# 3 समानुपातिक तर्कण— 2

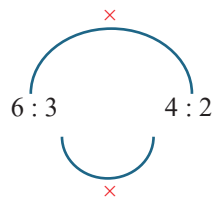
## 3.1 समानुपातिकता— पुनरावलोकन

पूर्व में पढ़े गए अध्याय 'समानुपातिक तर्कण— 1' में हमने राशियों के बीच समानुपातिक संबंधों को समझा था। इसके साथ ही हमने ऐसे संबंधों को दर्शाने के लिए अनुपात के चिह्न का भी उपयोग किया था। ध्यान रखिए जब दो या दो से अधिक संबंधित राशियाँ समान दर से परिवर्तित होती हैं तो ऐसे संबंध को समानुपातिक संबंध कहा जाता है। उदाहरण के लिए— इडली का घोल चावल और उड़द दाल के मिश्रण से बनता है। इन दोनों के अनुपात में क्षेत्रीय भिन्नताएँ हो सकती हैं। इडली बनाने के लिए प्रचलित अनुपात यह है कि 2 कप चावल के लिए हम 1 कप उड़द दाल मिलाकर मिश्रण तैयार करते हैं। इस संबंध को हम अनुपात के चिह्न 2 : 1 से दर्शाते हैं।

? विश्वनाथ ने 6 कप चावल को 3 कप उड़द दाल के साथ मिलाकर इडलियाँ बनाईं। पुनीत ने 4 कप चावल को 2 कप उड़द दाल के साथ मिलाकर इडलियाँ बनाईं। यदि दोनों ने इडलियों को समान विधि से पकाया हो तो क्या उनकी इडलियों का स्वाद एक समान रहेगा?

विश्वनाथ के मिश्रण को 6 : 3 द्वारा व्यक्त किया जा सकता है और पुनीत के मिश्रण को 4 : 2 द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

इस बात की पुष्टि करने के लिए कि ये दोनों अनुपात समानुपाती हैं हम वज्र-गुणन विधि का उपयोग कर सकते हैं—




दोनों गुणनफल समान (12) हैं। अत: दोनों अनुपात समानुपातिक हैं। ऐसी संभावना है कि यदि इडली में प्रयुक्त अन्य सामग्रियाँ भी समानुपातिक हों तो इडलियों का स्वाद भी समान ही होगा!

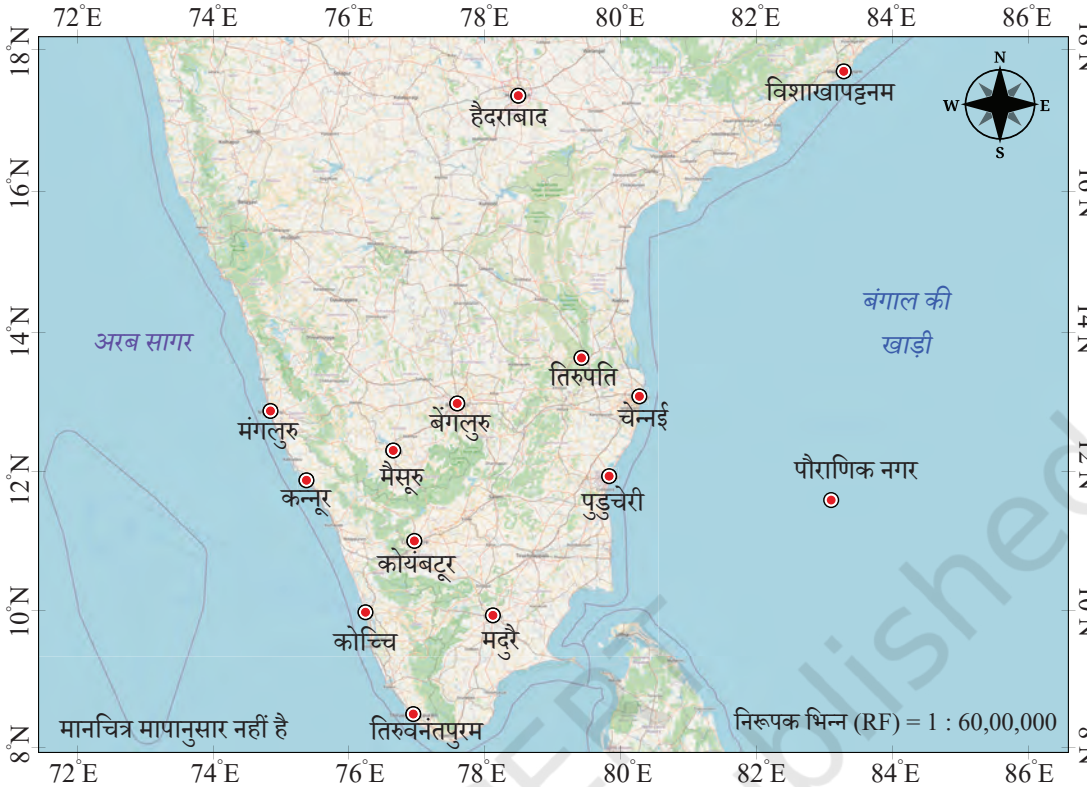
सामान्यतः हम कह सकते हैं कि दो अनुपात a : b और c : d समानुपातिक होंगे यदि

$$a \times d = b \times c, \text{ या}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

© NCERT not to be republished

## 3.2 मानचित्रों में अनुपात




? क्या आपने ध्यान दिया कि कई मानचित्रों में एक अनुपात दिया जाता है जो सामान्यत: मानचित्र के निचले दाएँ कोने में लिखा होता है। इसमें सामान्यत: 1 तथा इसके साथ एक बहुत बड़ी संख्या लिखी होती है, जैसे ऊपर दिए गए मानचित्र में 1 : 60,00,000 लिखा है। क्या आप जानते हैं कि निरूपक भिन्न 1 : 60,00,000 का क्या अर्थ है? यह संख्या क्या दर्शाती है? क्या आप इस विषय में अनुमान लगा सकते हैं?

एक निरूपक भिन्न (Representative Fraction— RF) एक ऐसा व्यंजक होता है जो मानचित्र पर दर्शाई गई दूरी और धरातल पर उसकी वास्तविक दूरी के बीच के संबंध अर्थात अनुपात को प्रदर्शित करता है।

उदाहरण के लिए— यदि किसी मानचित्र पर अनुपात 1 : 60,00,000 हो तो इसका अर्थ है कि मानचित्र पर 1 cm दूरी 60,00,000 cm भौगोलिक दूरी के बराबर है। ध्यान दीजिए कि यह भौगोलिक दूरी है, सड़क की दूरी नहीं!

? 60,00,000 cm को किलोमीटर में परिवर्तित कीजिए।

यह 60 km है। इस रूपांतरण की जाँच कीजिए।

? ऊपर दिए गए मानचित्र का उपयोग करके क्या आप बेंगलुरु और चेन्नई के बीच भौगोलिक दूरी ज्ञात कर सकते हैं? इसके साथ ही मंगलुरु और चेन्नई के बीच भौगोलिक दूरी भी ज्ञात कीजिए।

[**संकेत**— मानचित्र पर शहरों के बीच दूरी ज्ञात करने के लिए मापक का उपयोग कीजिए। इसके पश्चात मानचित्र पर दिए गए अनुपात का उपयोग करके वास्तविक भौगोलिक दूरी ज्ञात कीजिए।]

© NCERT not to be republished

? विभिन्न मानचित्रों पर शहरों के दो समान युग्मों के बीच दूरी ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए जिनमें भिन्न-भिन्न पैमानों (अनुपात) का उपयोग किया गया हो। बताइए कि क्या सभी मानचित्रों पर शहरों के बीच की भौगोलिक दूरी लगभग समान है?

**शिक्षक हेतु टिप्पणी** — कक्षा में मानचित्र व एटलस लेकर आइए एवं विद्यार्थियों को मानचित्र पर अनुपात के रूप में दिए गए पैमाने (सामान्यत: निचले दाएँ कोने में) का अवलोकन करने के लिए प्रोत्साहित कीजिए। पुस्तकालय में मानचित्रों व एटलस का उपयोग कीजिए एवं विद्यार्थियों को मानचित्र पर उन दो स्थानों के बीच की भौगोलिक दूरी ज्ञात करने के लिए कहिए जो स्थानीय रूप से महत्त्वपूर्ण हों। उनके द्वारा ज्ञात की गई दूरियों को एक-दूसरे से मिलान करने के लिए भी कहिए। क्या इसमें उन्हें समान दूरियाँ प्राप्त हुई हैं और यदि दूरियाँ बहुत अधिक भिन्न हैं तो इसका कारण भी जानने के लिए कहिए।

**मानचित्र निर्माण गतिविधि** — विद्यार्थियों को सटीक पैमाने (1 : 50 का अनुपात) का उपयोग कर उनकी कक्षा का प्रारूप बनाने के लिए उनका मार्गदर्शन कीजिए। इस प्रारूप में उन्हें पैमाने के अनुसार कक्षा की विभिन्न वस्तुओं, जैसे — शिक्षक की टेबल, श्यामपट्ट, पंखें व लाइटों, के स्थान चिह्नित करने चाहिए। विद्यार्थी विभिन्न वस्तुओं, जैसे — पंखें, लाइटें, टेबल, कुर्सियाँ व इसी प्रकार की अन्य वस्तुओं को प्रदर्शित करने के लिए उचित प्रतीकों का उपयोग कर सकते हैं।

## 3.3 दो से अधिक पदों के साथ अनुपात

विश्वनाथ मसालों के मिश्रण के साथ एक परीक्षण कर रहा है। वह 8 चम्मच धनिया के बीज, 4 लाल मिर्च, 2 चम्मच तुअर दाल व 1 चम्मच मेथीदाना को पीसकर मसाला मिश्रण तैयार करता है। उसके मसाला मिश्रण के लिए धनिया, लाल मिर्च, तुअर दाल, मेथीदाना का अनुपात 8 : 4 : 2 : 1 है।

ध्यान दीजिए कि इस अनुपात में 4 पद हैं। यदि प्रत्येक मात्रा में समानुपातिक संबंध बनाए रखने के लिए समान गुणक से परिवर्तन होता है तो अनुपात में कई पद हो सकते हैं।

? पुनीत के रसोईघर में मात्र 2 लाल मिर्च हैं। किंतु वह विश्वनाथ द्वारा बनाए गए मसाला मिश्रण के समान स्वाद वाला मिश्रण बनाना चाहता है। इसके लिए पुनीत को कितनी मात्रा में अन्य सामग्रियों का उपयोग करना चाहिए?

पुनीत के मसाला मिश्रण को, विश्वनाथ के मसाला मिश्रण के समान स्वादिष्ट होने के लिए दोनों के मसाला मिश्रण में सभी सामग्रियों का अनुपात समान होना चाहिए। पुनीत के पास मात्र 2 लाल मिर्च हैं जोकि विश्वनाथ के मिश्रण में उपयोग में लाई गई मिर्च से संख्या में आधी हैं। अतः पुनीत को अन्य सामग्रियों की मात्रा को भी आधा कर देना चाहिए।

इस प्रकार पुनीत को 4 चम्मच धनिया के बीज, 2 लाल मिर्च, 1 चम्मच तुअर दाल और आधा चम्मच मेथीदाना मिलाना चाहिए। यह अनुपात 4 : 2 : 1 : 0.5 होगा।

© NCERT not to be republished

दोनों ही अनुपात एक-दूसरे के समानुपातिक हैं। हम इसे निम्न प्रकार प्रदर्शित करते हैं—

$$8 : 4 : 2 : 1 :: 4 : 2 : 1 : 0.5$$

सामान्यत: जब बहुपदों वाले दो अनुपात समानुपातिक होते हैं—

$$a : b : c : d :: p : q : r : s$$

तब

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \frac{d}{s}$$

**उदाहरण 1**— बैंगनी रंग की एक विशेष रंगत (shade) बनाने के लिए लाल : नीला : सफेद रंग के प्रलेप (Paint) को क्रमश: 2 : 3 : 5 के अनुपात में मिलाना होगा। यदि यास्मीन के पास 10 लीटर सफेद रंग का प्रलेप हो तो उक्त रंगत के रंग का प्रलेप तैयार करने के लिए उसे कितने लीटर लाल और नीला रंग का प्रलेप मिलाना चाहिए?

2 : 3 : 5 अनुपात में सफेद रंग का प्रलेप 5 भाग के बराबर है।

यदि 5 भाग 10 लीटर प्रलेप के बराबर हैं तो 1 भाग $10 \div 5 = 2$ लीटर होगा।

लाल रंग का प्रलेप = 2 भाग = $2 \times 2 = 4$ लीटर

नीला रंग का प्रलेप = 3 भाग = $3 \times 2 = 6$ लीटर

अत: बैंगनी रंग के प्रलेप में लाल रंग का प्रलेप 4 लीटर, नीला रंग का प्रलेप 6 लीटर और सफेद रंग का प्रलेप 10 लीटर होगा।

इस बैंगनी रंग के प्रलेप का कुल आयतन कितना है?

बैंगनी रंग के प्रलेप का कुल आयतन $4 + 6 + 10 = 20$ लीटर है।

**उदाहरण 2** — सीमेंट कंक्रीट, सीमेंट, रेत एवं बजरी का एक मिश्रण है जो निर्माण कार्यों में व्यापक रूप से उपयोग में लाया जाता है। मिश्रण में इन घटकों का अनुपात भिन्न-भिन्न होता है जो इस बात पर निर्भर करता है कि संरचना को कितना सुदृढ़ बनाना है। सुदृढ़ संरचनाओं, जैसे— स्तंभ, बीम और छतों के लिए यह अनुपात 1 : 1.5 : 3 होता है और इन संरचनाओं को स्टील की छड़ों के उपयोग से भी सुदृढ़ किया जाता है। इस अनुपात का उपयोग करते हुए यदि हमारे पास सीमेंट के 3 थैले हैं तो हम कंक्रीट मिश्रण के कितने थैले बना सकते हैं?

कंक्रीट मिश्रण में अनुपात इस प्रकार है—

सीमेंट के थैले : रेत के थैले : बजरी के थैले :: 1 : 1.5 : 3

यदि हमारे पास सीमेंट के 3 थैले हैं तो हमें अन्य पदों को 3 से गुणा करना होगा। अत: अनुपात है—

सीमेंट : रेत : बजरी :: 3 : 4.5 : 9

अत: हमारे पास कुल $3 + 4.5 + 9 = 16.5$ कंक्रीट मिश्रण के थैले हैं।

## 3.4 पूर्ण राशि को दिए गए अनुपात में बाँटना

अध्याय 'समानुपातिक तर्कण— 1' में हमने सीखा कि किस प्रकार पूर्ण मात्रा को अनुपात में विभाजित किया जाता है। उदाहरण के लिए— 12 को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करना। ऐसा करने के लिए हम अनुपात के पदों को जोड़ते हैं ($2 + 1 = 3$) और पूर्ण मात्रा को इस योगफल से विभाजित ($12 \div 3 = 4$) करते हैं।



© NCERT not to be republished

इसके पश्चात हम प्रत्येक पद को इस भागफल से गुणा करते हैं— $2 \times 4 = 8$ और $1 \times 4 = 4$ होगा। अत: 12 को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करने पर 8 : 4 प्राप्त होता है।

हम इसे अनेक पदों वाले अनुपातों तक विस्तारित कर सकते हैं।

आइए, पूर्व में बताए गए कंक्रीट मिश्रण बनाने के उदाहरण को पुन: देखते हैं। कंक्रीट बनाने के लिए हमें सीमेंट, रेत व बजरी को 1 : 1.5 : 3 के अनुपात में मिश्रित करने की आवश्यकता है।

**उदाहरण 3** — किसी निर्माण कार्य के लिए 110 इकाई कंक्रीट की आवश्यकता है। यदि सीमेंट, रेत और बजरी को 1 : 1.5 : 3 के अनुपात में मिलाया जाए तो इनकी कितनी-कितनी इकाई की आवश्यकता होगी?

एक इकाई सीमेंट के लिए हमें 1.5 इकाई रेत व 3 इकाई बजरी की आवश्यकता है। इन सभी सामग्रियों का मिश्रण मिलकर 5.5 इकाई कंक्रीट बनती हैं। 110 इकाई कंक्रीट प्राप्त करने के लिए हमें यह प्रक्रिया 20 बार ($110 \div 5.5 = 20$) करने की आवश्यकता है। अत: प्रत्येक पद को 20 से गुणा करना होगा।

$1 \times 20 = 20$ इकाई सीमेंट,

$1.5 \times 20 = 30$ इकाई रेत और

$3 \times 20 = 60$ इकाई बजरी

अत: कंक्रीट बनाने के लिए हमें 20 इकाई सीमेंट, 30 इकाई रेत और 60 इकाई बजरी की आवश्यकता है।

जब हम किसी मात्रा $x$ को अनुपात $a : b : c : .....$ में विभाजित करते हैं तो अनुपात के पद इस प्रकार होंगे— $x \times \frac{a}{(a+b+c+\cdots)}, x \times \frac{b}{(a+b+c+\cdots)}, x \times \frac{c}{(a+b+c+\cdots)},$

**उदाहरण 4** — आपको लाल, नीले और सफेद रंग के प्रलेप को 2 : 3 : 5 के अनुपात में मिश्रित करने पर एक विशेष रंगत का बैंगनी रंग के प्रलेप मिलता है। यदि आपको 50 ml बैंगनी रंग के प्रलेप की आवश्यकता हो तो आप कितने मिलीलीटर लाल, नीले और सफेद रंग के प्रलेप को मिश्रित करेंगे?

$$\text{लाल रंग का प्रलेप} = 50 \times \frac{2}{(2+3+5)} = 50 \times \frac{2}{10} = 10 \text{ ml}$$

$$\text{नीला रंग का प्रलेप} = 50 \times \frac{3}{(2+3+5)} = 50 \times \frac{3}{10} = 15 \text{ ml}$$

$$\text{सफेद रंग का प्रलेप} = 50 \times \frac{5}{(2+3+5)} = 50 \times \frac{5}{10} = 25 \text{ ml}$$



© NCERT not to be republished

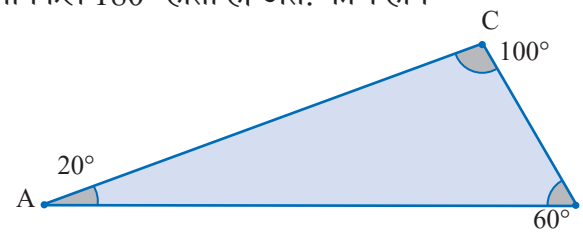
**उदाहरण 5** — कोणों के 1 : 3 : 5 अनुपात के साथ एक त्रिभुज की रचना कीजिए।

हम जानते हैं कि किसी भी त्रिभुज में सभी कोणों का योगफल 180° होता है। अत: कोण होंगे—

$$\angle A = 180° \times \frac{1}{(1+3+5)} = 180° \times \frac{1}{9} = 20°$$

$$\angle B = 180° \times \frac{3}{(1+3+5)} = 180° \times \frac{3}{9} = 60°$$

$$\angle C = 180° \times \frac{5}{(1+3+5)} = 180° \times \frac{5}{9} = 100°$$




## आइए, पता लगाएँ

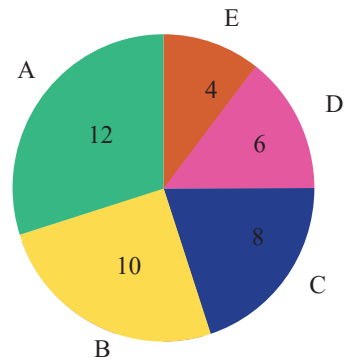
1. एक क्रिकेट प्रशिक्षक अभ्यास सत्रों की योजना बनाता है जिसमें विभिन्न गतिविधियाँ एक विशेष अनुपात में सम्मिलित हैं, जैसे— वार्मअप या शीतलीकरण (Cooldown) के लिए समय : बल्लेबाजी के लिए समय : गेंदबाजी के लिए समय : क्षेत्ररक्षण (फील्डिंग) के लिए समय :: 3 : 4 : 3 : 5 है। यदि प्रत्येक सत्र की अवधि 150 मिनट लंबी हो तो बताइए कि प्रत्येक गतिविधि पर कितना समय व्यतीत किया गया?
2. एक विद्यालय के पुस्तकालय में विभिन्न भाषाओं की पुस्तकें नीचे दिए गए अनुपात में उपलब्ध हैं— उड़िया पुस्तकों की संख्या : हिंदी पुस्तकों की संख्या : अंग्रेजी पुस्तकों की संख्या :: 3 : 2 : 1 है। यदि पुस्तकालय में 288 उड़िया पुस्तकें उपलब्ध हैं तो बताइए कि इसमें हिंदी व अंग्रेजी की पुस्तकें कितनी हैं?
3. मेरे पास 100 सिक्के हैं— ₹10 के सिक्कों की संख्या : ₹5 के सिक्कों की संख्या : ₹2 के सिक्कों की संख्या : ₹1 के सिक्कों की संख्या :: 4 : 3 : 2 : 1 है। बताइए कि सिक्कों के रूप में मेरे पास कुल कितनी धनराशि है?
4. एक ऐसे त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ 3 : 4 : 5 के अनुपात में हों। क्या भुजाओं के इन अनुपातों के साथ बनाए गए सभी त्रिभुज एक-दूसरे के सर्वांगसम होंगे? बताइए कि ऐसा क्यों है या क्यों नहीं है?

   गणित चर्चा
5. क्या आप 1 : 3 : 5 के अनुपात में भुजाओं वाले त्रिभुज की रचना कर सकते हैं? ऐसा क्यों संभव है या क्यों संभव नहीं है?

## 3.5 पाई का एक अंश

क्या आपने चित्र में दर्शाए गए इस प्रकार के वृत्त आलेख (Pie-charts) पहले कभी देखे हैं? वृत्त आलेख एक पूर्ण मात्रा के विभिन्न अंशों को दर्शाते हैं। दिया गया वृत्त आलेख किसी मूल्यांकन में विभिन्न ग्रेड प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों का अनुपात दर्शाता है। इस प्रकार के प्रस्तुतीकरण आँकड़ों की शीघ्र व्याख्या करने में सहायता करते हैं।

ग्रेड का वितरण (40 विद्यार्थी)




आइए इस वृत्त आलेख को बनाने का प्रयास करते हैं। यहाँ विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए ग्रेड्स (grades) को प्रदर्शित करने वाली एक तालिका दी गई है।

| ग्रेड | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| विद्यार्थियों की संख्या | 12 | 10 | 8 | 6 | 4 |

© NCERT not to be republished

? हम वृत्त आलेख के विभिन्न अंशों को किस प्रकार चिह्नित करें?

वृत्त आलेख में एक अंश को चिह्नित करने के लिए किसी भी ग्रेड के संगत कोण का माप उस ग्रेड को प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या के समानुपाती होना चाहिए। किसी भी वृत्त के केंद्र पर बनने वाले कोण का कुल माप 360° होता है। अत: हमें 360 को 12 : 10 : 8 : 6 : 4 के अनुपात में विभाजित करने की आवश्यकता है।

? क्या हम इस अनुपात को इसके सरलतम रूप में परिवर्तित कर सकते हैं?

इसके लिए हम उसी विधि का उपयोग कर सकते हैं जिसे हमने दो पदों वाले अनुपात को सरलतम रूप में परिवर्तन करने के लिए उपयोग किया था। हम सभी पदों को उनके महत्तम समापवर्तक (HCF) से विभाजित करके सरलतम रूप प्राप्त कर सकते हैं।

ऊपर दिए गए उदाहरण में सभी पदों का महत्तम समापवर्तक 2 है। इसलिए सभी पदों को 2 से विभाजित कर हम इस अनुपात का सरलतम रूप प्राप्त कर सकते हैं, जिससे अनुपात 6 : 5 : 4 : 3 : 2 हो जाता है।

अत: कोण होंगे—

ग्रेड A $= \frac{6}{(6+5+4+3+2)} \times 360° = \frac{6}{20} \times 360° = 6 \times 18 = 108°$

ग्रेड B $= \frac{5}{(6+5+4+3+2)} \times 360° = 5 \times 18 = 90°$

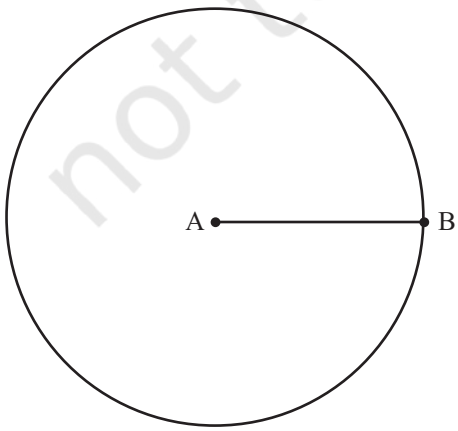
ग्रेड C $= 4 \times 18 = 72°$

ग्रेड D $= 3 \times 18 = 54°$

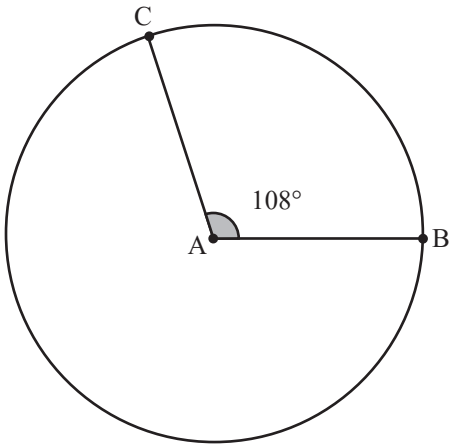
ग्रेड E $= 2 \times 18 = 36°$

आइए, अब इन कोणों का उपयोग करके वृत्त आलेख की रचना करते हैं।

चरण 1— जैसा नीचे के चित्र में दर्शाया गया है एक वृत्त बनाइए और त्रिज्या AB चिह्नित कीजिए—

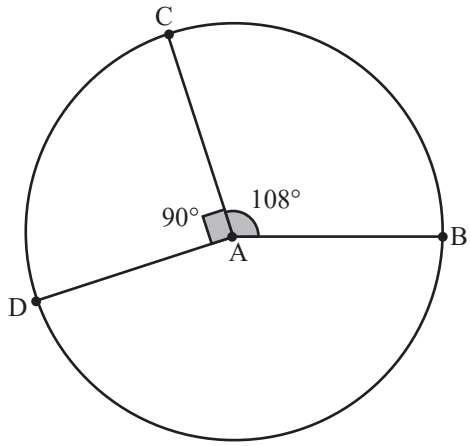



चरण 2— वृत्त का वह भाग बनाने के लिए जो कि ग्रेड A प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों का अनुपात प्रदर्शित करता हो, AB को आधार मानते हुए बिंदु A पर (वामावर्त) 108° का कोण मापिए और एक नई त्रिज्या AC को चिह्नित कीजिए।

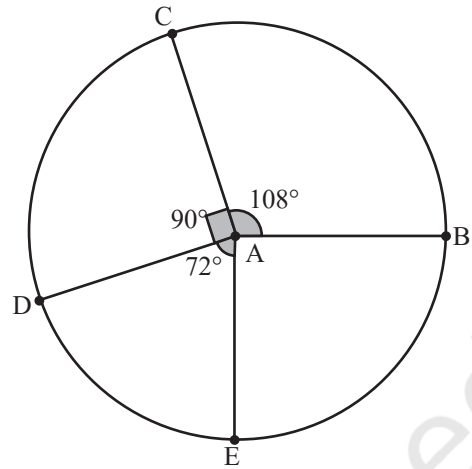



© NCERT not to be republished

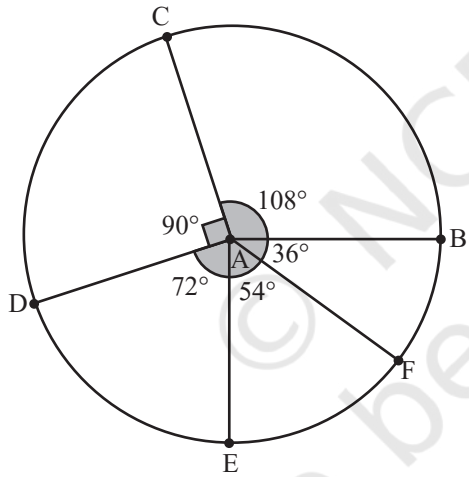
चरण 3 — अब AC से 90° का कोण मापिए और त्रिज्या AD खींचिए।



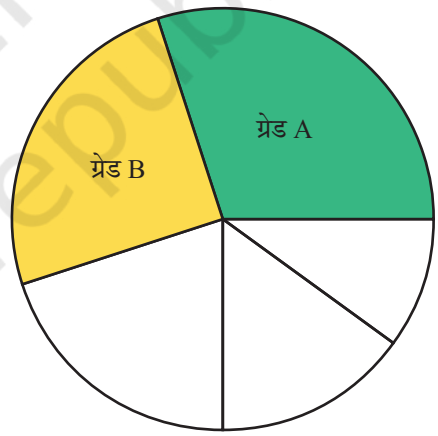

चरण 4 — AD से 72° का कोण मापिए और त्रिज्या AE खींचिए।




चरण 5, 6— इसी प्रकार हम बचे हुए वृत्त आलेख को पूरा कर सकते हैं।




चरण 7— आप वृत्त आलेख के विभिन्न भागों को उपयुक्त रंगों से रंग सकते हैं और उन पर नाम भी चिह्नित कर सकते हैं।




## आइए, पता लगाएँ

1. 360 व्यक्तियों के एक समूह को तीन ऋतुओं— वर्षा, शीत व ग्रीष्म — में से उनकी पसंदीदा ऋतु के लिए मतदान करने के लिए कहा गया। 90 व्यक्तियों ने ग्रीष्म ऋतु, 120 व्यक्तियों ने वर्षा ऋतु और बचे हुए व्यक्तियों ने शीत ऋतु के पक्ष में मतदान किया। इस सूचना को प्रदर्शित करने के लिए एक वृत्त आलेख बनाइए।
2. दर्शकों के पसंदीदा टी.वी. चैनल के विषय में निम्नलिखित सूचना के आधार पर वृत्त आलेख बनाइए।

   मनोरंजन— 50%, खेलकूद— 25%, समाचार— 15%, सूचना— 10%

© NCERT not to be republished

3. एक वृत्त आलेख बनाइए जो आपकी कक्षा के विद्यार्थियों के पसंदीदा विषयों को प्रदर्शित करता हो। आप तालिका में दिए गए प्रत्येक विषय के लिए विद्यार्थियों की संख्या के आँकड़े संगृहीत कर सकते हैं (प्रत्येक विद्यार्थी को मात्र एक विषय का ही चयन करना है।) इसके पश्चात विद्यार्थियों की इन संख्याओं को तालिका में लिखिए और वृत्त आलेख बनाइए।

| विषय | विद्यार्थियों की संख्या |
|---|---|
| भाषा | |
| कला शिक्षा | |
| व्यावसायिक शिक्षा | |
| सामाजिक विज्ञान | |
| शारीरिक शिक्षा | |
| गणित | |
| विज्ञान | |

## 3.6 व्युत्क्रमानुपात

क्या आपको तीन का नियम स्मरण है जब दो अनुपात समानुपाती होते हैं, अर्थात जब

$a : b :: c : d$, तब $d = \frac{bc}{a}$ होगा। ऐसे समानुपातों को **सीधा या प्रत्यक्ष समानुपात** कहते हैं। इसका उपयोग चौथी राशि ($d$) का मान ज्ञात करने के लिए करते हैं जब तीन राशियों ($a$, $b$ व $c$) के मान दिए गए हों।

**उदाहरण 1**— यदि 5 श्रमिक एक दिन में 4500 ईंटें एक स्थान से दूसरे स्थान तक ले जा सकते हैं तो एक दिन में 18000 ईंटें ले जाने के लिए कितने श्रमिकों की आवश्यकता होगी?

इसे समानुपात के कथन के रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है— 4500 : 18000 :: 5 : $x$ हम $x$ के मान को इस तरह से ज्ञात कर सकते हैं—

$$x = \frac{18000 \times 5}{4500} = 20$$

इस प्रकार आवश्यक श्रमिकों की संख्या 20 है।

**उदाहरण 2** — पुनीत के पिताजी अपनी मोटरसाइकिल को 30 km/h की गति से चलाते हुए लखनऊ से कानपुर तक 3 घंटे में पहुँचते हैं। यदि वे मोटरसाइकिल के स्थान पर कार चलाते हैं और गति 60 km/h हो तो बताइए कि उन्हें कानपुर पहुँचने में कितना समय लगेगा?

क्या हम इस समस्या को दिए गए समानुपात के कथन द्वारा व्यक्त कर सकते हैं— 30 : 60 :: 3 : x ? क्या मोटरसाइकिल की गति बढ़ने से यात्रा में लगने वाले समय में वृद्धि होगी या कमी?

गणित चर्चा

नीचे दी गई तालिका परिवहन के विभिन्न साधनों का उपयोग करने पर लखनऊ से कानपुर तक की यात्रा में लगने वाले समय को प्रदर्शित करती है—

| | पैदल | साइकिल | मोटरसाइकिल | कार |
|---|---|---|---|---|
| गति (किलोमीटर/घंटा) | 5 | 15 | 30 | 60 |
| समय (घंटे में) | 18 | 6 | 3 | 1.5 |

© NCERT not to be republished

तालिका में हम देखते हैं कि जब गति **बढ़ती** है तो समान दूरी के लिए यात्रा में लगने वाला समय **घटता** है।

? क्या समय समान दर (या गुणक) से घटता है?

तालिका में देखा जा सकता है कि साइकिल से जाना पैदल जाने की तुलना में 3 गुना (15 ÷ 5) तीव्र है। अर्थात यहाँ गति में 3 गुना की वृद्धि हुई है। यात्रा में लगने वाला समय भी 3 गुना (18 ÷ 6) घट गया है। गति उसी गुणक या दर से बढ़ी है जिस गुणक या दर से यात्रा में लगने वाला समय घटा है।

? जाँचिए कि क्या यही स्थिति परिवहन के अन्य साधनों के लिए भी इसी प्रकार रहती है।

चूँकि दोनों राशियाँ, गति व समय समान गुणक से परिवर्तित होती हैं अत: वे समानुपाती हैं। परंतु ये राशियाँ विपरीत दिशाओं में या व्युत्क्रम रूप से परिवर्तित होती हैं। ऐसे समानुपात, **व्युत्क्रमानुपात** कहलाते हैं।

पिछले पृष्ठ पर दी गई तालिका में हम देख सकते हैं कि परिवहन के सभी साधनों के लिए गति व समय का गुणनफल समान है जो 90 km है।

दो राशियाँ $x$ व $y$ व्युत्क्रमानुपाती होती हैं यदि उनके बीच में $xy = k$ के प्रकार का कोई संबंध हो, जहाँ $k$ कोई अचर है।

परंतु ध्यान दीजिए कि पूर्व में बताए गए उदाहरण में यदि $x$ गति को प्रदर्शित करता है एवं $y$ लगने वाले समय को प्रदर्शित करता है तो $k$ लखनऊ और कानपुर के बीच की दूरी है जो स्थिर रहती है।

× 4, × 3, × 2

| गति (km/h) | 5 | 15 | 30 | 60 |
|---|---|---|---|---|
| समय (h) | 18 | 6 | 3 | 1.5 |

$\times \frac{1}{3}$, $\times \frac{1}{2}$, $\times \frac{1}{4}$

इस प्रकार यदि राशियाँ $x$ व $y$ व्युत्क्रमानुपाती हों व $x_1$ और $x_2$, $x$ के मान हों जिनके संगत $y$ के मान $y_1$ और $y_2$ हों तब

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = k \text{ (एक अचर)}$$

इससे हम देख सकते हैं कि $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ है।

आइए, पता लगाते हैं कि क्या यह परिवहन के अन्य साधनों के लिए भी सत्य है, जैसे — पैदल चलना व कार से जाना। आइए, गति प्रदर्शित करने के लिए $x$ और समय प्रदर्शित करने के लिए $y$ का उपयोग करते हैं।

$$x_1 = 5, x_2 = 60, y_1 = 18, \quad y_2 = 1.5$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{5}{60} = 0.083333...$$

$\frac{1.5}{18}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$ का मान क्या है? यह मान भी 0.083333... है!



© NCERT not to be republished

## आइए, पता लगाएँ

1. इनमें से किन स्थितियों में $x$ व $y$ व्युत्क्रमानुपाती हैं?

(i)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 40 | 80 | 25 | 16 |
| $y$ | 20 | 10 | 32 | 50 |

(ii)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 40 | 80 | 25 | 16 |
| $y$ | 20 | 10 | 12.5 | 8 |

(iii)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 30 | 90 | 150 | 10 |
| $y$ | 15 | 5 | 3 | 45 |

2. यदि $x$ और $y$ व्युत्क्रमानुपाती हों तो रिक्त कोष्ठकों को भरिए।

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 16 | 12 | | 36 |
| $y$ | 9 | | 48 | |

**उदाहरण 3** — एक सड़क बनाने के लिए 20 श्रमिकों को 4 दिन का समय लगता है। समान लंबाई की सड़क बनाने में 10 श्रमिकों को कितना समय लगेगा?

यदि हम श्रमिकों की संख्या में कमी करते हैं तो कार्य को पूरा होने के लिए लगने वाले दिनों की संख्या उसी दर या गुणक से वृद्धि करेगी। अत: ये राशियाँ व्युत्क्रमानुपाती हैं। अत: $x_1 y_1 = x_2 y_2$ है।

इस प्रकार $$20 \times 4 = 10 \times y_2$$

$$y_2 = \frac{20 \times 4}{10} = 8$$

अत: 10 श्रमिकों को कार्य पूरा करने में 8 दिन लगेंगे।

हम देखते हैं कि जब श्रमिकों की संख्या आधी कर दी जाती है तो कार्य पूर्ण करने में लगने वाला समय दोगुना हो जाता है। राशियाँ व्युत्क्रमानुपाती होती हैं यदि एक राशि को गुणक $n$ से परिवर्तित करने पर दूसरी राशि व्युत्क्रम गुणक $\frac{1}{n}$ से परिवर्तित होती है।

**उदाहरण 4**— 2 पंप मिलकर किसी पानी की टंकी को 18 घंटे में भर सकते हैं। यदि हम उसी प्रकार के 2 पंप और जोड़ दें तो टंकी को भरने में कितना समय लगेगा?

© NCERT not to be republished

यदि हम 2 पंप और जोड़ देते हैं तो हमारे पास कुल 4 पंप हो जाएँगे। आइए, 4 पंपों से टंकी भरने के समय को $x$ से प्रदर्शित करते हैं। यदि हम पंपों की संख्या में $n$ गुना वृद्धि करते हैं तो टंकी भरने में लगने वाला समय उसी गुणक $n$ से कम होगा। अत: ये राशियाँ व्युत्क्रमानुपाती होती हैं। चूँकि ये राशियाँ व्युत्क्रमानुपाती होती हैं अत: इनका गुणनफल अचर रहेगा। इस प्रकार

$$2 \times 18 = 4 \times x$$

$$x = \frac{2 \times 18}{4} = 9$$

अत: टंकी भरने में 9 घंटे का समय लगेगा।

**उदाहरण 5**— एक विद्यालय में 80 विद्यार्थियों के लिए 15 दिनों की भोजन सामग्री है। यदि 20 और विद्यार्थी विद्यालय में प्रवेश ले लेते हैं तो बताइए कि भोजन सामग्री कितने दिनों के लिए पर्याप्त होगी?

अधिक विद्यार्थी → भोजन सामग्री कम दिनों के लिए पर्याप्त होगी। अत: ये राशियाँ व्युत्क्रमानुपाती हैं। यदि दिनों की संख्या $x$ है तो—

$$80 \times 15 = 100 \times x$$

$$x = \frac{80 \times 15}{100} = 12$$

अत: 100 विद्यार्थियों के लिए भोजन सामग्री मात्र 12 दिनों के लिए ही पर्याप्त होगी।

**उदाहरण 6**— राम को सब्जियों की किसी दी गई मात्रा को काटने में 1 घंटे का समय लगता है और श्याम को सब्जियों की उसी मात्रा को काटने में 1.5 घंटे का समय लगता है। यदि वे दोनों मिलकर यह कार्य करते हैं तो बताइए कि सब्जियों को काटने में कितना समय लगेगा?

इसे हल करने के लिए हम सब्जियों की दी गई मात्रा को काटने के कार्य को 1 इकाई कार्य मानकर विचार करते हैं। आइए, प्रत्येक व्यक्ति द्वारा 1 घंटे में किए गए कार्य को ज्ञात करते हैं।

- राम सब्जियाँ काटने के कार्य को 1 घंटे में पूर्ण करता है। अत: 1 घंटे में वह 1 इकाई कार्य करता है।
- श्याम सब्जियाँ काटने के कार्य को 1.5 घंटे में पूर्ण करता है। अत: 1 घंटे में वह $\frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$ इकाई कार्य करता है।

इसलिए राम व श्याम दोनों द्वारा 1 घंटे में किया गया कार्य $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ इकाई है।

इस प्रकार यदि दोनों मिलकर कार्य करते हैं तो $\frac{5}{3}$ इकाई कार्य को पूर्ण करने के लिए उन्हें 1 घंटे का समय लगता है। तो बताइए कि 1 इकाई कार्य को पूर्ण करने के लिए उन्हें कितना समय लगेगा?

गणित चर्चा

क्या कार्य की मात्रा एवं कार्य को पूर्ण करने में लगने वाला समय समानुपाती होगा या व्युत्क्रमानुपाती होगा?

कार्य की मात्रा एवं कार्य को पूर्ण करने में लगने वाला समय समानुपाती होगा। अत: इसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है—

© NCERT not to be republished

$\frac{5}{3} : 1 :: 1 : x$ जहाँ $x$ कार्य पूर्ण करने में लगने वाला समय है।

चूँकि यह समानुपाती है, अत: हम जानते हैं कि

$$\frac{5}{3} \times x = 1 \times 1$$

$$x = \frac{1 \times 1}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

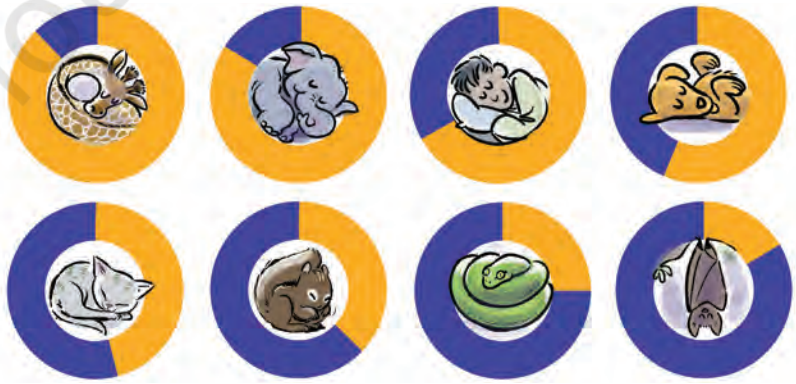
अत: यदि दोनों मिलकर सब्जियाँ काटते हैं तो वे इस कार्य को $\frac{3}{5}$ घंटे में पूर्ण करेंगे।

## ? आइए, पता लगाएँ

1. नीचे दी गई राशियों के कौन-से युग्म व्युत्क्रमानुपाती हैं?
   (i) पानी की एक टंकी को भरने के लिए नलों की संख्या और टंकी भरने में लगने वाला समय।
   (ii) एक निश्चित आकार की दीवार को रंगने के लिए काम पर लगाए गए पेंटरों (Painters) की संख्या और लगने वाले दिनों की संख्या।
   (iii) एक कार जितनी दूर तक चल सकती है और कार की ईंधन टंकी में पेट्रोल की मात्रा।
   (iv) एक निश्चित दूरी तय करने के लिए साइकिल चालक की गति और लगने वाला समय।
   (v) खरीदे गए कपड़े की लंबाई और प्रति मीटर के लिए एक निश्चित दर पर चुकाई गई धनराशि।
   (vi) एक पुस्तक में पृष्ठों की संख्या और पढ़ने की एक निश्चित गति के साथ पुस्तक को पढ़ने में लगने वाला समय
2. यदि 24 पेंसिलों का मूल्य ₹120 है तो बताइए 20 पेंसिलों का मूल्य कितना होगा?
3. एक इमारत पर रखी टंकी में इमारत में रहने वाले 20 परिवारों के लिए 6 दिनों के लिए पर्याप्त पानी है। यदि इमारत में 10 और परिवार रहने के लिए आ जाते हैं तो टंकी का पानी कितने दिनों के लिए पर्याप्त होगा? इस प्रश्न को हल करने के लिए आपको कौन-से पूर्वानुमान लगाने की आवश्यकता है?

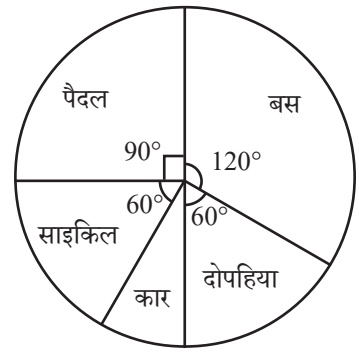
गणित चर्चा

4. नीचे दिए गए चार्ट्स (charts) को देखकर प्रत्येक प्राणी के एक दिन में सोने के औसत घंटों को लिखिए। दी गई सूची से उचित घंटों का चयन कीजिए—15, 2.5, 20, 8, 3.5, 13, 10.5, 18



© NCERT not to be republished

5. दाईं ओर दिया गया वृत्त आलेख विद्यालय जाने के लिए विद्यार्थियों द्वारा उपयोग में लाए गए परिवहन के साधनों को जानने के लिए किए गए सर्वेक्षण का परिणाम प्रदर्शित करता है। वृत्त आलेख का अध्ययन कीजिए और दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए।




(i) सर्वाधिक प्रचलित परिवहन का साधन कौन-सा है?

(ii) विद्यार्थियों का कितना भाग कार से विद्यालय जाता है?

(iii) यदि 18 विद्यार्थी कार से विद्यालय जाते हैं तो सर्वेक्षण में कितने विद्यार्थियों ने भाग लिया था? कितने विद्यार्थी विद्यालय जाने के लिए बस का उपयोग करते हैं?

(iv) कौन-से दो परिवहन के साधनों द्वारा समान संख्या में विद्यार्थी विद्यालय जाते हैं?

6. तीन श्रमिक एक चारदीवारी को 4 दिनों में रंग सकते हैं। यदि समूह में एक और श्रमिक सम्मिलित होता है तो सभी श्रमिकों को कार्य को पूर्ण करने में कितने दिन लगेंगे? बताइए कि यहाँ आपको कौन-से अनुमान लगाने की आवश्यकता है?

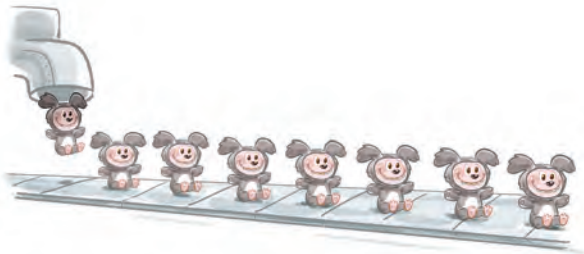
7. एक पंप द्वारा समान आकार की 2 टंकियों को भरने में 6 घंटे का समय लगता है। बताइए कि इसी पंप के द्वारा ऐसी 5 टंकियों को भरने में कितना समय लगेगा?

8. कुर्सियों के एक दिए गए समूह को 25 पंक्तियों में व्यवस्थित किया गया है और प्रत्येक पंक्ति में 12 कुर्सियाँ हैं। यदि प्रत्येक पंक्ति में 20 कुर्सियों को पुनर्व्यवस्थित किया जाए तो इस नई व्यवस्था में कितनी पंक्तियाँ होंगी?

9. एक विद्यालय में प्रतिदिन 8 कालांश होते हैं और प्रत्येक कालांश 45 मिनट समयावधि का होता है। यह मानते हुए कि प्रतिदिन विद्यालय लगने के घंटों की संख्या समान है, यदि विद्यालय में प्रतिदिन 9 कालांश हों तो बताइए कि प्रत्येक कालांश कितना लंबा होगा?

10. एक छोटा पंप एक टंकी को 3 घंटों में भर सकता है जबकि एक बड़ा पंप उसी टंकी को 2 घंटों में भर सकता है। यदि दोनों पंप एक साथ उपयोग किए जाएँ तो बताइए कि टंकी को भरने में कितना समय लगेगा?

11. एक कारखाने में 63 दिनों में दी गई संख्या के खिलौने बनाने के लिए 42 मशीनों की आवश्यकता होती है। बताइए कि 54 दिनों में उतनी ही संख्या में खिलौने बनाने के लिए कितनी मशीनों की आवश्यकता होगी?



12. एक कार 60 km/h की गति से चलते हुए गंतव्य तक पहुँचने में 2 घंटे का समय लेती है। यदि कार 80 km/h की गति से चले तो कार उसी गंतव्य तक पहुँचने में कितना समय लेगी?

© NCERT not to be republished

## सारांश

- $a : b : c : d : \ldots$ के रूप में अनुपात यह दर्शाता है कि पहली राशि की प्रत्येक $a$ इकाई के लिए दूसरी राशि की $b$ इकाई हैं, तीसरी राशि की $c$ इकाई हैं और यही क्रम आगे भी चलता रहेगा।
- यदि $x$ को $p : q : r : s : \ldots$ के अनुपात में अनेक भागों में विभाजित किया जाता है तो पहले भाग की मात्रा $x \times \frac{p}{(p+q+r+s+\ldots)}$, है, दूसरे भाग की मात्रा $x \times \frac{q}{(p+q+r+s+\cdots)}$, है और शेष भागों की मात्रा इसी क्रम से आगे भी चलती रहेगी।
- दो राशियाँ समानुपाती होती हैं जब वे दोनों समान गुणक से परिवर्तित होती हैं और उनका भागफल समान बना रहता है। उदाहरण के लिए — यदि दो राशियाँ $x$ व $y$ समानुपाती हों एवं $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ व $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ $x$ व $y$ के संगत मान हों तब $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \cdots = k$, जहाँ $k$ एक अचर है।
- दो राशियाँ व्युत्क्रमानुपाती होती हैं यदि जब एक राशि गुणक $n$ से बदलती तो अन्य राशि इसके व्युत्क्रम $\frac{1}{n}$ से परिवर्तित हो। उदाहरण के लिए — यदि $x$ व $y$ दो राशियाँ हों जो व्युत्क्रमानुपाती हैं एवं $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ व $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ $x$ व y के संगत मान हों तब $x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 = \cdots = n$, जहाँ $n$ एक अचर है।

© NCERT not to be republished