसलिए $c^2 = 2a^2$

तो इस सूत्र के प्रयोग से a ज्ञात होने पर c ज्ञात किया जा सकता है और c ज्ञात होने पर a ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 1— किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का कर्ण ज्ञात कीजिए जिसकी समान भुजाओं की लंबाई 12 इकाई हो।

हमारे पास $a = 12$ इकाई है। सूत्र के प्रयोग से हमें प्राप्त होता है—

$$c = \sqrt{2 \times 12^2} = \sqrt{288}$$

हम जानते हैं कि $16^2 = 256$ और $17^2 = 289$ है।

इसलिए $\sqrt{288}$ का मान 16 और 17 के बीच होगा।

उस समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के कर्ण की लंबाई 16 और 17 इकाई के बीच होगी। जिसकी समान भुजाओं की लंबाई 12 इकाई है।

उदाहरण 2— यदि एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का कर्ण $\sqrt{72}$ है, तो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

दिया है $c = \sqrt{72}$ है। सूत्र का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$c^2 = 2a^2$$

© NCERT not to be republished

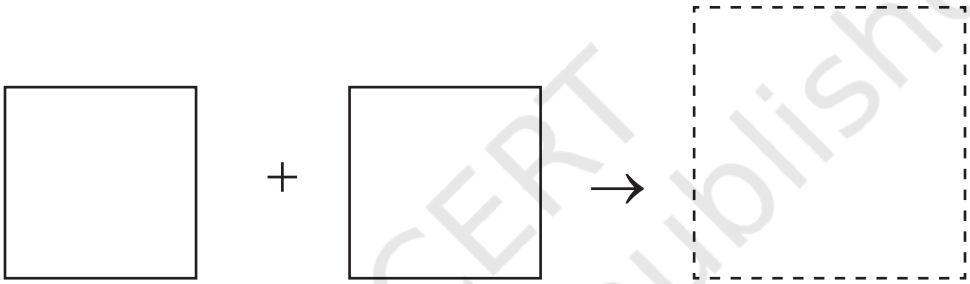
$$\text{अतः } (\sqrt{72})^2 = 2a^2$$
$$72 = 2a^2$$
$$\text{इस प्रकार } a^2 = \frac{72}{2} = 36$$
$$\text{अतः } a = \sqrt{36} = 6$$

अतः अन्य दोनों भुजाओं में प्रत्येक की लंबाई 6 इकाई होगी।

पृष्ठ 39 पर दिए गए अनुभाग 'आइए, पता लगाएँ' में दिए गए प्रश्नों के उत्तरों की जाँच करने के लिए इस सूत्र का प्रयोग कीजिए।

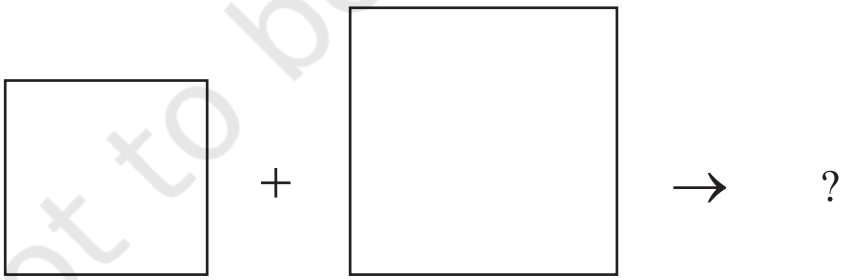
2.4 दो विभिन्न वर्गों को जोड़ना

हमने पिछले अनुभागों में देखा कि एक ही वर्ग की दो प्रतियों को मिलाकर एक बड़ा वर्ग किस प्रकार बनाया जाता है जिसका क्षेत्रफल दोनों छोटे वर्गों के क्षेत्रफलों का योगफल होता है।



बड़े वर्ग की भुजा की लंबाई, दोनों छोटे वर्गों में से किसी एक वर्ग के विकर्ण की लंबाई के बराबर होती है।

? क्या होगा यदि हम 'विभिन्न' आकार के दो वर्गों को जोड़कर एक ऐसा बड़ा वर्ग बनाएँ जिसका क्षेत्रफल दोनों छोटे वर्गों के क्षेत्रफल का योगफल हो?

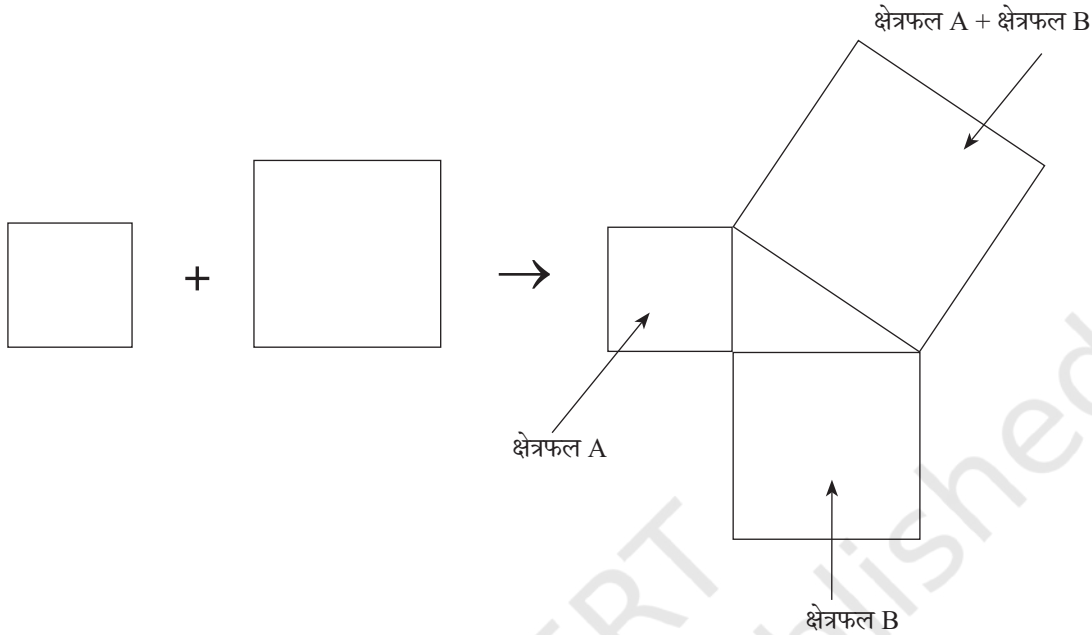


दो विभिन्न आकार के वर्गों को संयोजित करने की समस्या को हल करने के लिए बौधायन ने अपनी रचना *शुल्बसूत्र* (श्लोक 1.12) में एक उल्लेखनीय समाधान दिया है। उन्होंने लिखा है कि—

> विकर्ण से बने किसी वर्ग का क्षेत्रफल, इसकी दो भुजाओं से बने वर्गों के क्षेत्रफलों के योगफल के बराबर होता है।

© NCERT not to be republished

इसका अर्थ है कि दो भिन्न वर्गों को जोड़ने के लिए एक समकोण त्रिभुज बनाइए जिसकी लंबवत भुजाएँ उन दोनों वर्गों की भुजाओं के बराबर हों। जिस वर्ग की भुजा इस समकोण त्रिभुज का कर्ण होगी उसका क्षेत्रफल मूल दोनों वर्गों के क्षेत्रफल के योग के बराबर होगा।



? बौधायन की विधि कार्य क्यों करती है?

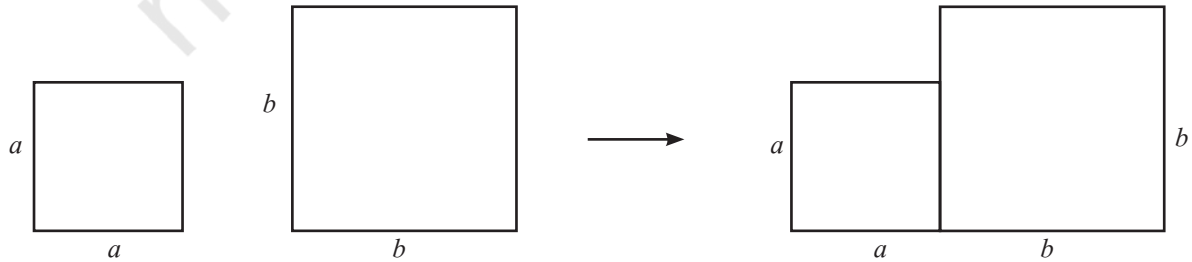
? क्या आप समझ सकते हैं कि जब दोनों वर्ग समान आकार के हों तब यह विधि किस प्रकार कार्य करती है? क्या यह विधि उस विधि के समान ही है जिसका उपयोग हमने पूर्व में दो समान आकार के वर्गों को मिलाकर एक बड़ा वर्ग बनाने के लिए किया था?

बौधायन ने आगे चलकर अपने ग्रंथ *शुल्बसूत्र* (श्लोक 2.1) में एक अन्य श्लोक दिया जिसने यह समझाने में सहायता की कि व्यापक रूप से यह विधि कार्य क्यों करती है—

> विभिन्न वर्गों को जोड़ने के लिए छोटे वर्ग की एक भुजा का उपयोग करके बड़े वर्ग का एक आयताकार भाग चिह्नित कीजिए। इस आयत का विकर्ण उस वर्ग की भुजा होगी जिसका क्षेत्रफल दोनों छोटे वर्गों के क्षेत्रफलों के योग फल के बराबर है।

आइए, हम बौधायन के निर्देशों का पालन करें।

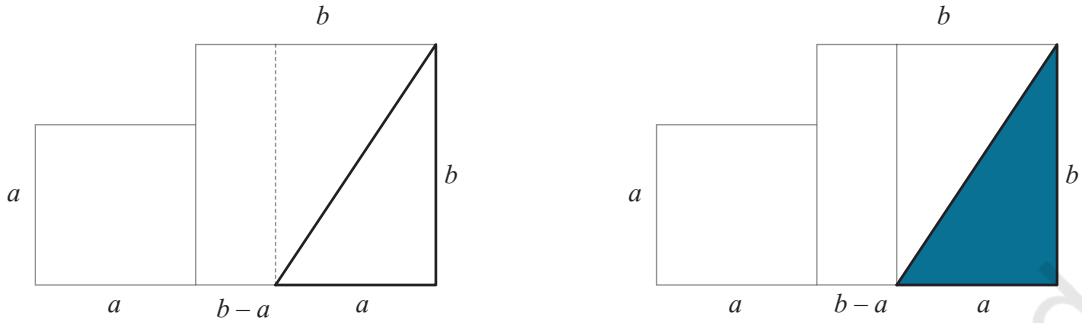
- दोनों वर्गों को मिलाइए।



© NCERT not to be republished

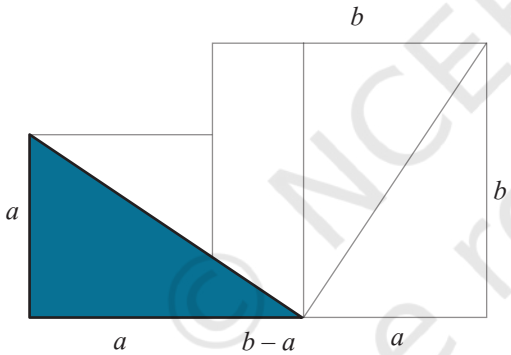
- छोटे वर्ग की एक भुजा का उपयोग करते हुए बड़े वर्ग का एक आयताकार भाग चिह्नित कीजिए और इसका विकर्ण बनाइए। ऐसा करने पर हमें समकोण त्रिभुज प्राप्त होता है जिसकी लंबवत भुजाएँ a और b हैं।

1.

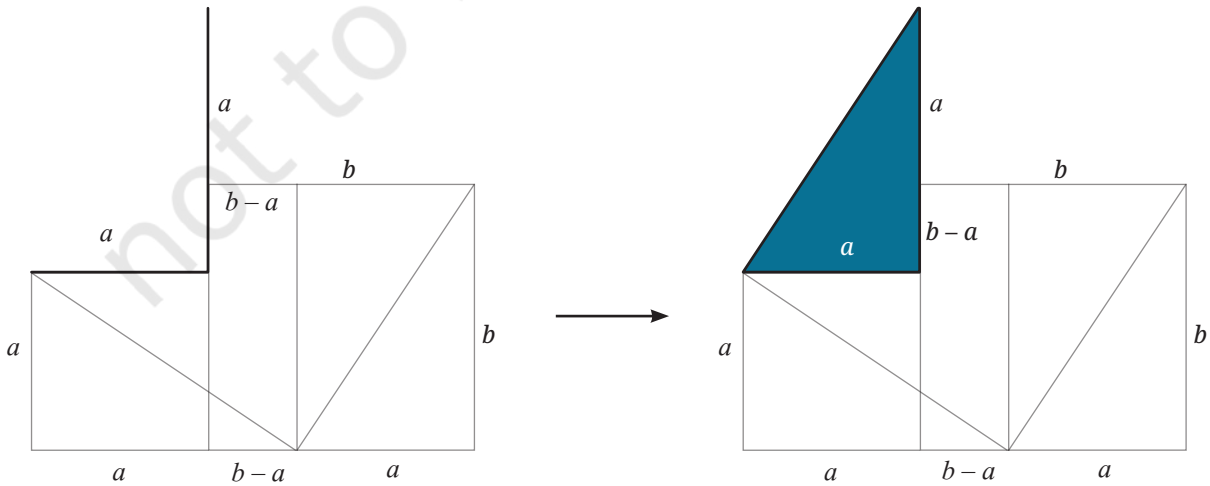


- कर्ण पर चार भुजाओं वाली आकृति बनाने के लिए इसी प्रकार के तीन और समकोण त्रिभुज बनाइए।

2.

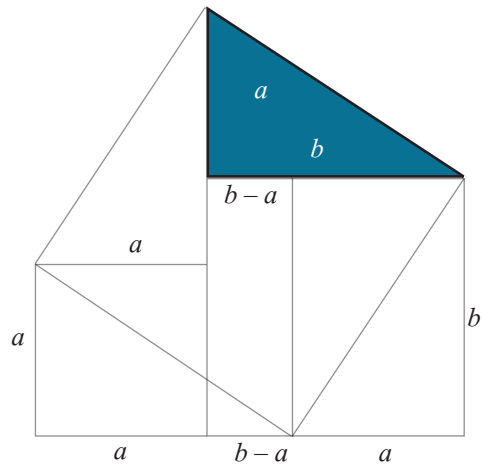


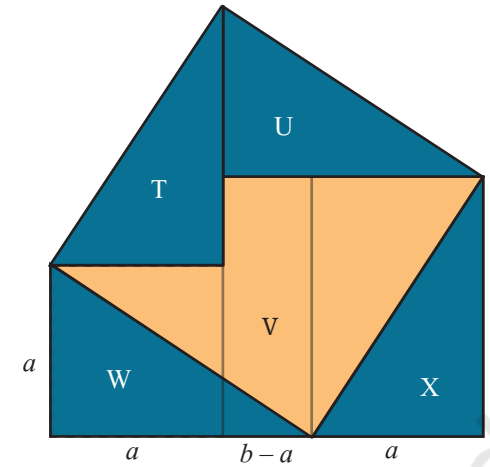
3.



© NCERT not to be republished

4.

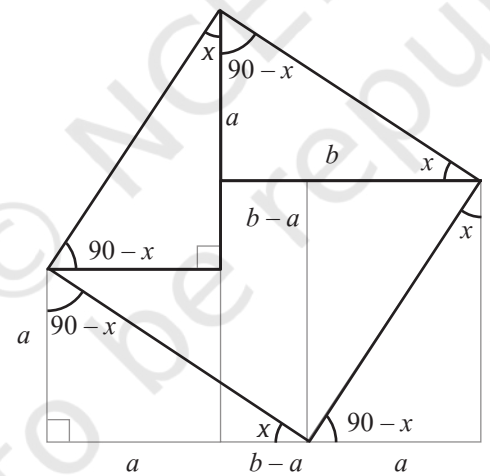




- इस प्रकार प्राप्त चार भुजा वाली आकृति (T + U + V) वास्तव में वह वर्ग है जिसका क्षेत्रफल दो छोटे वर्गों के क्षेत्रफल के योग के बराबर है!

? ऐसा क्यों?

- चूँकि T, U, X और W सभी सर्वांगसम हैं अत: इस चार भुजाओं वाली नई आकृति में सभी भुजाओं की लंबाई समान होगी। इसके कोणों पर ध्यान दीजिए।



? व्याख्या कीजिए कि इस नई चार भुजा वाली आकृति के सभी कोण समकोण क्यों हैं तथा इसी कारण से यह एक वर्ग है।

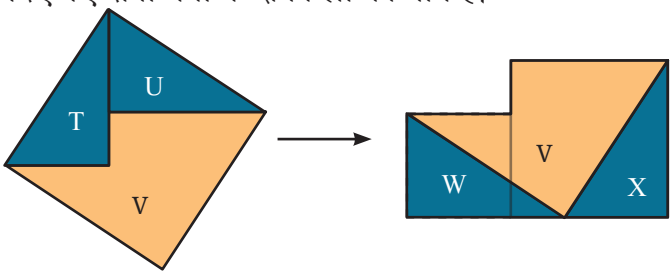
ध्यान दीजिए कि इस नए वर्ग में भुजा के रूप में, भुजाओं a और b से बनने वाले समकोण त्रिभुज का कर्ण है।

- अब बौधायन का कथन स्पष्ट है—

कर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल = T, U और V के क्षेत्रफलों का योग = V, W और X के

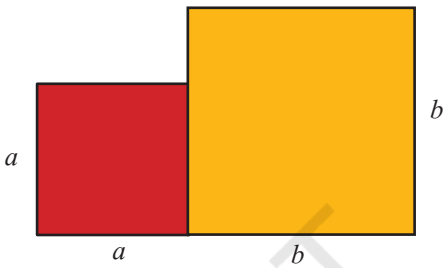
© NCERT not to be republished

क्षेत्रफलों का योग = दिए गए दोनों वर्गों के क्षेत्रफलों का योग है।

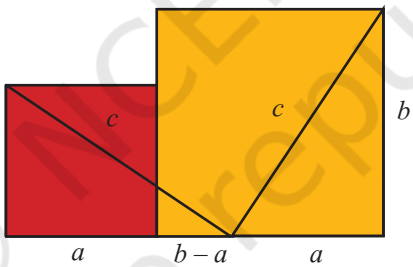


कागज की सहायता से दो वर्गों को जोड़ना

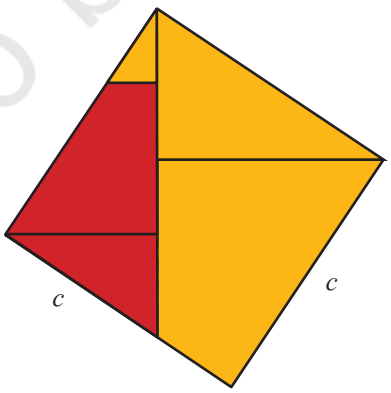
दो भिन्न आकार के वर्गों को नीचे दिए गए प्रकार से काटिए और जोड़िए—



अब तीन टुकड़े बनाने के लिए इस पर दो कट लगाइए—



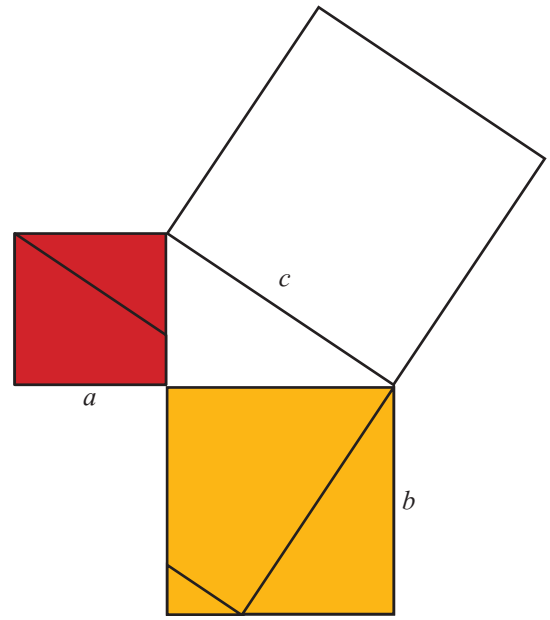
तीनों टुकड़ों को पुनर्व्यवस्थित करके एक बड़ा वर्ग बनाइए—



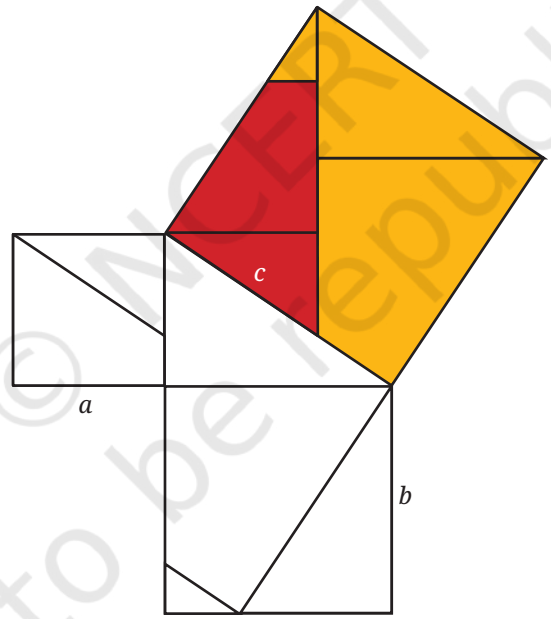
अब आपने दो छोटे वर्गों को जोड़कर एक बड़ा वर्ग बना लिया है!

अब दो छोटे वर्गों का उपयोग करके एक समकोण त्रिभुज बनाइए। इसके कर्ण पर एक वर्ग बनाइए।

© NCERT not to be republished



टुकड़ों का उपयोग करते हुए कर्ण पर बने वर्ग को ढकिए।



उपर्युक्त आकृति यह दर्शाती है कि यदि किसी समकोण त्रिभुज की छोटी भुजाओं की माप a व b तथा कर्ण की माप c हो तो दोनों छोटे वर्गों के क्षेत्रफलों a^2 और b^2 का योग बड़े वर्ग के क्षेत्रफल c^2 के बराबर होगा—

$$a^2 + b^2 = c^2$$

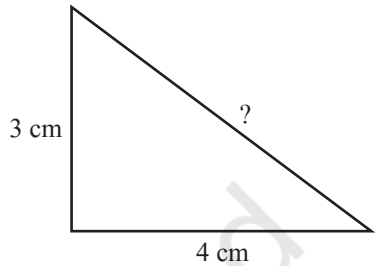
यह समकोण त्रिभुजों पर बौधायन का प्रसिद्ध और आधारभूत प्रमेय है—

समकोण त्रिभुजों पर बौधायन की प्रमेय— यदि एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई a, b और c हो, जहाँ c कर्ण की लंबाई हो, तब $a^2 + b^2 = c^2$ होगा।

© NCERT not to be republished

बौधायन इतिहास के पहले ऐसे व्यक्ति थे जिन्होंने इस प्रमेय को इतने व्यापक और आधुनिक रूप से प्रतिपादित किया। इस प्रमेय को यूनानी दार्शनिक-गणितज्ञ पाइथागोरस (लगभग 500 सामान्य सवंत पूर्व) के नाम पर 'पाइथागोरस प्रमेय' के रूप में भी जाना जाता है। इन्होंने इस प्रमेय की सराहना की और इसका अध्ययन भी किया। पाइथागोरस का जन्म बौधायन के कुछ सौ वर्षों के पश्चात हुआ था। प्राय: इसे संक्रमणकालीन नाम 'बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय' भी कहा जाता है ताकि यह स्पष्ट हो सके कि किस प्रमेय का उल्लेख किया जा रहा है।

बौधायन प्रमेय का प्रयोग



अपनी अभ्यास पुस्तिका में एक ऐसा समकोण त्रिभुज बनाइए जिसकी छोटी भुजाओं की लंबाई 3 cm व 4 cm हो। अब कर्ण की लंबाई मापिए। यह लंबाई लगभग 5 cm होनी चाहिए।

वास्तव में हम बौधायन प्रमेय का प्रयोग करके अनुमान लगा सकते थे कि इस कर्ण की लंबाई 5 cm ही होगी! माना दो छोटी भुजाओं की लंबाई (सेंटीमीटर में) $a = 3$ और $b = 4$ है। तब बौधायन प्रमेय से कर्ण की लंबाई c, निम्नलिखित समीकरण को संतुष्ट करेगी,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$3^2 + 4^2 = c^2$$

$$9 + 16 = c^2$$

$$25 = c^2$$

इसलिए $c = 5$ cm

? आइए, पता लगाएँ

1. यदि किसी समकोण त्रिभुज की छोटी भुजाओं की लंबाई 5 cm और 12 cm हो तो इसके कर्ण की लंबाई क्या होगी? पहले इन भुजाओं की माप के साथ एक समकोण त्रिभुज बनाइए तथा कर्ण को मापिए। इसके पश्चात बौधायन प्रमेय की सहायता से अपने उत्तर की जाँच कीजिए।
2. यदि एक समकोण त्रिभुज की एक छोटी भुजा की लंबाई 8 cm तथा कर्ण की लंबाई 17 cm है तो बताइए कि तीसरी भुजा की लंबाई क्या होगी? पुन: त्रिभुज को बनाने एवं मापने का प्रयास कीजिए तथा इसके पश्चात बौधायन प्रमेय की सहायता से अपने उत्तर की जाँच कीजिए।
3. अब तक आपने जो रचनाएँ देखी हैं उनका उपयोग करते हुए आप एक ऐसा वर्ग किस प्रकार बनाएँगे जिसका क्षेत्रफल दिए गए वर्ग के क्षेत्रफल का तीन गुना हो? दिए गए वर्ग के क्षेत्रफल का पाँच गुना हो? (*शुल्बसूत्र*, बौधायन, श्लोक 1.10)
4. माना a, b और c एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई को व्यक्त करते हैं, जहाँ c कर्ण की लंबाई है। निम्नलिखित प्रत्येक स्थिति में अज्ञात भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए—

   (i) $a = 5, b = 7$ (ii) $a = 8, b = 12$ (iii) $a = 9, c = 15$

   (iv) $a = 7, b = 12$ (v) $a = 1.5, b = 3.5$

© NCERT not to be republished

2.5 पूर्णांक भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज

बौधायन ने *शुल्बसूत्र* (श्लोक 1.13) में अनेक पूर्णांक त्रिकों (Triples) (a, b, c) को सूचीबद्ध किया है जो एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई बनाते हैं और इसी कारण से $a^2 + b^2 = c^2$ को संतुष्ट करते हैं। इनमें (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (12, 35, 37) और (15, 36, 39) सम्मिलित हैं।

इस कारण से ऐसे त्रिक (a, b, c) जो एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई (समतुल्य रूप से $a^2 + b^2 = c^2$ को संतुष्ट करते हैं) बनाते हैं उन्हें **बौधायन त्रिक** कहा जाता है। इन्हें **बौधायन-पाइथागोरस त्रिक**, **पाइथागोरस त्रिक** और **समकोण त्रिभुज त्रिक** भी कहा जाता है।

गणित चर्चा

? 20 या उससे छोटी संख्या वाले सभी बौधायन त्रिकों को सूचीबद्ध कीजिए।

? क्या बौधायन त्रिकों का कोई अंतहीन क्रम है?

गणितज्ञों ने इस प्रश्न का उत्तर दिया है और उन्होंने ऐसे सभी त्रिकों को बनाने की एक विधि की ज्ञात की है! आइए, इस विषय में कुछ और जानते व सीखते हैं।

हमने देखा है कि (3, 4, 5) एक बौधायन त्रिक है।

? क्या (30, 40, 50) एक बौधायन त्रिक है?

क्या (300, 400, 500) एक बौधायन त्रिक है?

20 या उससे कम संख्या वाले बौधायन त्रिकों की सूची में सम्मिलित हैं—

(3, 4, 5), (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20)

? क्या आप इनमें कोई प्रतिरूप (पैटर्न) देखते हैं?

त्रिक (3, 4, 5) के प्रत्येक पद को किसी निश्चित धनात्मक पूर्णांक से गुणा करके इन सभी त्रिकों को प्राप्त किया जा सकता है।

? क्या हम इस अवलोकन के आधार पर बौधायन त्रिकों के विषय में अनुमान (Conjecture) लगा सकते हैं?

अनुमान— $(3k, 4k, 5k)$ एक बौधायन त्रिक है जहाँ k कोई धनात्मक पूर्णांक है।

? क्या यह सत्य है?

हमें जाँचना है कि $(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$ है।

हमारे पास $(3k)^2 + (4k)^2 = 9k^2 + 16k^2 = 25k^2$ है, जो $(5k)^2$ के बराबर है।

अत: $(3k, 4k, 5k)$ वास्तव में एक बौधायन त्रिक है।

इससे ज्ञात होता है कि बौधायन त्रिकों की संख्या अनंत है।

क्या हम इस अनुमान को और अधिक व्यापक बना सकते हैं?

? यदि (a, b, c) एक बौधायन त्रिक है तो (ka, kb, kc) भी एक बौधायन त्रिक होगा जहाँ k कोई धनात्मक पूर्णांक है। क्या यह कथन सत्य है?

© NCERT not to be republished

इस कथन को पूर्व अनुसार सत्य सिद्ध किया जा सकता है। चूँकि (a, b, c) एक बौधायन त्रिक है, इसलिए $a^2 + b^2 = c^2$ है। हमें यह जाँचना है कि क्या $(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$ है।

$$(ka)^2 = ka \times ka = k^2 a^2 \text{ और } (kb)^2 = kb \times kb = k^2 b^2$$

$$\text{इसलिए, } (ka)^2 + (kb)^2 = k^2 a^2 + k^2 b^2$$

उभयनिष्ठ गुणनखंड निकालने पर हमें प्राप्त होता है—

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2 (a^2 + b^2)$$

चूँकि $a^2 + b^2 = c^2$ अतः—

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2 c^2 = (kc)^2$$

इस प्रकार यदि (a, b, c) एक बौधायन त्रिक है तो (ka, kb, kc) भी बौधायन त्रिक होगा। हम (ka, kb, kc) को (a, b, c) का एक **गुणित रूप** (Scaled Version) कहते हैं।

एक बौधायन त्रिक जिसमें 1 से बड़ा कोई सार्व गुणनखंड नहीं हो उसे **आद्य बौधायन त्रिक** (Primitive Baudhāyana Triple) कहते हैं। अत: (3, 4, 5) आद्य है जबकि (9, 12, 15) नहीं।

? क्या (5, 12, 13) एक आद्य बौधायन त्रिक है? 20 या उससे छोटी संख्याओं वाले अन्य आद्य बौधायन त्रिक कौन-से हैं?

? इन आद्य त्रिकों में से प्रत्येक के 5 गुणित रूप बनाइए। क्या ये गुणित रूप आद्य त्रिक हैं?

? यदि (a, b, c) अनाद्य हो और पूर्णांक f, 1 से बड़ा एक सार्व गुणनखंड हो, तब क्या $\left(\frac{a}{f}, \frac{b}{f}, \frac{c}{f}\right)$ एक बौधायन त्रिक होगा? (9, 12, 15) के लिए इस कथन की जाँच कीजिए एवं कथन का औचित्य सिद्ध कीजिए।

यदि हम सभी आद्य त्रिकों को खोज सकें तो हम, सभी बौधायन त्रिकों को खोज सकते हैं।

? हम अन्य आद्य त्रिक किस प्रकार से बना सकते हैं?

हम क्रमागत विषम संख्याओं और वर्ग संख्याओं के योग के बीच संबंध को समझते हैं—

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

प्रथम n विषम संख्याओं का योग n^2 है। आइए, इसे हम बीजीय रूप से व्यक्त करें।

? इसके लिए हमें nवीं विषम संख्या को जानना होगा। यह कौन-सी है?

nवीं विषम संख्या $2n - 1$ है इसलिए,

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 3)}_{\text{प्रथम } (n-1) \text{ विषम संख्याओं का योग}} + (2n - 1) = n^2$$

? प्रथम $(n-1)$ विषम संख्याओं का योग क्या होगा?

इस प्रकार

$$(n-1)^2 + (2n-1) = n^2$$

ध्यान दीजिए कि यह समीकरण $(n-1)^2$ का प्रसार करके और उसमें $2n-1$ जोड़कर सीधे भी प्राप्त की जा सकता है।

यदि nवीं विषम संख्या, $2n-1$ भी एक वर्ग संख्या हो तब हमारे पास दो वर्ग संख्याओं के योग के समान एक अन्य वर्ग संख्या होगी। हम इस विचार का उपयोग बौधायन त्रिकों को बनाने में करेंगे।

1. 9 एक विषम वर्ग है। यह 5वीं विषम संख्या $(9 = 2 \times 5 - 1)$ है, अत:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

$$4^2 + 3^2 = 5^2$$

? क्या हम समीकरण $(n-1)^2 + (2n-1) = n^2$ का उपयोग करके यह त्रिक प्राप्त कर सकते हैं? चूँकि हमने 5वीं विषम संख्या ली है अर्थात n का मान 5 है। समीकरण में $n = 5$ प्रतिस्थापित करने पर—

$$(5-1)^2 + 9 = 5^2$$

$$4^2 + 3^2 = 5^2$$

2. 25 एक विषम वर्ग है। यह 13वीं विषम संख्या $(25 = 2 \times 13 - 1)$ है। अत:

$1 + 3 + 5 + \ldots + 23 + 25 = 13^2$ $12^2 + 5^2 = 13^2$	हमारे पास $n = 13$ है। समीकरण में इस मान को प्रतिस्थापित करने पर— $(13-1)^2 + 25 = 13^2$ $12^2 + 5^2 = 13^2$

? आइए, पता लगाएँ

1. इस विचार का उपयोग करते हुए 5 अन्य बौधायन त्रिक खोजिए।
2. क्या इस विधि से अनाद्य बौधायन त्रिक प्राप्त होते हैं?

   [**संकेत**— ध्यान दीजिए कि इस प्रकार बनने वाले त्रिकों में छोटी भुजाओं में से एक भुजा की लंबाई कर्ण की लंबाई से एक कम होती है।]
3. क्या ऐसे कोई आद्य त्रिक हैं जिन्हें इस विधि द्वारा प्राप्त नहीं किया जा सकता है? यदि हाँ, तो उदाहरण दीजिए।

गणित चर्चा

2.6 दीर्घकाल से अनसुलझा प्रश्न

बौधायन त्रिकों के अध्ययन ने 17वीं शताब्दी के महान फ्रांसीसी गणितज्ञ फर्मा को धनात्मक पूर्णांकों की घातों के योग के विषय ने एक व्यापक कथन देने के लिए प्रेरित किया।

© NCERT not to be republished

हमने देखा है कि ऐसी अनंत वर्ग संख्याएँ हैं जिन्हें दो वर्ग संख्याओं के योग रूप में लिखा जा सकता है। इससे फर्मा को जिज्ञासा हुई कि क्या कोई ऐसा पूर्ण घन है जिसे दो पूर्ण घनों के योग के रूप में लिखा जा सकता है, एक ऐसी कोई चतुर्थ घात है जिसे दो चतुर्थ घातों के योग के रूप में लिखा जा सकता है और इसी प्रकार आगे भी। अन्य शब्दों में कहा जाए तो उनको जिज्ञासा हुई कि क्या निम्नलिखित समीकरण का कोई हल है?

$$x^n + y^n = z^n$$

जहाँ x, y और z प्राकृतिक संख्याएँ है और $n > 2$ है।

धनात्मक पूर्णांकों के गुणों व प्रतिरूपों से संबंधित (बौधायन त्रिक के समान) एक पुस्तक के हाशिए में फर्मा ने लिखा कि संख्याओं के अंतहीन अनुक्रम के बीच ऐसा कोई भी पूर्ण घन नहीं मिलेगा जो दो पूर्ण घनों के योग के रूप में लिखा जा सके, ऐसी कोई चौथी घात नहीं मिलेगी जो दो चौथी घातों के योग के रूप में लिखी जा सके और इसी प्रकार आगे भी होता रहेगा। इसी क्रम में फर्मा ने आगे लिखा—

"मुझे इस कथन का वास्तव में अद्‌भुत प्रमाण प्राप्त हुआ है, परंतु इसे लिखने के लिए हाशिए में स्थान अपर्याप्त है।"

किसी को भी फर्मा के इस कथन का प्रमाण नहीं मिल सका जिसे **फर्मा का अंतिम प्रमेय** कहा जाता है।

फर्मा की मृत्यु के पश्चात कई गणितज्ञों ने इस प्रमेय को सिद्ध करने के प्रयास किए। परंतु 300 से अधिक वर्षों तक इसे सिद्ध करने के असफल प्रयास होते रहे।

एंड्रयू वाइल्स नाम के 10 वर्षीय बालक ने वर्ष 1963 में फर्मा के **अंतिम प्रमेय** और उसके इतिहास के विषय में एक पुस्तक (*द लास्ट प्रॉब्लम*, एरिक बेल द्वारा रचित) पढ़ी। अनेक महान गणितज्ञों की विफलताओं के विषय में जानने के पश्चात भी इस बालक ने इस प्रमेय को सिद्ध करने का संकल्प लिया।

अंततः एंड्रयू वाइल्स ने वर्ष 1994 में इस प्रमेय को सिद्ध कर दिया!

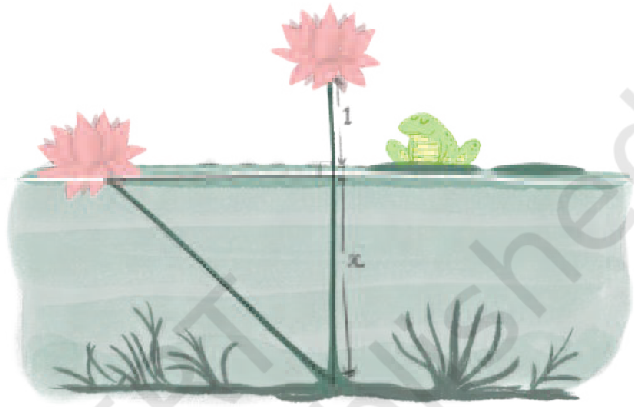
2.7 बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय के अन्य अनुप्रयोग

बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय ज्यामिति के मूलभूत प्रमेयों में से एक है। आइए, हम इसके कुछ अनुप्रयोगों को देखें।

भास्कराचार्य के ग्रंथ *लीलावती* से एक प्रश्न

भास्कराचार्य (भास्कर द्वितीय) द्वारा रचित ग्रंथ *लीलावती* से लिए गए एक प्रश्न का अनुवाद निम्नलिखित है। इसे पढ़िए और कल्पना करने का प्रयास कीजिए।

"चक्र और कौंच पक्षियों से घिरी एक झील में कमल का एक फूल जल से बाहर झाँक रहा है, जिसके तने की नोक जल की सतह से 1 इकाई ऊपर है। धीमी-सी पवन बहने पर तने की नोक जल को अपनी मूल स्थिति से 3 इकाई दूर छूती है। शीघ्रता के साथ झील की गहराई बताइए।"



प्रथम दृष्टि में ऐसा अनुभव होता है कि समाधान खोजने के लिए आँकड़े अपर्याप्त हैं, परंतु इसका समाधान है!

मान लीजिए कि जल के भीतर तने की लंबाई x है। यह झील की अपेक्षित गहराई है। चूँकि कमल का तना जल के ऊपर 1 इकाई तक है इसलिए तने की कुल लंबाई $x + 1$ होगी।

हम एक (तर्कसंगत) अनुमान लगा सकते हैं कि कमल का तना पहली स्थिति में जल की सतह के लंबवत है। इस अनुमान के साथ हमें भुजा 3, x और $x + 1$ का एक समकोण त्रिभुज प्राप्त होता है। चूँकि यह बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय को संतुष्ट करता है, अत:—

$$3^2 + x^2 = (x + 1)^2$$

$$9 + x^2 = x^2 + 2x + 1$$

दोनों ओर से x^2 घटाने पर—

$$9 = 2x + 1$$

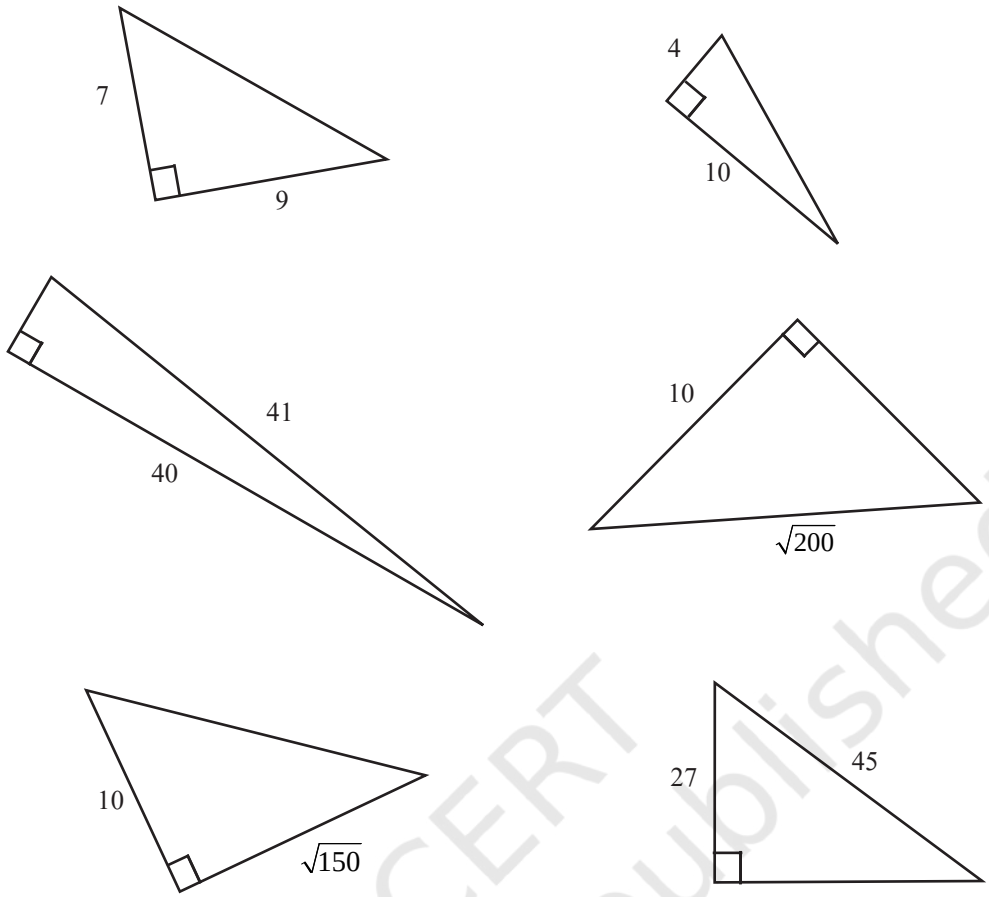
$$x = 4$$

इस प्रकार झील की गहराई 4 इकाई है।

आइए, पता लगाएँ

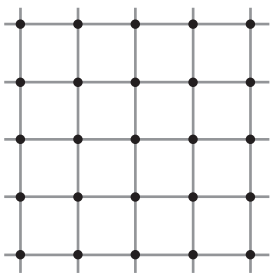
1. उस वर्ग का विकर्ण ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा की लंबाई 5 cm हो।
2. अग्रलिखित समकोण त्रिभुजों में लुप्त भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished



3. एक समचतुर्भुज की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए जिसके विकर्णों की लंबाई 24 इकाई और 70 इकाई है।
4. क्या कर्ण किसी भी समकोण त्रिभुज की सबसे लंबी भुजा है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।
5. सत्य या असत्य— प्रत्येक बौधायन त्रिक या तो एक आद्य त्रिक है या फिर आद्य त्रिक का गुणित रूप (Scaled Version) है।
6. ऐसे पाँच आयतों के उदाहरण दीजिए जिनकी सभी भुजाओं की लंबाई व विकर्ण पूर्णांक हों।
7. एक ऐसे वर्ग की रचना कीजिए जिसका क्षेत्रफल, 5 इकाई व 7 इकाई भुजाओं वाले वर्गों के क्षेत्रफलों के अंतर के बराबर हो।
8. (i) एक जाल (ग्रिड) के बिंदुओं को शीर्षों के रूप में उपयोग करते हुए, क्या आप एक वर्ग बना सकते हैं जिसका क्षेत्रफल— (क) 2 वर्ग इकाई (ख) 3 वर्ग इकाई (ग) 4 वर्ग इकाई और (घ) 5 वर्ग इकाई हो?

   (ii) मान लीजिए कि ग्रिड अपरिमित रूप से विस्तारित है। इस प्रकार बने वर्गों के संभावित क्षेत्रफल पूर्णांक-मानों में क्या होंगे?



गणित चर्चा

प्रयास कीजिए

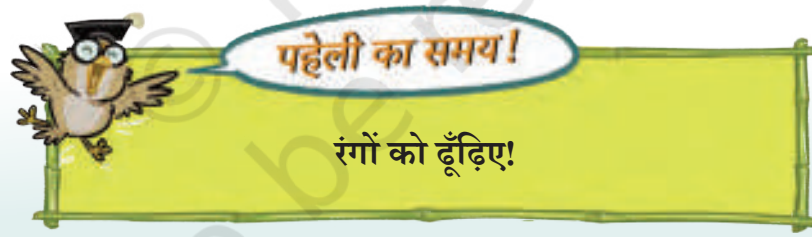
© NCERT not to be republished

9. 6 इकाई भुजा वाले समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
[**संकेत**— दर्शाइए कि एक शीर्षलंब सम्मुख भुजा को समद्विभाजित करता है। ऊँचाई ज्ञात करने के लिए इसका उपयोग कीजिए।]

प्रयास कीजिए

सारांश

- बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय ज्यामिति में सबसे आधारभूत प्रमेयों में से एक है। यह किसी समकोण त्रिभुज की तीनों भुजाओं के मध्य संबंध को व्यक्त करती है।
- यदि एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई a, b, c है, जहाँ c कर्ण की लंबाई है, तब $a^2 + b^2 = c^2$ है।
- एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज में भुजाओं की लंबाई a, a, c के लिए संबंध $a^2 + a^2 = 2a^2 = c^2$ अर्थात $c = a\sqrt{2}$ है।
- संख्या $\sqrt{2}$, 1.414 और 1.415 के बीच में विद्यमान है। यद्यपि इसे सांत दशमलव के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता। इसे m, n धनात्मक पूर्णांकों के साथ किसी भिन्न $\frac{m}{n}$ के रूप में भी व्यक्त नहीं किया जा सकता है।
- $a^2 + b^2 = c^2$ को संतुष्ट करने वाले धनात्मक पूर्णांकों का एक त्रिक (a, b, c) बौधायन-पाइथागोरस त्रिक कहलाता है। उदाहरण के लिए— (3, 4, 5), (6, 8, 10) और (5, 12, 13) आदि। ऐसे अनंत तक अनेक त्रिकों की रचना की जा सकती है।
- समीकरण $a^n + b^n = c^n$ का धनात्मक पूर्णांकों के लिए कोई हल नहीं है जब $n > 2$ हो। इसे 'फर्मा की अंतिम प्रमेय' कहा जाता है। इसे वर्ष 1994 में एंड्रयू वाइल्स द्वारा सिद्ध किया गया था।



रंगों को ढूँढ़िए!

तीन बंद बक्से हैं— एक में केवल लाल गेंदें हैं, दूसरे में केवल नीली गेंदे हैं और तीसरे बक्से में केवल हरी गेंदें हैं। बक्सों पर 'लाल', 'नीला' और 'हरा' इस प्रकार से चिह्नित किया गया है कि किसी भी बक्से पर सही चिह्न ना हो। हमें यह ज्ञात करने की आवश्यकता है कि कौन-सा चिह्न किस बक्से के लिए है। यदि हमें केवल एक बक्से को खोलने की अनुमति हो तो बताइए यह किस प्रकार किया जा सकता है?

© NCERT not to be republished