4 कुछ ज्यामितीय संरचनाओं की खोज

0890CH04

इस अध्याय में हम दो ज्यामितीय संरचनाओं की खोज करेंगे। हम खंडकों (Fractals) को पढ़ेंगे जो स्व-समान आकृतियाँ हैं। यह आकृतियाँ सूक्ष्म तथा अति सूक्ष्म मापों पर बारंबार अर्थात सतत रूप से समरूप प्रतिरूपों को प्रदर्शित करती हैं। इसके पश्चात हम ठोस वस्तुओं या पदार्थ के दृश्यांकन करने के विभिन्न प्रकार देखेंगे।

4.1 खंडक

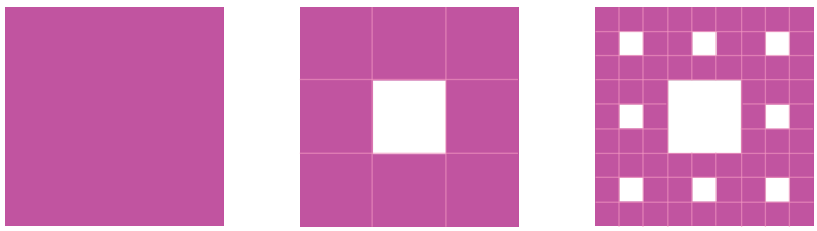
फर्न का पौधा प्रकृति में पाए जाने वाले खंडक (फ्रैक्टल) का अत्यंत सुंदर उदाहरण है। फर्न के पौधे की पत्तियाँ स्वयं की छोटी-छोटी प्रतिकृतियों जैसी दिखाई देती हैं। इन पत्तियों की उप पत्तियाँ भी अपनी ही और छोटी प्रतिकृतियों के समान होती हैं। इसी प्रकार यह क्रम निरंतर चलता रहता है।

स्व-समरूपता की यह धारणा वृक्षों (जिनके तने में शाखाएँ और शाखाओं की उप-शाखाएँ होती हैं और यह क्रम निरंतर चलता रहता है।), बादलों, तटीय-रेखाओं, पहाड़ों, आकाशीय बिजली और प्रकृति में मिलने वाली बहुत-सी अन्य वस्तुओं में भी होती है।

अन्य गणितीय खंडक भी बहुत सुंदर हो सकते हैं। इनमें से हम कुछ के विषय में इस अध्याय में जानेंगे और समझेंगे।

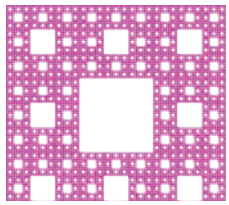
सिएरपिंस्की चटाई

पोलिश गणितज्ञ सिएरपिंस्की ने खंडक के एक प्रकार की खोज की जिसे **सिएरपिंस्की चटाई** के रूप में जाना जाता है। इसमें एक वर्ग को नौ छोटे वर्गों में विभाजित किया जाता है और इसके पश्चात इसके मध्य वर्ग को हटा दिया जाता है (नीचे दी गई आकृति देखिए), तत्पश्चात इस प्रक्रिया को शेष आठ वर्गों पर भी दोहराया जाता है और यह क्रम इसी प्रकार चलता रहता है। इस प्रकार सूक्ष्म तथा अति-सूक्ष्म मापों पर भी आपको यही प्रतिरूप दिखाई देता है।



चरण 0 चरण 1 चरण 2 . . .

© NCERT not to be republished



सिएरपिंस्की चटाई

? सिएरपिंस्की चटाई बनने वाली आकृति-शृंखला के कुछ प्रारंभिक चरण (कम-से-कम चरण 2 तक) बनाइए।

इसकी रचना के अनुसार अनुक्रम के प्रत्येक चरण में—

(i) समान आकार के वर्ग आकृति में समाहित होते हैं तथा इन वर्गों का आकार प्रत्येक चरण के बढ़ने पर सूक्ष्म और अति-सूक्ष्म होता जाता है तथा

(ii) वर्गाकार छिद्र होते हैं जो वर्गों को हटाने पर निर्मित होते हैं।

? क्या आप प्रत्येक चरण में शेष छिद्रों और वर्गों की संख्या में कोई प्रतिरूप देखते हैं?

माना R_n, nवें चरण में शेष वर्गों की संख्या दर्शाता है तथा H_n, nवें चरण में छिद्रों की संख्या दर्शाता है।

आइए, यह समझने का प्रयास करें कि यह संख्याएँ किस प्रकार बढ़ती हैं। इसके लिए हमें यह विश्लेषण करना होगा कि पिछले चरण से ये शेष छिद्र और वर्ग किस प्रकार निर्मित होते हैं।

किसी दिए गए चरण, मान लीजिए nवें चरण पर शेष रहने वाला प्रत्येक वर्ग, $(n + 1)$वें चरण पर शेष रहने वाले 8 वर्गों को बढ़ाता है। इस प्रकार हमें प्राप्त होता है—

$$R_{n+1} = 8\,R_n$$

? क्या इसका प्रयोग R_n के लिए सूत्र प्राप्त करने में किया जा सकता है?

हमारे पास है —

$$R_0 = 1$$
$$R_1 = 8 \times 1 = 8$$
$$R_2 = 8 \times 8 = 8^2$$

सामान्यत:, $R_n = 8^n$

? इसी प्रकार हम दिए गए चरण पर छिद्रों की संख्या किस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं?

nवें चरण पर शेष प्रत्येक वर्ग, $(n + 1)$वें चरण पर एक छिद्र उत्पन्न करता है। nवें चरण पर प्राप्त सभी छिद्र, $(n + 1)$वें चरण पर भी शेष होते हैं। इस प्रकार

$$H_{n+1} = H_n + R_n$$

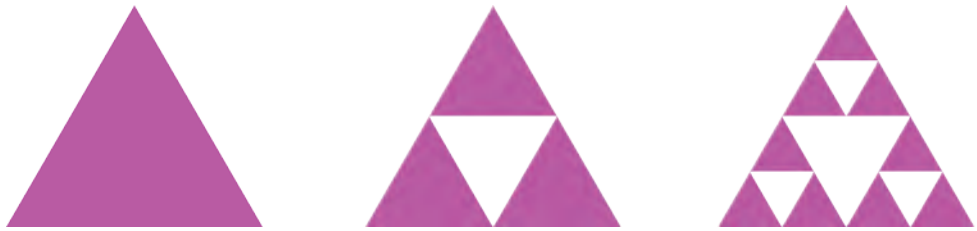
अत: हमें प्राप्त है—

$$\begin{array}{ll} R_0 = 1 & H_0 = 0 \\ R_1 = 8 & H_1 = 1 \\ R_2 = 8^2 & H_2 = 1 + 8 \\ R_3 = 8^3 & H_3 = 1 + 8 + 8^2 \\ & \vdots \end{array}$$

© NCERT not to be republished

सिएरपिंस्की गैस्केट

सिएरपिंस्की ने इसी प्रकार से एक और खंडक बनाया। एक समबाहु त्रिभुज को उसकी भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाकर चार समान समबाहु त्रिभुजों में बाँटा जाता है। तत्पश्चात केंद्रीय त्रिभुज को हटा दिया जाता है। इस प्रक्रिया को शेष तीन त्रिभुजों के साथ दोहराया जाता है और यह क्रम इसी प्रकार चलता रहता है।



चरण 0 चरण 1 चरण 2 . . .

सिएरपिंस्की त्रिभुज

? दर्शाइए कि किसी समबाहु त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने पर हम इसे चार समान समबाहु त्रिभुजों में विभाजित करते हैं।

[**संकेत**— ध्यान दीजिए कि कोने वाले त्रिभुज समद्विबाहु हैं।]

यह खंडक **सिएरपिंस्की त्रिभुज** अथवा **गैस्केट** कहलाता है।

? **आइए, पता लगाएँ**

1. सिएरपिंस्की त्रिभुज तक ले जाने वाले आकृति अनुक्रम के प्रारंभिक कुछ चरणों (कम-से-कम चरण 2 तक) को चित्रित कीजिए।
2. सिएरपिंस्की त्रिभुज तक जाने वाले आकृति अनुक्रम के प्रत्येक चरण में शेष छिद्रों तथा त्रिभुजों की संख्या ज्ञात कीजिए।
3. सिएरपिंस्की खंडक तक ले जाने वाले प्रत्येक आकृति अनुक्रम के nवें चरण पर शेष क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। आरंभिक वर्ग या त्रिभुज का क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाई मान लीजिए।

© NCERT not to be republished

कोच हिमकण

कोच हिमकण एक अन्य खंडक है जिसका नामकरण स्वीडन के गणितज्ञ 'वोन कोच' के नाम पर किया गया है। वर्ष 1904 में प्रथम बार इन्होंने इसका वर्णन किया था। कक्षा 6 की पाठ्यपुस्तक *गणित प्रकाश* में भी हम इस खंडक से अवगत हो चुके हैं।

चरण 0 चरण 1 चरण 2 . . .

कोच हिमकण

इसका निर्माण हम एक समबाहु त्रिभुज से आरंभ करते हैं। इसकी प्रत्येक भुजा—

(i) तीन समान भागों में विभाजित की जाती है तथा

(ii) मध्य-भाग में एक समबाहु त्रिभुज बनाया जाता है और इसके पश्चात इस मध्य भाग को हटा दिया जाता है।

प्रभावी रूप से प्रत्येक भुजा एक उभरी हुई संरचना ⌒ में परिवर्तित हो जाती है। इस प्रक्रिया से प्राप्त नई आकृतियों में भी यही क्रम दोहराया जाता है और यह क्रम इसी प्रकार निरंतर चलता रहता है।

? आइए, पता लगाएँ

1. ऐसे आकार अनुक्रम के कुछ प्रारंभिक चरण (कम-से-कम चरण 2 तक) बनाइए जो कोच हिमकण तक ले जाते हैं।
2. कोच हिमकण तक ले जाने वाले आकार अनुक्रम के nवें चरण में भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।
3. अनुक्रम के nवें चरण की आकृति का परिमाप ज्ञात कीजिए। प्रारंभिक समबाहु त्रिभुज की भुजा की लंबाई 1 इकाई मान लीजिए।

© NCERT not to be republished

कला में खंडक

मानव-निर्मित कलाओं में पूर्व से ही खंडक का प्रयोग किया जाता रहा है। संभवतः ऐसे प्राचीन खंडक भारत के मंदिरों में दिखाई देते हैं। इसका एक उदाहरण मध्य प्रदेश के खजुराहो में स्थित कंदरिया महादेव मंदिर में भी देखने को मिलता है जो लगभग 1025 सामान्य संवत में पूर्ण हुआ था। यहाँ पर एक ऊँची मंदिर संरचना देखने को मिलती है जो संपूर्ण ढाँचे की सूक्ष्म प्रतिआकृतियों से निर्मित हुई है। इन पर इसी ढाँचे की अति सूक्ष्म प्रतिआकृतियाँ भी हैं और इसी प्रकार यह क्रम निरंतर चलता रहता है। खंडक जैसा प्रतिरूप मदुरै, हंपी, रामेश्वरम, वाराणसी के मंदिरों के साथ-साथ अन्य मंदिरों में भी विद्यमान हैं।

कंदरिया महादेव मंदिर

पारंपरिक अफ्रीकी सभ्यताओं में भी खंडक बहुत प्रचलित है। उदाहरण के लिए— नाइजीरिया की 'फुलानी' जनजाति की विवाह पद्धति में दिए जाने वाले कंबलों में प्राय: खंडक संरचनाएँ देखने को मिलती हैं।

नाइजीरियाई फुलानी कंबल

चित्र में दर्शाए गए कंबल में हीरे के आकार के प्रतिरूप हैं जिनके भीतर हीरे के आकार के छोटे प्रतिरूप हैं और इसी प्रकार यह क्रम निरंतर रूप से चलता रहता है।

निर्विवाद रूप से खंडक कला के आधुनिक गुरु डच कलाकार एम.सी.एशर हैं। हम पूर्व में ही देख चुके हैं कि उनके कुछ प्रिंट गणितीय विषयवस्तु टाइलिंग की खोज करते हैं। उनकी कलाकृति 'स्मॉलर एंड स्मॉलर' खंडक पर आधारित एक प्रसिद्ध उदाहरण है जो छिपकलियों की एक जैसी अभिकल्पना को सूक्ष्म से सूक्ष्मतर रूप में प्रदर्शित करता है। नीचे एशर के 'स्मॉलर एंड स्मॉलर' से प्रेरित एक उदाहरण दिया गया है—

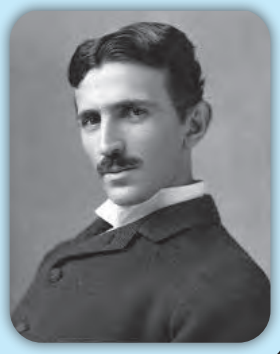
4.2 ठोसों का दृश्यांकन

अपनी कल्पना में बनाइए

? इस खंड का आरंभ हम दृश्यांकन के अभ्यास से करेंगे। प्रत्येक संकेत पर अपने मित्र से बात कर सकते हैं, संकेतों का प्रयोग कर सकते हैं या हवा में आकृति बना सकते हैं परंतु कागज पर वास्तविक चित्र नहीं बना सकते!

मेरी विधि भिन्न है। मैं कार्य को करने की शीघ्रता नहीं करता। जैसे ही मुझे कोई विचार आता है, मैं तभी अपनी कल्पना में उसे बनाना आरंभ कर देता हूँ। मैं उसकी संरचना में परिवर्तन, सुधार और यंत्र को पूर्ण रूप से अपने मस्तिष्क में ही संचालित करता हूँ।

—निकोलस टेस्ला (1856–1943) महान सर्बियाई-अमेरिकन अभियंता और आविष्कारक थे इन्होंने विद्युत अभियांत्रिकी तथा अन्य क्षेत्रों में मूलभूत योगदान दिया।

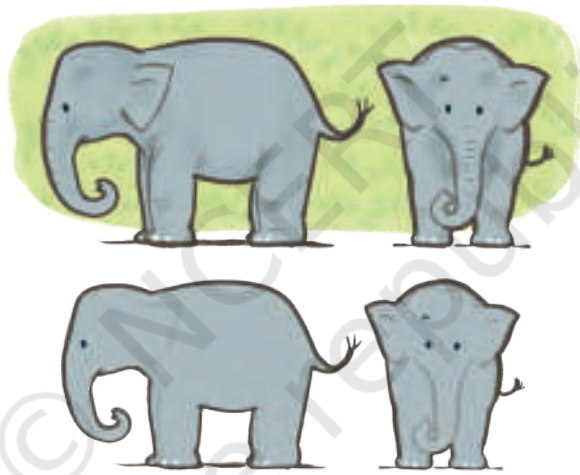


1. अपने नाम को चित्रित कीजिए इसके पश्चात अपने नाम के वर्णों को अंत से पढ़ना आरंभ कीजिए। सुनिश्चित कीजिए कि आप इसे देखते हुए करें न कि बोलते हुए। अब आप अपना नाम देखिए! यह प्रयोग आप अपने मित्रों के नाम के साथ कीजिए।

© NCERT not to be republished

2. एक काल्पनिक वर्ग की संलग्न भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाइए और मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली इस रेखा के अनुदिश वर्ग के चारों कोनों को काटिए। कौन-सी आकृति शेष रहती है? आप एक अन्य वर्ग को निर्मित करने हेतु इन चारों कोनों को किस प्रकार पुन: संयोजित कर सकते हैं?
3. एक समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा के तीन समान खंड को चिह्नित कीजिए। चिह्नित बिंदुओं के अनुसार त्रिभुज के तीनों कोने काटिए। बताइए कि आप कौन-सी आकृति प्राप्त करते हैं?
4. एक वर्ग की भुजाओं के तीन समान भाग चिह्नित कीजिए और चिह्नित बिंदुओं के अनुसार वर्ग के कोने काटिए। बताइए कौन-सी आकृति शेष रहती है?

जब हम किसी ठोस वस्तु को देखते हैं तो वास्तव में हम उसकी **छवि** को विशिष्ट प्रेक्षण बिंदु से देख रहे होते हैं। हमारे प्रेक्षण बिंदु के आधार पर इस छवि का बाह्य **रेखाचित्र** रोचक रूप से भिन्न-भिन्न होता है!



संभवतः आपने स्वयं वस्तुओं के रोचक रेखाचित्रों पर तस्वीर खींचते समय या किसी वस्तु की छाया को देखते समय ध्यान दिया होगा — या संभवत: आपने नीचे दिए गए कार्टून भी देखे होंगे जिसमें एक पात्र दीवार से टकराकर उसके पार चला जाता है और दीवार में अपनी बाह्य रूपरेखा जैसा रिक्त स्थान छोड़ जाता है!

© NCERT not to be republished

पिछली कक्षाओं में आप ऐसे ठोस आकारों को देख चुके हैं जो हाथी और बिल्ली से बहुत ही सरल हैं, जैसे— घन, गोला, बेलन और शंकु। विभिन्न प्रेक्षण बिंदुओं से देखने पर इनकी बाह्य रूपरेखा कैसी दिखाई देगी?

? क्या आप एक ऐसा ठोस और एक प्रेक्षण बिंदु बता सकते हैं जिनसे निम्नलिखित परिणामी स्थितियाँ प्राप्त होंगी? यदि ऐसा है तो आप ठोस को, दीवार के पार जाने की कल्पना कर सकते हैं, जैसे— टॉम ने किया था जो अपनी छवि के अनुरूप रिक्त स्थान छोड़ता है।

(i) एक ठोस जिसकी बाह्य रूपरेखा एक वर्ग है।

(ii) एक ठोस जिसकी बाह्य रूपरेखा वृत्तीय है।

(iii) एक ठोस जिसकी बाह्य रूपरेखा त्रिभुजाकार है।

? जैसा कि हमने हाथी के उदाहरण में देखा एक दिए हुए ठोस को विभिन्न प्रेक्षण बिंदुओं से देखने पर विभिन्न रूपरेखाएँ प्राप्त हो सकती हैं। क्या आप ऐसे ठोसों की कल्पना कर सकते हैं जिनकी निम्न विरोधाभासी रूपरेखाएँ हों?

सोचने के लिए थोड़ा समय लीजिए और यदि आपके लिए इसका दृश्यांकन कठिन है तो आप अपने आस-पास की वस्तुओं अथवा वे ठोस जो आप अगले खंड में बनाएँगे उनका उपयोग कर सकते हैं। इन्हें आप किसी भी दिशा से देख सकते हैं; यहाँ तक कि वस्तु के ऊपर से भी।

(i) एक ठोस जिसकी बाह्य छवि एक प्रेक्षण बिंदु से आयताकार और दूसरे प्रेक्षण बिंदु से वृत्ताकार है।

(ii) एक ठोस जिसकी बाह्य छवि एक प्रेक्षण बिंदु से वृत्ताकार और दूसरे प्रेक्षण बिंदु से त्रिभुजाकार है।

(iii) एक ठोस जिसकी बाह्य छवि एक प्रेक्षण बिंदु से आयताकार और दूसरे प्रेक्षण बिंदु से त्रिभुजाकार है।

(iv) एक ठोस जिसकी बाह्य छवि एक प्रेक्षण बिंदु से समलंब रूपी और दूसरे प्रेक्षण बिंदु से वृत्ताकार है।

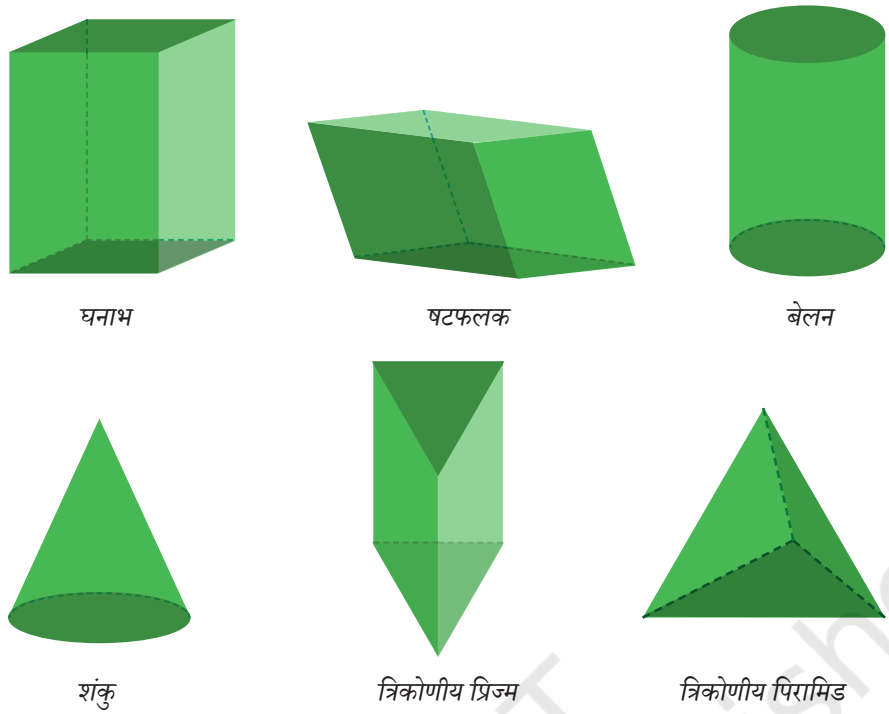
(v) एक ठोस जिसकी बाह्य छवि एक प्रेक्षण बिंदु से पंचभुजीय और दूसरे प्रेक्षण बिंदु से आयताकार है।

? क्या इनमें से प्रत्येक स्थिति के लिए अद्वितीय ठोस होते हैं या क्या आप कई अन्य संभावनाएँ बता सकते हैं?

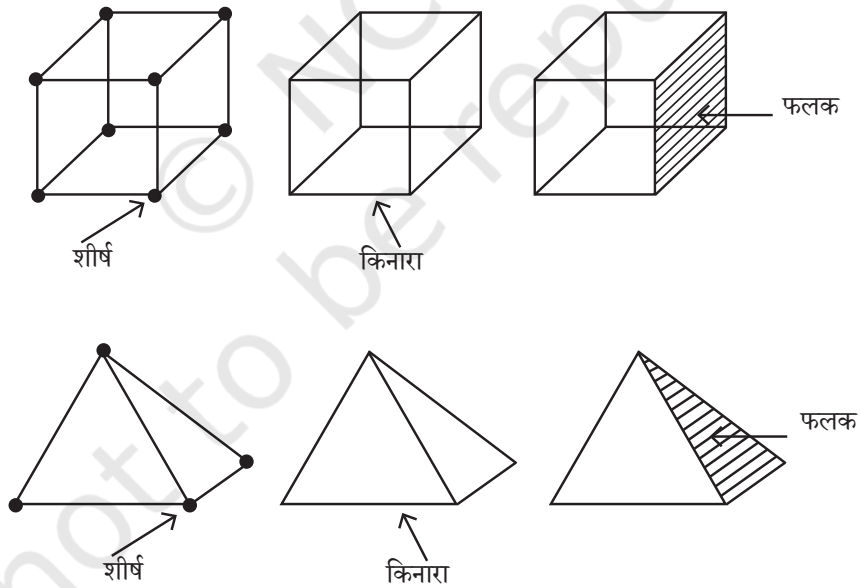
ठोसों का निर्माण

कई आधारभूत ठोस, जैसे— घनाभ, समांतर षटफलक, बेलन, शंकु, प्रिज्म और पिरामिड मुड़ सकने वाले पदार्थों, जैसे— कागज, गत्ता और यहाँ तक कि धातु की चादरों से बनाए जा सकते हैं! यह खोखले ठोस को निर्मित करने की एक विधि है।

© NCERT not to be republished



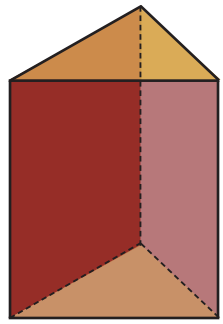
ऐसे ठोसों की चर्चा करते समय, जिनके किनारों पर सपाट सतहें हों, उसके मूल घटकों— फलक, किनारे तथा शीर्ष का उल्लेख करना उचित है।



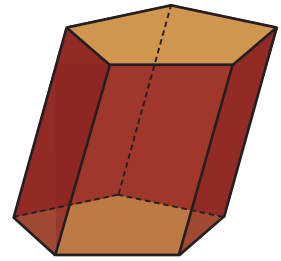
फलक किसी ठोस की समतल या सपाट सतह होती है जो इसकी सीमा निर्धारित करती है। **किनारे** वे रेखाखंड हैं जो फलकों की भुजा बनाते हैं और **शीर्ष** वे बिंदु होते हैं जहाँ किनारे मिलते हैं। उदाहरण के लिए— एक घनाभ अथवा घन के 6 फलक, 12 किनारे तथा 8 शीर्ष होते हैं।

© NCERT not to be republished

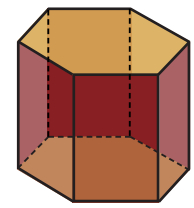
प्रिज्म और पिरामिड के कई प्रकार हैं, जिनके नाम उनके फलकों के आकार पर निर्भर करते हैं।



त्रिभुजीय प्रिज्म



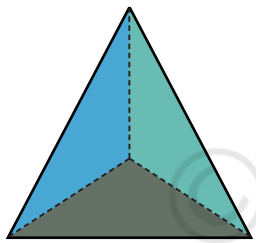
पंचभुजीय प्रिज्म



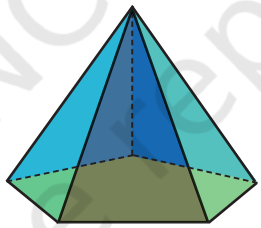
षटभुजीय प्रिज्म

प्रिज्म— एक प्रिज्म में सामान्यत: सम्मुख फलकों पर दो सर्वांगसम बहुभुज होते हैं जिनके किनारे इन बहुभुजों के संगत शीर्षों को जोड़ते हैं। अन्य सभी फलक समांतर चतुर्भुज होते हैं। सर्वांगसम बहुभुजों के आकार के आधार पर इन प्रिज्मों को त्रिभुजीय प्रिज्म, पंचभुजीय प्रिज्म आदि कहा जा सकता है।

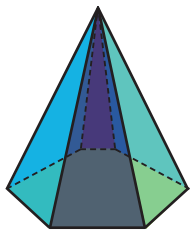
पिरामिड— सामान्यत: एक पिरामिड के आधार में एक बहुभुज होता है और उसके बाहर एक बिंदु होता है तथा उसके किनारे इस बिंदु को आधार के सभी शीर्षों से जोड़ते हैं। आधार के आकार के अनुसार पिरामिड को त्रिभुजीय पिरामिड, वर्गीय पिरामिड, पंचभुजीय पिरामिड आदि कहा जाता है। एक त्रिभुजीय पिरामिड **चतुष्फलक** के रूप में भी जाना जाता है।



त्रिभुजीय पिरामिड



पंचभुजीय पिरामिड



षटभुजीय पिरामिड

? यदि किसी प्रिज्म के सर्वांगसम बहुभुजों में 10 भुजाएँ हैं तो पिरामिड में कितने फलक, कोरे तथा शीर्ष होंगे? यदि बहुभुज में n भुजाएँ हों तो फलक, कोरें तथा शीर्ष की संख्या कितनी होंगी?

? यदि एक पिरामिड के आधार में 10 भुजाएँ हैं तो इस पिरामिड के कितने फलक, कोरें तथा शीर्ष हैं? यदि आधार में एक n भुजा वाला बहुभुज है तो फलक, कोरें तथा शीर्ष की संख्या क्या होंगी?

अब हम देखेंगे कि मोड़ी जा सकने वाली सपाट सतहों, जैसे— कागज, गत्ते आदि का उपयोग कर विभिन्न प्रकार के ठोस कैसे बनाए जा सकते हैं।

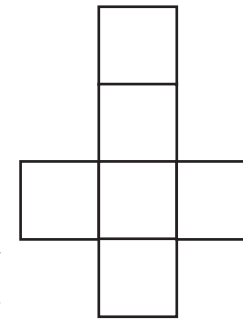
इसकी मूल अवधारणा सपाट सतह पर एक ऐसी आकृति बनाना है, जिसे मोड़कर ठोस निर्मित किया जा सके। इस प्रकार की आकृति को **जाल (नेट)** कहते हैं। दूसरे शब्दों में किसी ठोस को समतल पर 'खोलने' से एक जाल प्राप्त होता है।

© NCERT not to be republished

? एक घन का जाल कैसा होता है?

चित्र 4.1 घन का एक जाल है।

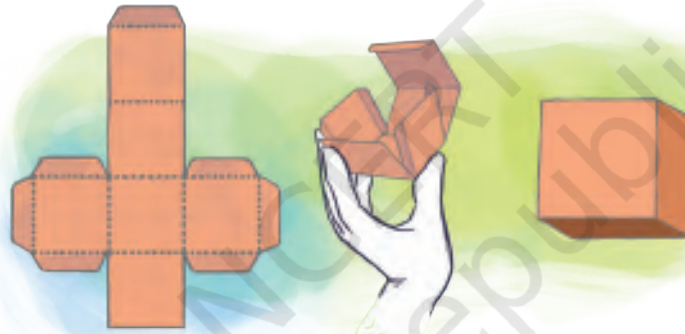
? कल्पना कीजिए कि घन बनाने के लिए इसे किस प्रकार मोड़ा जा सकता है।



चित्र. 4.1

जाल के उपयोग करने के व्यावहारिक पहलू

घन के जाल से एक वास्तविक घन बनाने के लिए कुछ व्यावहारिक पहलुओं को ध्यान में रखना आवश्यक है। पहला यह है कि उपयोग में लाए जाने वाले पदार्थ इतने सुदृढ़ हों कि घन असानी से खड़ा रह सके। दूसरा तथ्य यह है कि घन के फलकों को आपस में जोड़ने के लिए कोई क्रियाविधि होनी चाहिए। यदि गत्ता या उसके जैसी ही कोई वस्तु उपयोग में लाई जाती है तो संलग्न फलकों को सेलोटेप से भी जोड़ा जा सकता है। कुछ कम कठोर वस्तुओं, जैसे कि चार्ट पेपर के फलकों में कुछ अतिरिक्त 'पल्ले' (flaps) होना आवश्यक है जिन्हें संलग्न फलकों से जोड़ा जा सके। आपने इस तकनीक को पैकिंग वाले डिब्बों में देखा होगा।



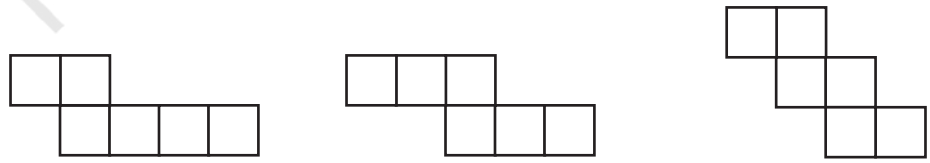
(i) (ii) (iii)

हालाँकि जब हम ठोस के जाल के विषय में बात करते हैं तो हम केवल ठोस को खोलने पर बनी आकृति पर विचार करते हैं, उन्हें संभालने या सहारा देने वाले अन्य पल्लों पर नहीं जो वास्तव में उस ठोस को बनाने में उपयोग में आते हैं।

जाल का उपयोग करके बनाने के अतिरिक्त कागज से घन बनाने की अन्य विधियाँ भी हैं। ऐसे बहुत से जाल संभव हैं जिनका उपयोग एक घन को निर्मित करने में किया जा सकता है।

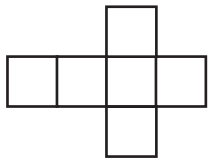
? **आइए, पता लगाएँ**

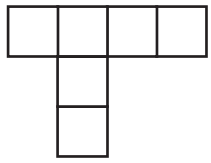
1. नीचे दिए गए जालों में से कौन-से एक घन के जाल हैं? प्रथमत: कल्पना से उत्तर देने का प्रयास कीजिए। इसके पश्चात आप कटआउट का उपयोग करके अभ्यास कर सकते हैं।

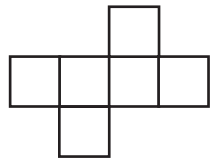


(i) (ii) (iii)

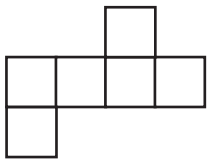
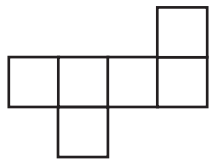
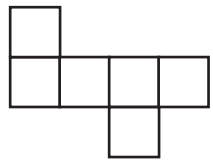
© NCERT not to be republished


(iv)


(v)


(vi)

2. एक घन में कुल 11 संभावित जाल की संरचनाएँ हैं। इस गणना में यदि एक जाल दूसरे जाल को घुमाकर या उलटकर प्राप्त किया जा सकता है तो उसे एक ही जाल माना जाता है। उदाहरण के लिए— नीचे दिए गए सभी जाल समान माने जाते हैं—

एक घन के सभी 11 जाल ज्ञात कीजिए।

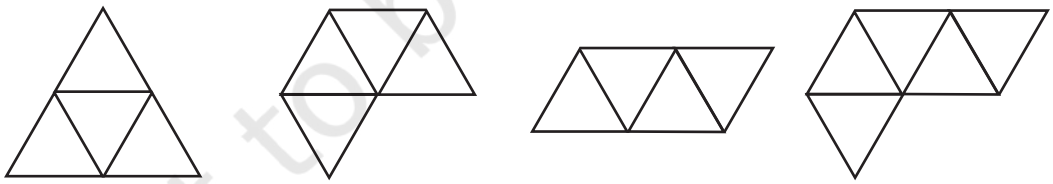
प्रयास कीजिए

3. एक घनाभ का जाल बनाइए जिसकी भुजाओं की माप हैं—
   (i) 5 cm, 3 cm और 1 cm
   (ii) 6 cm, 3 cm और 2 cm

आइए, अन्य ठोसों/ठोस आकारों के जाल ढूँढ़ते हैं!

एक चतुष्फलक जिसके फलक समबाहु त्रिभुज होते हैं वह **सम चतुष्फलक** कहलाता है।

? एक सम चतुष्फलक का जाल किस प्रकार का होगा? नीचे दिए गए जालों में से कौन-सा एक सम चतुष्फलक का जाल है?



? क्या कुछ अन्य संभव जाल हैं?

एक सम चतुष्फलक के केवल 2 जाल संभव हैं।

गणित चर्चा

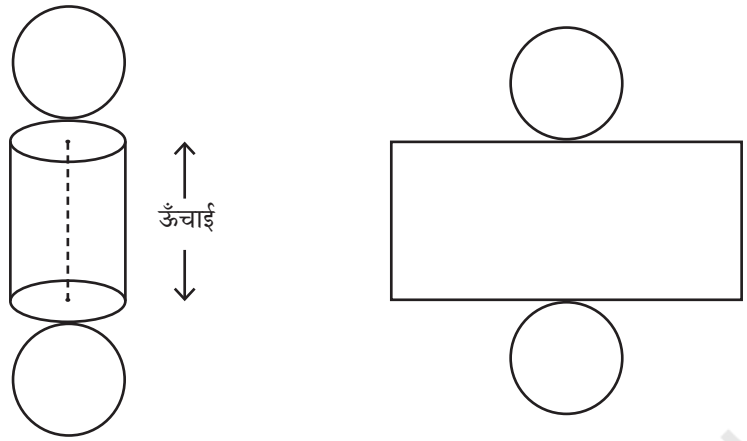
? उचित मापों का एक जाल बनाइए जिसे एक सम चतुष्फलक के रूप में मोड़ा जा सके। इसके साथ ही जाँच कीजिए कि क्या यह वास्तविक कटआउट बनाकर संभव है।

? उचित मापों का एक जाल बनाइए जिसे एक वर्गीय पिरामिड में मोड़ा जा सके। जाँच कीजिए कि क्या यह वास्तविक कटआउट बनाकर संभव है।

© NCERT not to be republished

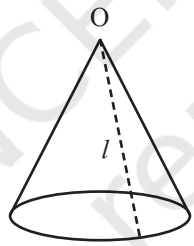
? एक बेलन का जाल किस प्रकार का होगा?

जैसा कि नीचे दिए गए चित्र में दर्शाया गया है कि यदि बेलन के वृत्ताकार फलकों को खोला जाए और बेलन की ऊँचाई के अनुदिश उन्हें काटा जाए, तो हमें प्राप्त होता है—



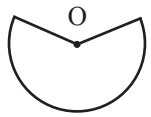
? बताइए कि प्राप्त आयत की भुजाओं की लंबाई क्या है?

? बताइए कि एक शंकु का जाल किस प्रकार का दिखाई देगा?



? यदि शंकु को रेखा l के अनुदिश काटा जाए और इसके पश्चात फैलाया जाए तो हमें क्या प्राप्त होगा?

ध्यान दीजिए कि आधार के वृत्त की सीमा (परिधि) के सभी बिंदु, 'O' से समान दूरी पर हैं। अत: शंकु को फैलाने के पश्चात जाल की सीमा केंद्र 'O' वाले वृत्त का एक भाग होगी।



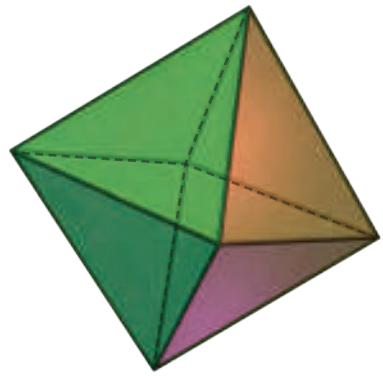
? उपर्युक्त जाल के उपयोग से आप किस सतह की रचना करते हैं जिसमें 'O' सीमा वाले वृत्त का केंद्र नहीं है? इस प्रश्न का उत्तर ज्ञात करने के लिए एक भौतिक प्रतिरूप बनाइए।

? उचित मापकों का उपयोग कर एक जाल (नेट) बनाइए जिसे त्रिभुजाकार प्रिज्म में मोड़ा जा सके। वास्तविक कटआउट बना कर इसकी जाँच कीजिए।

गणित चर्चा

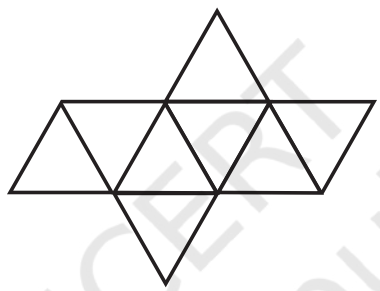
© NCERT not to be republished

अष्टफलक, वह ठोस वस्तु होती है जो दो वर्गाकार पिरामिडों के वर्गाकार आधारों को जोड़कर बनाई जाती है।



अष्टफलक

क्या आप इसके जाल की कल्पना कर सकते हैं? यह इसके जालों में से एक जाल है।



? इस जाल के सभी त्रिभुजों का समबाहु त्रिभुज लेकर जाल का एक कटआउट बनाइए और इसे एक अष्टफलक बनाने के लिए मोड़िए।

गणित चर्चा

घन की ही भाँति एक अष्टफलक के भी 11 विभिन्न जाल होते हैं।

अभी तक हमने ऐसे ठोसों को देखा है जिनके सभी फलक समबाहु त्रिभुज (सम चतुष्फलक) और वर्ग (घन) हैं। क्या कोई ऐसा ठोस भी विद्यमान है जिसके सभी फलक पंचभुज हैं? रुचिकर बात यह है कि इसका उत्तर हाँ है!

इस ठोस को **द्वादशफलक** कहते हैं। इस ठोस को भी एक जाल से बनाया जा सकता है! गणितज्ञों ने यह ज्ञात किया कि एक द्वादशफलक के 43,380 जाल होते हैं।

द्वादशफलक

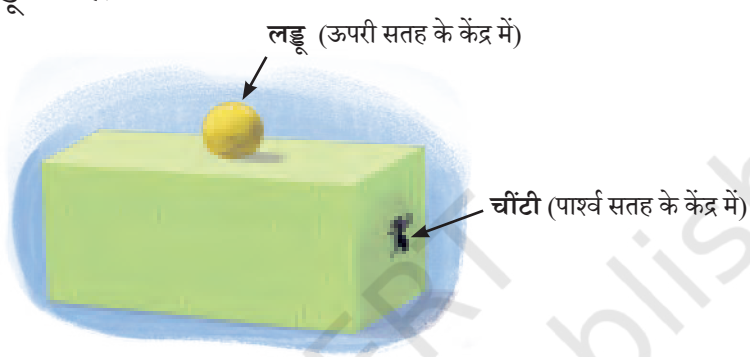
© NCERT not to be republished

गोले का जाल? प्रयोग कीजिए और देखिए कि क्या आप कागज का एक ऐसा कटआउट बना सकते हैं जो एक गेंद को बिना किसी मुड़ाव, रिक्त स्थान छोड़े या अतिव्यापी हुए पूर्णत: लपेट सके।

घन पर सबसे छोटे मार्ग

आइए, अब तक की चर्चा से संबंधित एक रोचक समस्या पर विचार करते हैं। हम जानते हैं कि एक समतल पर स्थित दो बिंदुओं के मध्य सबसे छोटा मार्ग उन बिंदुओं को जोड़ने वाली एक सीधी रेखा होती है। अब, एक घनाभ की सतह पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं के मध्य सबसे छोटा मार्ग कौन-सा है, यदि हमें केवल उसकी सतह के अनुरूप ही चलने की अनुमति हो?

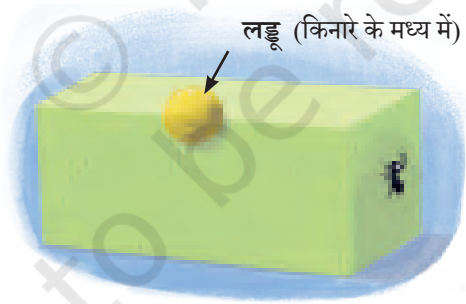
आइए, घन की सतह के ऊपर रहने वाली एक भूखी चींटी की कल्पना करें। इसके भाग्यवश सतह पर एक लड्डू रखा है।



लड्डू तक पहुँचने हेतु चींटी के लिए सबसे छोटा मार्ग क्या है?

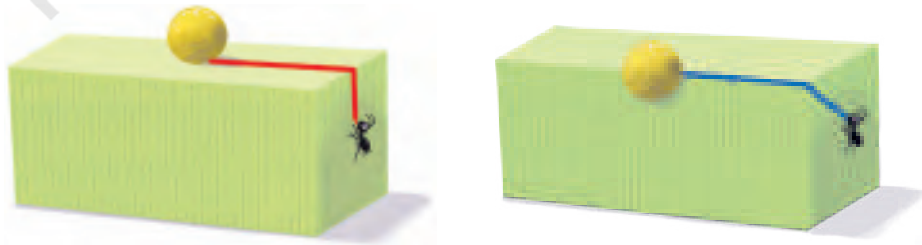
नीचे दी गई स्थिति के विषय में आपका क्या विचार है?

गणित चर्चा



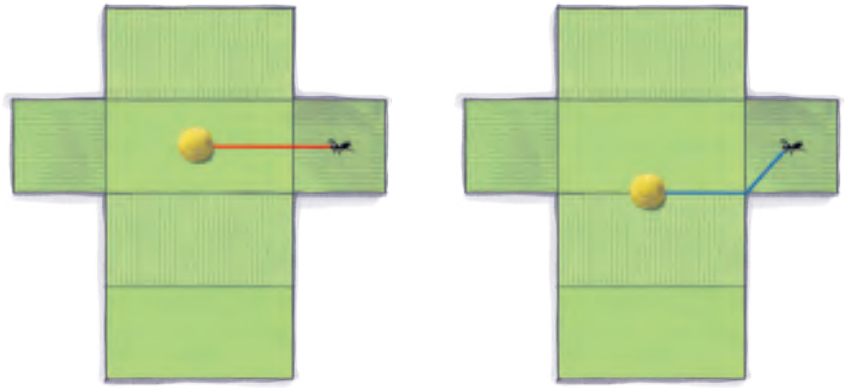
यदि हम किसी विशेष मार्ग को सबसे छोटा मानते हैं तो अनगिनत संभावनाओं के मध्य हम यह किस प्रकार सुनिश्चित कर सकते हैं कि वास्तव में यही मार्ग छोटा है?

उदाहरण के लिए— क्या इनमें से कोई भी मार्ग सबसे छोटा मार्ग है?



© NCERT not to be republished

[**संकेत**— जाल बनाइए और देखिए कि यह मार्ग जाल पर किस प्रकार से दिखाई देते हैं।]

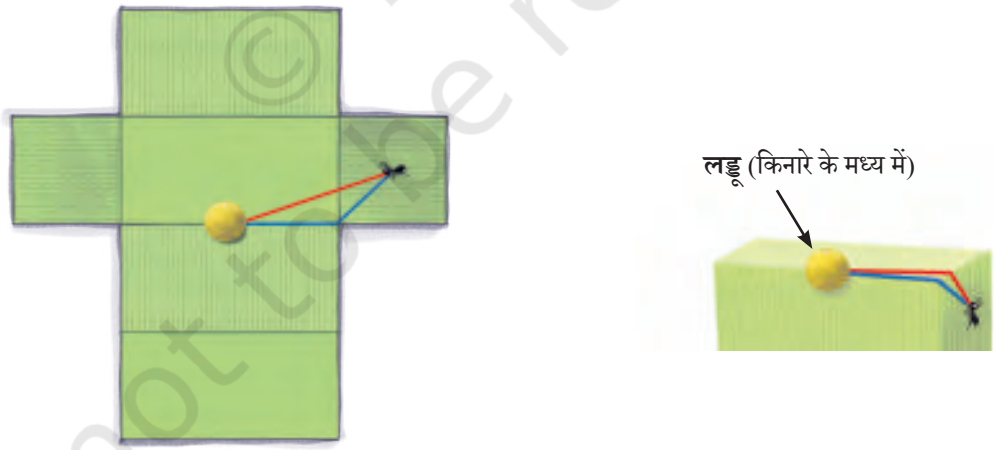


? यह क्या प्रदर्शित करता है?

घनाभ की सतह पर बने किसी मार्ग को उसके जाल पर उसी लंबाई के मार्ग में परिवर्तित किया जा सकता है। इसके विपरीत जाल पर किसी मार्ग को घनाभ पर उसी लंबाई के मार्ग में परिवर्तित किया जा सकता है।

पहली स्थिति में घनाभ का चिह्नित मार्ग सबसे छोटा है क्योंकि यह मार्ग जाल पर चींटी और लड्डू के मध्य एक सरल रेखा में परिवर्तित हो जाता है, जो दोनों के मध्य सबसे छोटा मार्ग है।

दूसरी स्थिति में घनाभ पर चिह्नित मार्ग घनाभ के जाल पर एक सीधी रेखा में परिवर्तित नहीं होता है और इसलिए यह चींटी के लिए सबसे छोटा मार्ग नहीं है।



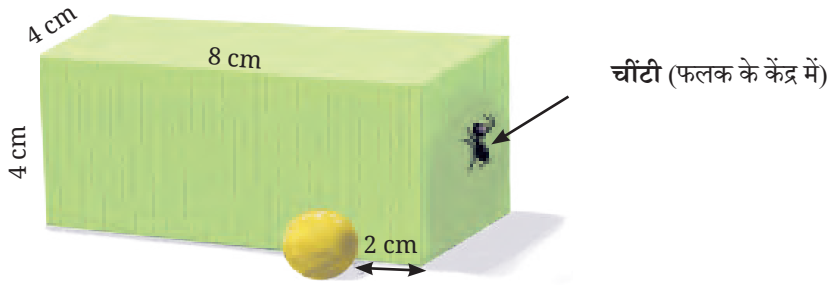
लाल रंग का मार्ग सबसे छोटा है।

इस प्रकार घनाभ पर सबसे छोटा मार्ग ज्ञात करने के प्रश्न को हम इसके जाल द्वारा सबसे छोटे मार्ग ज्ञात करने में परिवर्तित कर देते हैं।

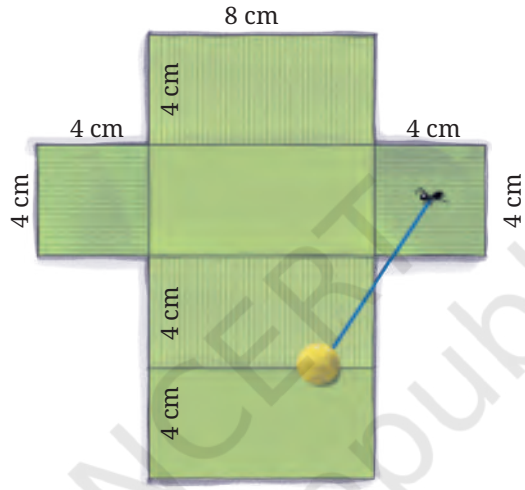
क्या अब हमने घनाभ पर दो बिंदुओं के मध्य सबसे छोटा मार्ग ज्ञात करने की समस्या का पूर्णत: विश्लेषण कर लिया है?

© NCERT not to be republished

? नीचे दी गई स्थिति में चींटी और लड्डू के मध्य सबसे छोटा मार्ग ज्ञात कीजिए—



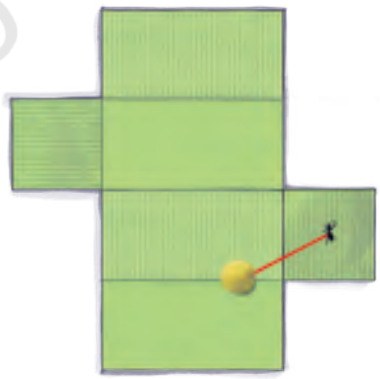
यदि हम पूर्व की भाँति घनाभ को खोलें तो हमें प्राप्त होता है—



ध्यान दीजिए कि चींटी और लड्डू के बीच का रेखाखंड जाल के बाहर जा रहा है। नि:संदेह यह घनाभ पर किसी भी मार्ग के अनुरूप तो नहीं है।

? तो विचार कीजिए कि अब हम क्या करें?

यदि जाल को निम्न प्रकार से खोला जाए तो हमें घनाभ पर एक मार्ग मिल जाता है।



सबसे छोटा मार्ग

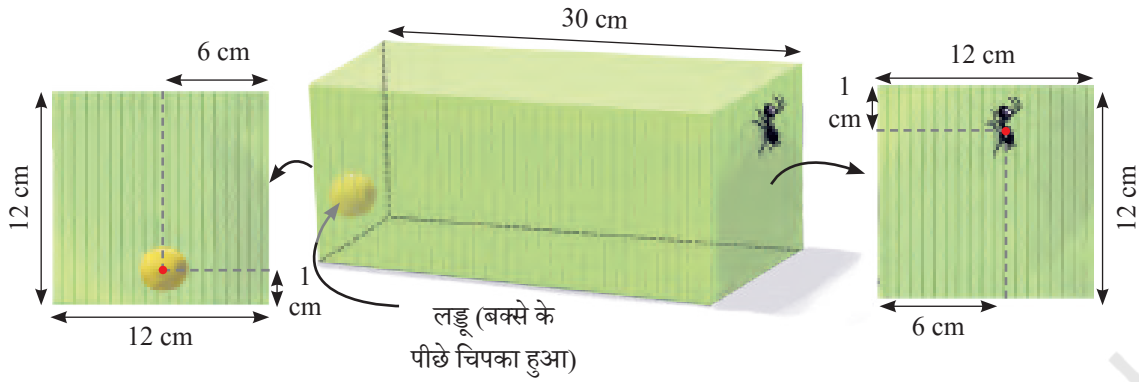
अत: घनाभ को किस प्रकार से खोलना है, यह भी महत्त्वपूर्ण है!

© NCERT not to be republished

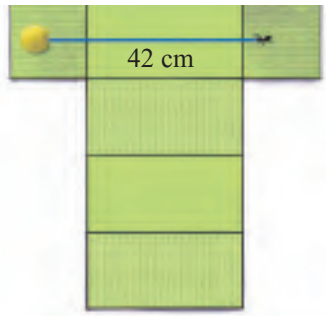
अब हम एक जटिल स्थिति को समझते हैं।

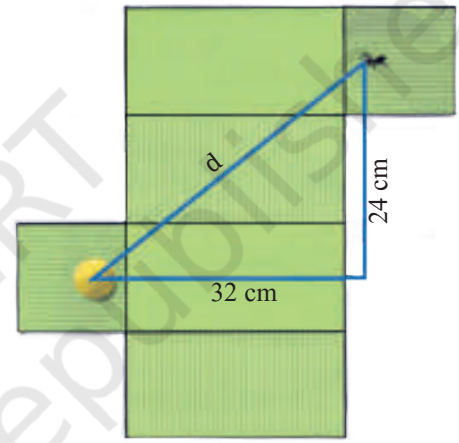
प्रयास कीजिए

? चींटी और लड्डू के मध्य सबसे छोटे मार्ग की लंबाई क्या है?



घनाभ को खोलने की कुछ विधियाँ नीचे दर्शाई गई हैं—





दूसरी स्थिति में चींटी और लड्डू के मध्य दूरी d की गणना बौधायन प्रमेय के प्रयोग से की जा सकती है क्योंकि यहाँ हमारे पास एक समकोण त्रिभुज है।

$$d^2 = 24^2 + 32^2$$

$$d = \sqrt{1600} = 40 \text{ cm}$$

हम देखते हैं कि विभिन्न प्रकार से खोलने में प्रत्येक स्थिति में चींटी तथा लड्डू के मध्य रेखाखंड की लंबाई भिन्न-भिन्न हैं! अत: हमें उत्तर ज्ञात करने के लिए घनाभ को खोलने की सभी संभावित विधियों को ध्यानपूर्वक सूचीबद्ध करना होगा!

समतल सतह पर ठोस का निरूपण

चित्रकारी पुरातन मानवीय गतिविधियों में से एक है। मानवजाति में सौंदर्यीकरण के साथ-साथ व्यावहारिक तथा यांत्रिकी दोनों उद्देश्यों के लिए चित्रकला हजारों वर्षों से प्रचलित है। व्यावहारिक और यांत्रिकी के संदर्भ में किसी वस्तु की चित्रकारी करना, उसे अभिलेखित करने अथवा उसके विषय में सूचना प्रदान करने की एक आवश्यक विधि है। दृश्य निरूपण प्रदर्शित की जा रही वस्तुओं के विषय में सोचने और समझने में भी सहायता करता है। प्राय: इसकी आवश्यकता

© NCERT not to be republished

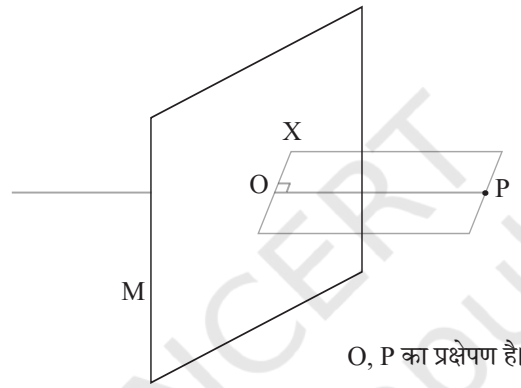
अभियांत्रिकी में— भवन का निर्माण, मशीनों की अभिकल्पना करने आदि के लिए होती है। इसके अतिरिक्त अभियांत्रिकी चित्रण का पर्याप्त रूप से विस्तार होना आवश्यक है जिससे कि कोई भी इसके द्वारा दर्शाई गई वस्तुओं को व्यावहारिक रूप से बना सके।

अब हम एक समतल पर ठोस वस्तुओं को चित्रित करने की विधियों का अन्वेषण करेंगे।

प्रक्षेप

किसी ठोस वस्तु का जाल (जब वह विद्यमान है) ठोस वस्तु को समतल पर निरूपित करने की एक विधि होती है। परंतु जाल को व्यावहारिक रूप से बिना काटे और बिना मोड़े जाल से ठोस वस्तु की कल्पना करना कठिन हो सकता है।

ठोस वस्तु को प्रदर्शित करने की एक अन्य विधि समतल पर उसके सभी बिंदुओं के **प्रक्षेपों** पर ध्यान देना है। यह युक्ति एक ठोस वस्तु के विशिष्ट प्रेक्षण बिंदु से बनाने वाली छवि से संबंधित है। इसकी चर्चा हम पूर्व में ही कर चुके हैं। आइए, देखें कि यह तकनीक किस प्रकार कार्य करती है—

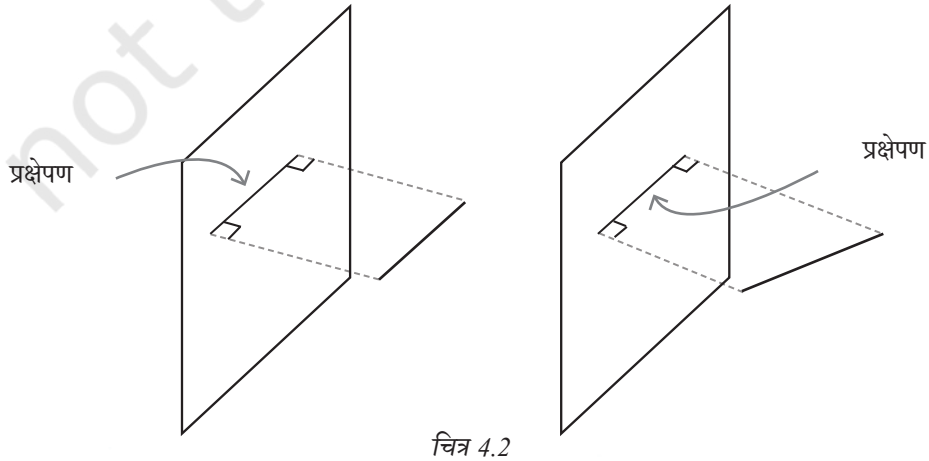


O, P का प्रक्षेपण है।

समष्टि में एक बिंदु P और एक समतल M पर विचार कीजिए। बिंदु P से जाती हुई एक रेखा की कल्पना कीजिए जो समतल M को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती है।

यहाँ OP **समतल के लंबवत** है, यदि समतल पर किसी रेखा OX के लिए $\angle POX = 90°$ हो। इस स्थिति में हम कहते हैं कि बिंदु O समतल पर बिंदु P का **प्रक्षेप** है। किसी वस्तु के सभी बिंदुओं के प्रक्षेपण मिलकर **समतल पर उस वस्तु का प्रक्षेप** निर्मित करते हैं।

? आइए, एक रेखा के प्रक्षेपण का दृश्यांकन करें।



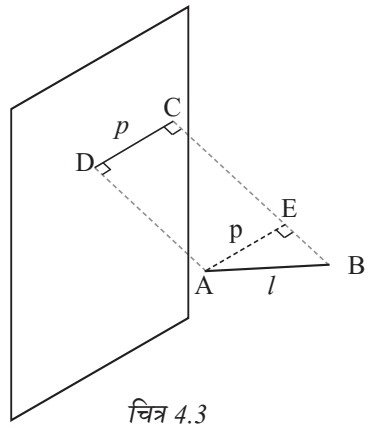
चित्र 4.2

© NCERT not to be republished

? रेखा के प्रक्षेपण में उसकी लंबाई का क्या होता है?

चित्र 4.3 में प्रक्षेपणों पर विचार कीजिए। उदाहरण के लिए, माना रेखा AB की वास्तविक लंबाई l है और उसके प्रक्षेपण की लंबाई p है।

$AE \perp BC$ बनाइए। AECD एक आयत है। (क्यों?)। अत: $AE = DC = p$ है। इसके अतिरिक्त $\angle AEB = 90°$



चित्र 4.3

? क्या अब आप p तथा l की लंबाई की तुलना कर सकते हैं?

? प्रक्षेपित रेखा की लंबाई उसकी वास्तविक लंबाई के समान कब होगी?

? आपके विचार से वर्ग के अभिविन्यास के आधार पर प्राप्त होने वाले विभिन्न संभावित प्रक्षेप क्या हैं?

गणित चर्चा

? आपके विचार से विभिन्न अभिविन्यासों में निहित समांतर चतुर्भुज का प्रक्षेप क्या है?

क्या यह कभी एक चतुर्भुज हो सकता है जो समांतर चतुर्भुज नहीं है?

प्रारंभ में आप समांतर रेखाओं के युग्म के प्रक्षेपण पर विचार कर सकते हैं।

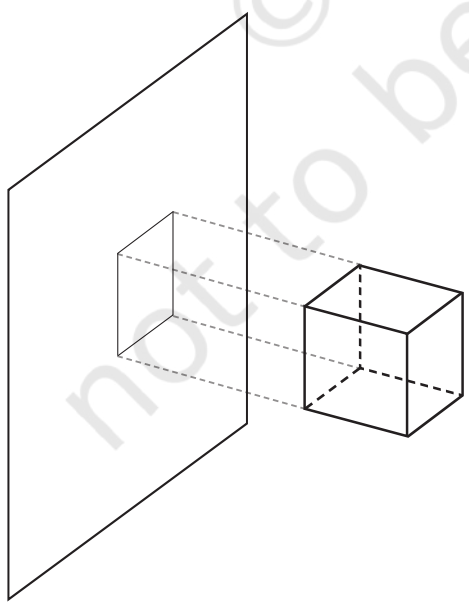
? n-भुजाओं वाले सम बहुभुज के प्रक्षेपण के विषय में आपका क्या विचार हैं?

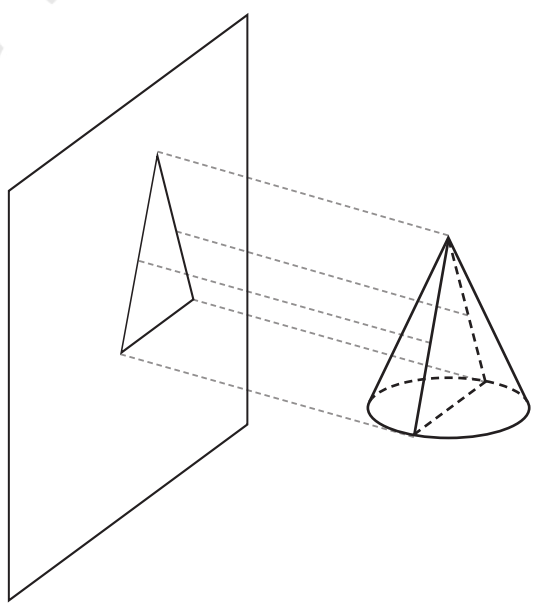
[**संकेत**— किसी बहुभुज का प्रक्षेपण उसकी भुजाओं के प्रक्षेपणों से मिलकर बनता है।]

गणित चर्चा

आइए, अब ठोस वस्तुओं के प्रक्षेपणों पर विचार करें।

? घन और शंकु के प्रक्षेप किस प्रकार से दिखेंगे?

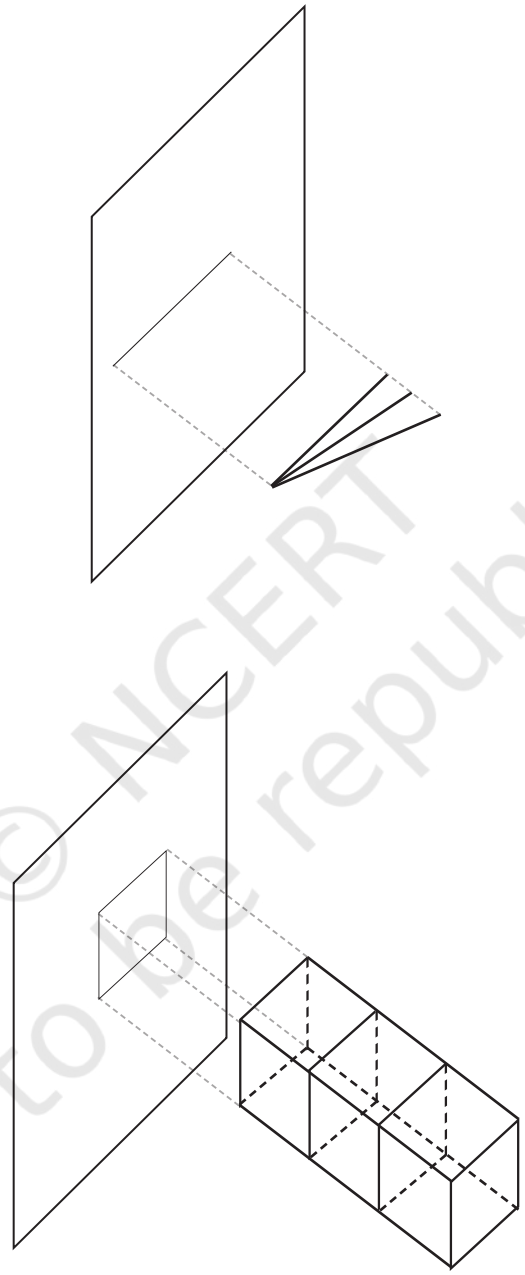

चित्र 4.4


चित्र 4.5

© NCERT not to be republished

यदि कोई वस्तु किसी समतल से लंबवत होकर गुजरे और उसमें छिद्र बनाए तो उस छिद्र का आकार वस्तु के प्रक्षेप के आकार के समान होगा।

? चित्र 4.2 से चित्र 4.5 तक देखिए। प्रत्येक स्थिति में देखिए कि आप किसी दूसरी वस्तु की कल्पना कर सकते हैं जो समान प्रक्षेपण देती हो।



चित्र 4.6

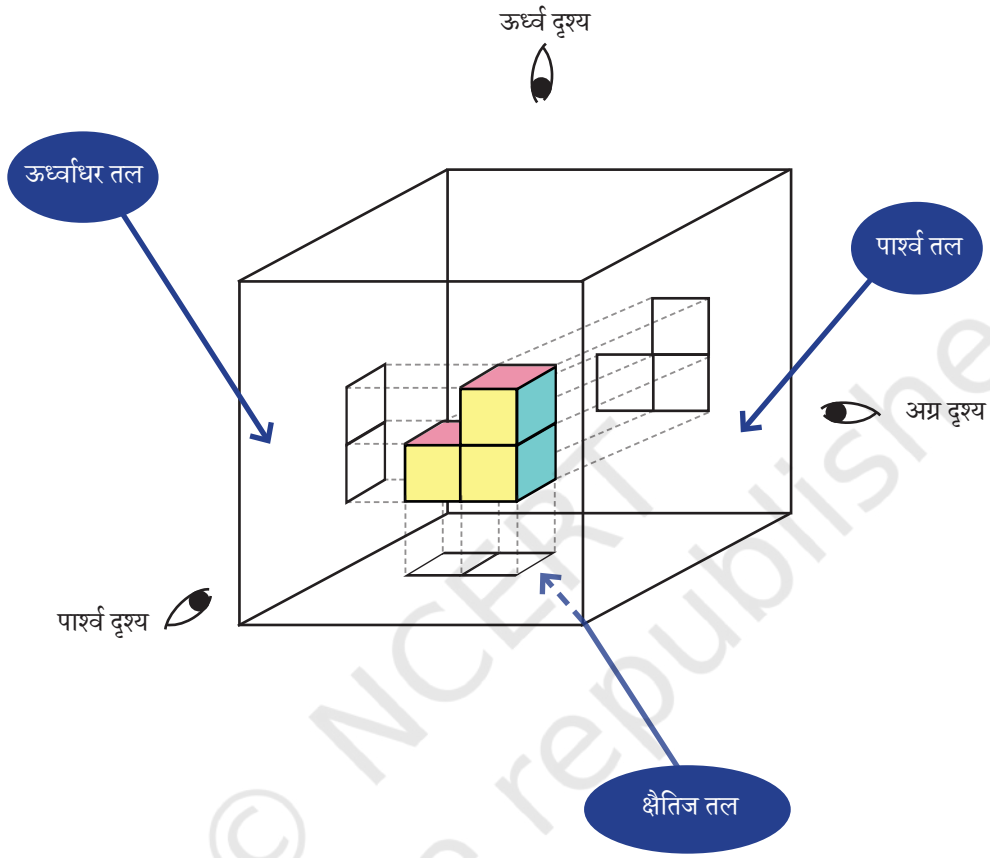
विभिन्न रेखाएँ और घनाभ एक समान प्रक्षेपण देते हुए

हमने देखा कि कोई दिया हुआ प्रक्षेपण केवल एक ही वस्तु से नहीं बनता है।

© NCERT not to be republished

? किसी ऐसी दूसरी वस्तु को ढूँढ़िए जो दिए गए शंकु के समान प्रक्षेपण बनाती हो।

इस प्रयोजन के लिए हम प्राय: किसी वस्तु के तीन परस्पर लंबवत प्रक्षेप लेते हैं। जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है हम वस्तु के सामने स्थित एक समतल को **ऊर्ध्वाधर तल** कहते हैं। वस्तु के नीचे के समतल को **क्षैतिज तल** और वस्तु के पार्श्व के समतल को **पार्श्वीय तल** कहते हैं।

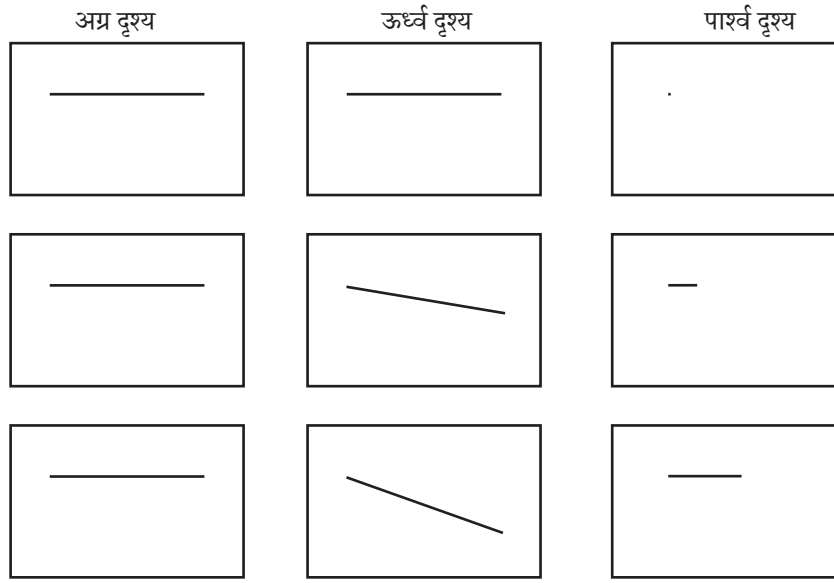


हम इन तीन समतलों पर वस्तु के प्रक्षेप को उन दिशाओं के आधार पर नाम देते हैं जिन दिशाओं से वस्तु को देखा जाता है। ऊर्ध्वाधर तल के प्रक्षेप को अग्र दृश्य, क्षैतिज तल के प्रक्षेपण को ऊर्ध्व दृश्य तथा पार्श्वीय तल के प्रक्षेपण को पार्श्व दृश्य कहते हैं। ये प्रक्षेप उन छवियों को दर्शाते हैं जिन छवियों की खोज हमने पिछले खंड में की थी।

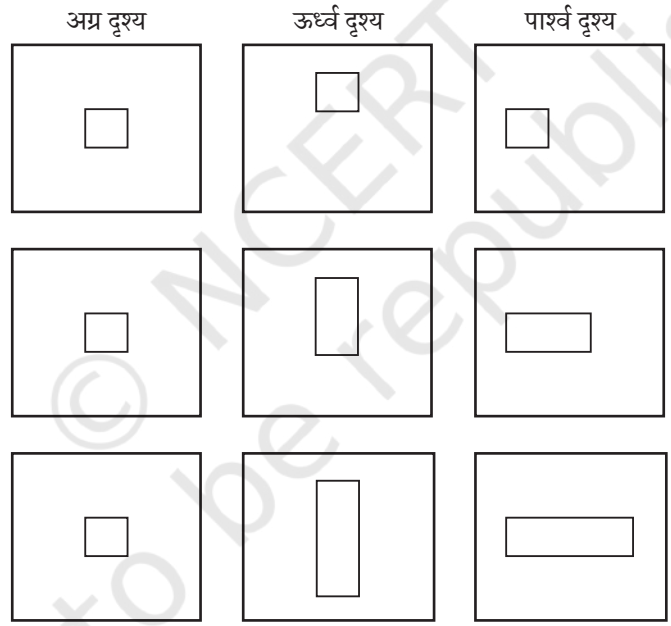
? आइए, देखते हैं कि चित्र 4.6 में दर्शाई गई वस्तुओं का प्रक्षेप क्या होगा जब दर्शाए गए समतल को ऊर्ध्वाधर तल के रूप में लिया जाता है।

चित्र 4.6 में विभिन्न रेखाओं का प्रक्षेप—

© NCERT not to be republished



चित्र 4.6 में दिए गए विभिन्न घनाभों का प्रक्षेपण—



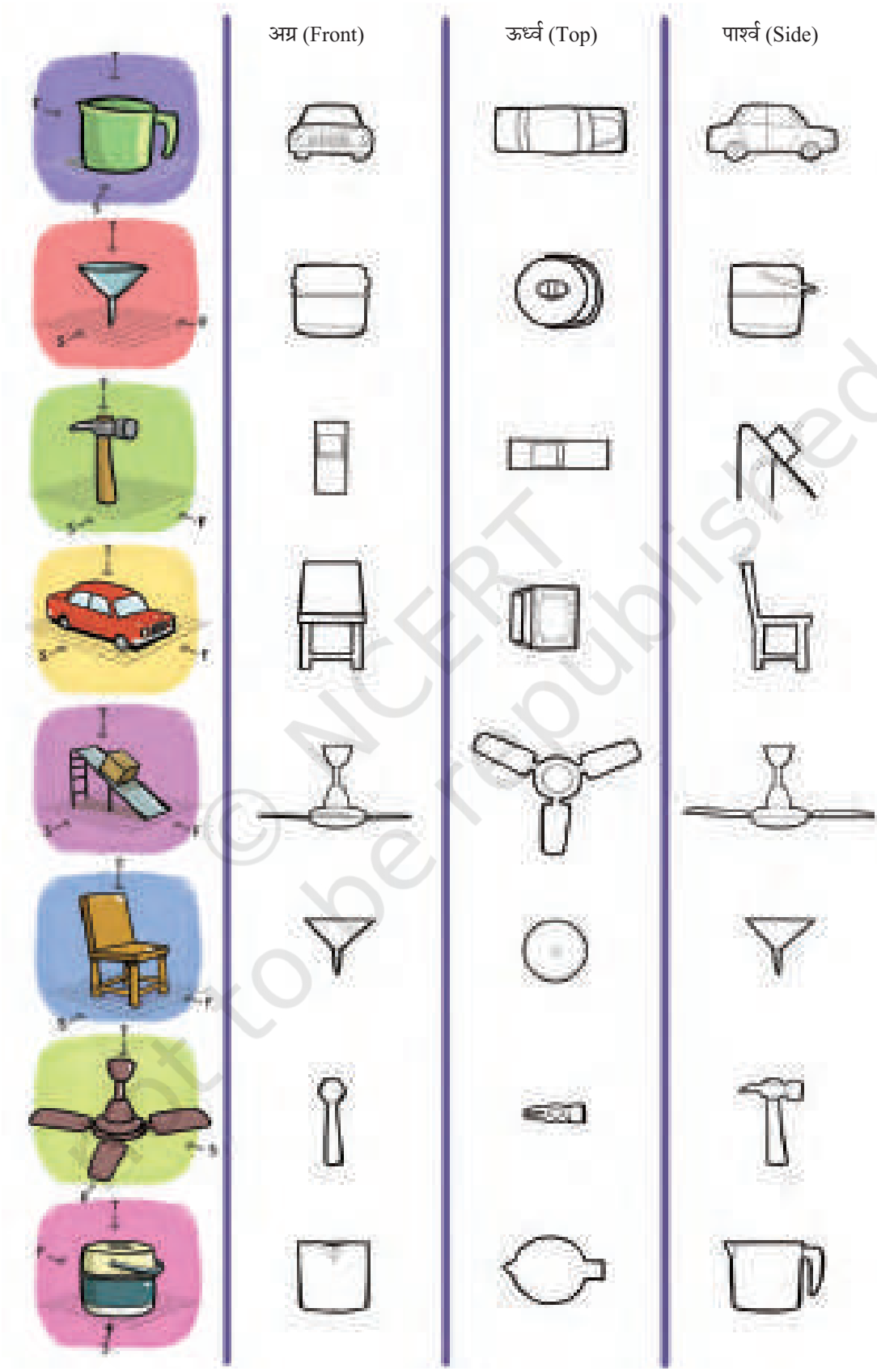
आइए, पता लगाएँ

1. चित्र 4.6 में दी गई विभिन्न रेखाओं के अग्र दृश्य, ऊर्ध्व दृश्य और पार्श्व दृश्य का अवलोकन कीजिए। क्या इनकी लंबाईयों के मध्य कोई संबंध है?
2. नीचे दिए गए प्रत्येक ठोस वस्तु के अभिविन्यास को ऊर्ध्वाधर, क्षैतिज और पार्श्वीय तल के सापेक्ष निश्चित करते हुए इनके अग्र दृश्य, ऊर्ध्व दृश्य तथा पार्श्व दृश्य— घन, घनाभ, समांतर षटफलक, शंकु, बेलन, प्रिज्म तथा पिरामिड को ज्ञात कीजिए। आवश्यकतानुसार संकेतों के लिए अगला प्रश्न देखिए।

गणित चर्चा

© NCERT not to be republished

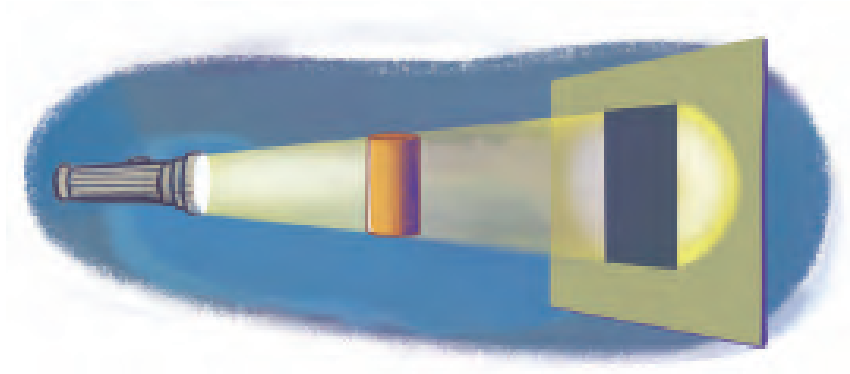
3. नीचे दी गई प्रत्येक वस्तुओं का उसके प्रक्षेपण से मिलान कीजिए।



© NCERT not to be republished

छाया

एक समतल जैसे आपकी कक्षा की दीवार के सामने किसी वस्तु को रखिए। वस्तु के ऊपर दीवार की लंबवत दिशा में टॉर्च से प्रकाश डालिए।



? आप क्या देखते हैं?

यद्यपि वस्तु को विभिन्न प्रकारों से पकड़ने के आधार पर छाया का आकार कुछ बढ़ा हुआ, खिंचा हुआ और यहाँ तक कि थोड़ा-सा विकृत भी हो सकता है। हम देखेंगे कि समतल पर छाया का आकार वैसा ही है जैसा समतल पर उसका प्रक्षेप है!

? जब आप टॉर्च और वस्तु के मध्य की दूरी को परिवर्तित करते हैं तो छाया के आकार में क्या परिवर्तन होता है।

? ऐसा क्यों होता है?

प्रयास कीजिए

अब कल्पना कीजिए कि आपकी टॉर्च में बहुत क्षमता है और यह दीवार पर लगातार वस्तु की छाया बनाती ही रहेगी भले ही आप इसे कितना ही पीछे ले जाएँ।

यदि यह काल्पनिक टॉर्च सदैव ही दीवार के तल के लंबवत दिशा में संकेत करती है तो जैसे-जैसे टॉर्च और वस्तु के मध्य की दूरी बढ़ती जाती है, वैसे-वैसे वस्तु की छाया और दीवार के तल पर प्रक्षेप समान हो जाएँगे।

हालाँकि यह प्रयोग विचित्र प्रतीत हो सकता है परंतु आप ऐसे ही एक अत्यंत सुदृढ़ और दूरस्थ टॉर्च से पूर्व से ही परिचित हैं... सूर्य से! वास्तव में जब सूर्य की किरणें किसी समतल के लंबवत होती हैं तो उस समतल पर पड़ने वाली छाया प्रक्षेप से अंतर करने योग्य नहीं होती!

इससे पूर्व हमने पूछा था कि समांतर चतुर्भुज का प्रक्षेप कैसा प्रतीत हो सकता है। अब आप एक समांतर चतुर्भुज का कटआउट बनाकर और धूप में उसकी छाया को देखकर इस प्रश्न का उत्तर भौतिक रूप से दे सकते हैं। आप समांतर चतुर्भुज का किसी भी प्रकार से भी घुमाएँ आप पाएँगे कि छाया समांतर चतुर्भुज ही रहती है।

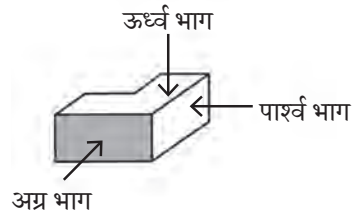
सामान्यतः समांतर रेखाओं के युग्म का प्रक्षेपण सदैव समांतर ही रहेगा।

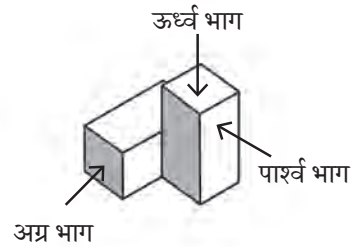
यह गुण वस्तुओं के प्रक्षेपण को रेखांकित करने में उपयोगी है।

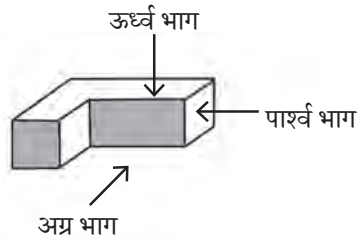
© NCERT not to be republished

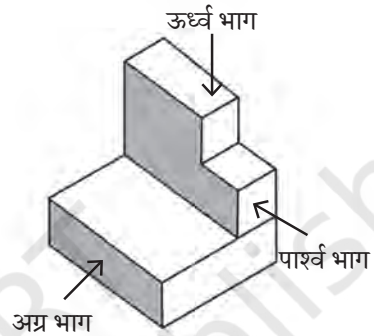
आइए, पता लगाएँ

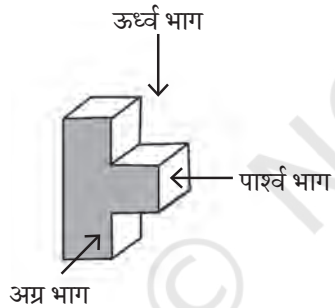
1. निम्नलिखित समान आकार के घनों के प्रत्येक संयोजन के लिए ऊर्ध्व, अग्र और पार्श्व दृश्य चित्रित कीजिए।

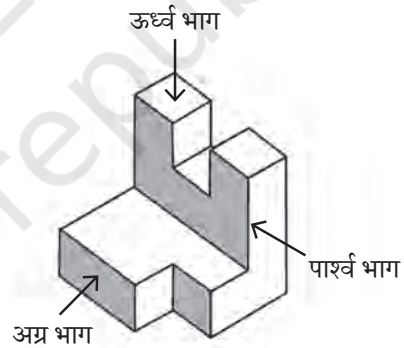










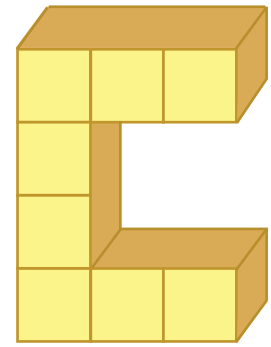


2. आठ एक समान घनों की कल्पना कीजिए जो अक्षर ' ' बनाने के लिए फलकों द्वारा आपस में जुड़े हुए हैं।
   (i) यह सामने से ' ' जैसा प्रतीत होता है। यह पार्श्व से कैसा दर्शाई देता है? ऊर्ध्व से यह कैसा दिखाई देता है?
   (ii) ऐसी आकृति बनाने के लिए और अधिक घन जोड़िए जो सामने से ' ' तथा ऊपर से ' ' जैसा प्रतीत होता हो।
   (iii) अब, क्या आप और अधिक घन जोड़ सकते हैं जिससे कि यह अग्र भाग से '' ऊर्ध्व भाग से, '' और पार्श्व से '' जैसा दिखाई दे?
   (iv) क्या आप घनों के एकल संयोजन से इस प्रकार बनने वाले अन्य भिन्न अक्षरों की कल्पना कर सकते हैं?

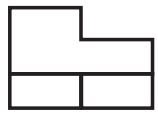
गणित चर्चा

© NCERT not to be republished

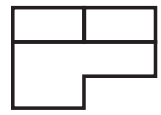
3. कौन-सी ठोस वस्तु दिए हुए ऊर्ध्व दृश्य, अग्र दृश्य और पार्श्व दृश्य के संगत है?



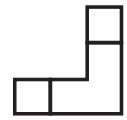
अग्र दृश्य



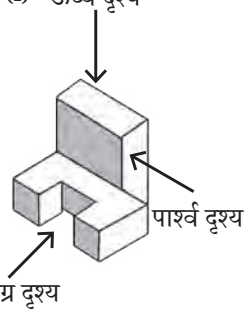
ऊर्ध्व दृश्य



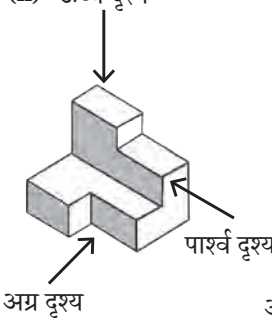
पार्श्व दृश्य



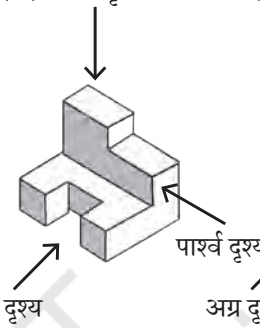
(i) ऊर्ध्व दृश्य



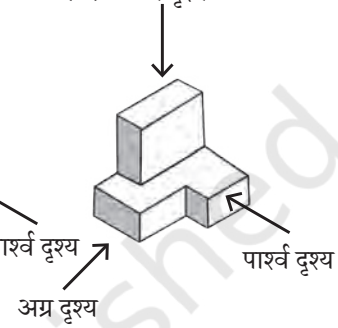
(ii) ऊर्ध्व दृश्य



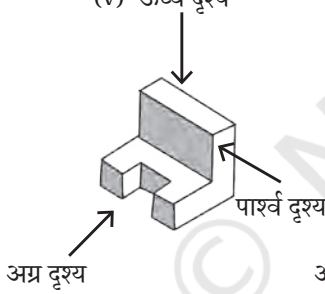
(iii) ऊर्ध्व दृश्य



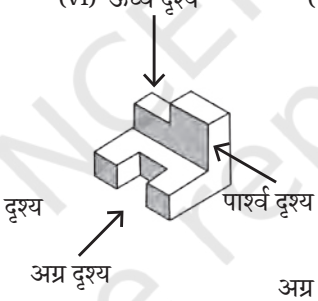
(iv) ऊर्ध्व दृश्य



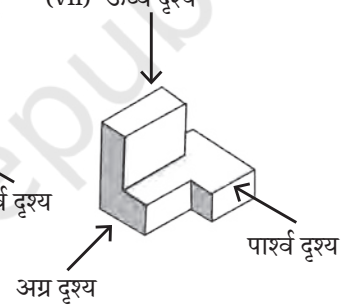
(v) ऊर्ध्व दृश्य



(vi) ऊर्ध्व दृश्य

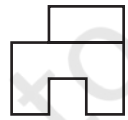


(vii) ऊर्ध्व दृश्य



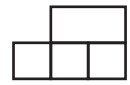
4. समान आकार के घनों का उपयोग कर एक ठोस बनाइए जो नीचे दिए गए प्रक्षेपण देता है।

(i)



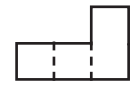
ऊर्ध्व दृश्य

(ii)



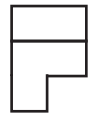
अग्र दृश्य

(iii)



पार्श्व दृश्य

(iv)

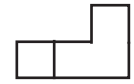


ऊर्ध्व दृश्य

(v)

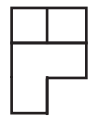
अग्र दृश्य

(vi)



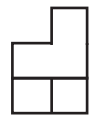
पार्श्व दृश्य

(vii)



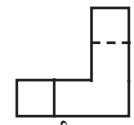
ऊर्ध्व दृश्य

(viii)



अग्र दृश्य

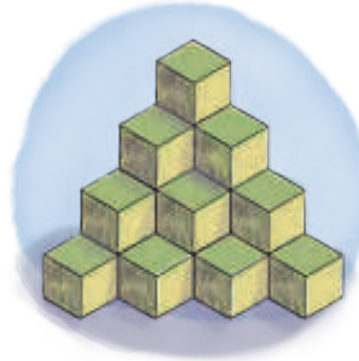
(ix)



पार्श्व दृश्य

© NCERT not to be republished

5. एकसमान घनों के इस ढेर में घनों की संख्या ज्ञात कीजिए।



6. एक घन के प्रक्षेपण से विभिन्न अभिविन्यासों के अंतर्गत कौन-कौन से अलग-अलग आकार बन सकते हैं?

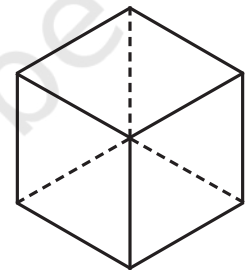
गणित चर्चा

समदूरीक प्रक्षेपण

सामान्यत: एक तल पर ठोस वस्तु का प्रक्षेपण करते समय हमें कुछ सूचनाएँ प्राप्त नहीं होती हैं। परंतु ठोस के किसी विशेष अभिविन्यास के आधार पर हम कभी-कभी खोई हुई सूचना का एक बड़ा भाग पुनः प्राप्त कर पाते हैं।

आइए, घन के ऐसे अभिविन्यास पर विचार करते हैं, जिसमें घन की सभी भुजाओं के प्रक्षेपों की लंबाइयाँ समान हैं। ऐसे प्रक्षेप को घन का **समदूरीक प्रक्षेपण** कहते हैं। ग्रीक भाषा में समदूरीक का अर्थ समान माप है।

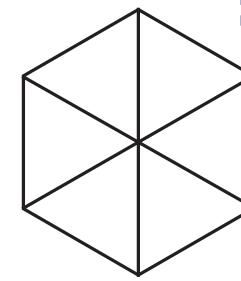
एक घन को पूर्णत: उसके किसी एक शीर्ष पर संतुलित करने और इसके पश्चात उसे सतह के तल पर प्रक्षेपण करने की कल्पना कीजिए। यह प्रक्षेपण समदूरीक प्रक्षेपण है तथा नीचे दर्शाए अनुसार प्रतीत होता है।



? एक घन के प्रतिरूप (Model) की रचना कीजिए तथा उसे अपने हाथों द्वारा उसके किसी एक शीर्ष पर संतुलित कीजिए। क्या आप बता सकते हैं कि सभी प्रक्षेपित किनारों की लंबाइयाँ समान क्यों हैं?

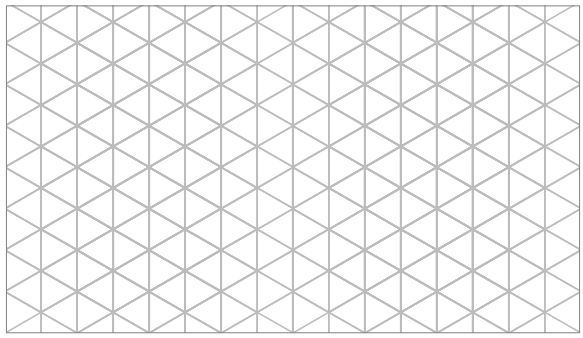
गणित चर्चा

एक घन का समदूरीक निरूपण एक सम षट्भुज है। यदि घन काँच से निर्मित है तो इसके सभी किनारे दृश्यमान होंगे।

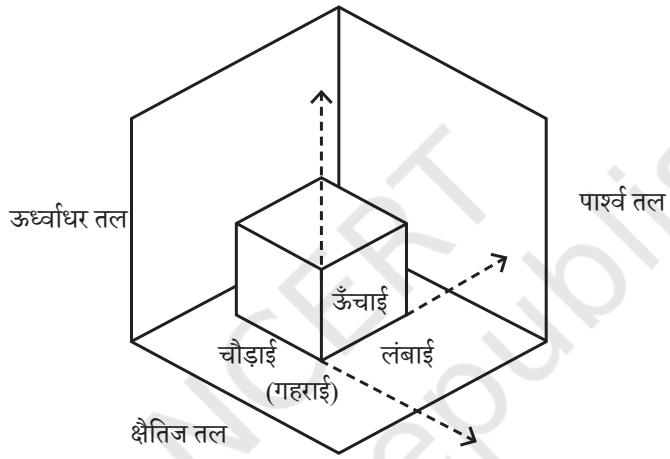


यह संरचना **समदूरीक** चित्रण का आधार है! किसी समतल पर षट्भुजों को एक साथ लगाने पर हमें **समदूरीक ग्रिड** प्राप्त होती है।

© NCERT not to be republished



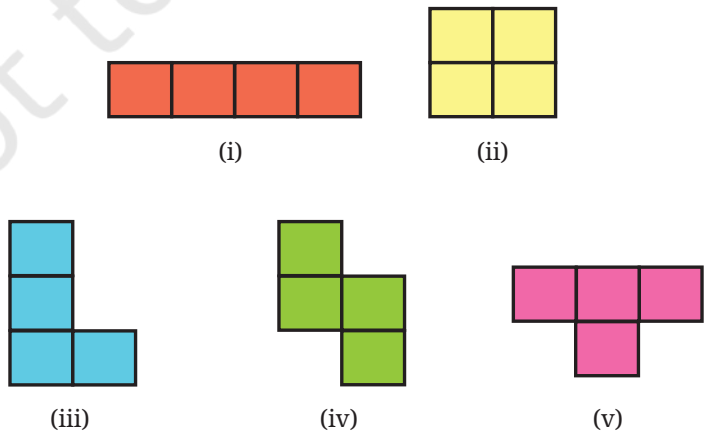
समदूरीक बिंदुकित जाल का अभियांत्रिकी में बहुधा उपयोग किया जाता है। इससे ठोस वस्तुओं के प्रक्षेपों को चित्रांकित करना और लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई आयामों के अनुदिश लंबाइयों का मापन करना सरल हो जाता है, जैसा कि चित्र 4.7 में दर्शाया गया है।



चित्र 4.7

समदूरीक बिंदुकित जाल पर चित्रांकन

? क्या आपने टैट्रिस खेला है? टैट्रिस में पाँच मूलभूत आकृतियाँ होती हैं जिनमें चार वर्गों को विभिन्न प्रकार से व्यवस्थित करना होता है।



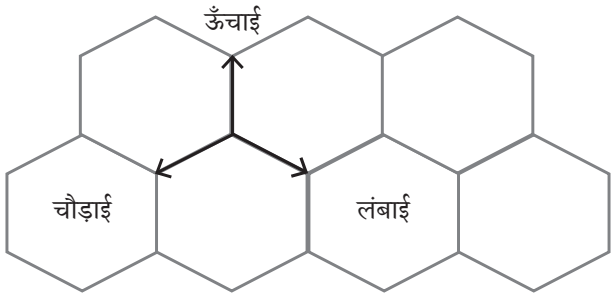
चित्र 4.8

© NCERT not to be republished

? कल्पना कीजिए कि ये सभी वर्ग न होकर घन हैं। इन सभी को समदूरीक पेपर पर चित्रित कीजिए (जो आपकी पाठ्यपुस्तक के अंत में दिया गया है।)

जैसा कि चित्र 4.7 में देखा गया है कि एक ठोस आकृति के तीन मुख्य अक्ष होते हैं। इन्हें हम चौड़ाई अक्ष, लंबाई अक्ष और ऊँचाई अक्ष कहते हैं।

इस बिंदुकित जाल के किनारे तीन भिन्न अभिविन्यासों में — /, \ तथा | प्रकार से दिखते हैं। हम ऊँचाई को | से, चौड़ाई को / से तथा लंबाई को \ से प्रदर्शित करते हैं।

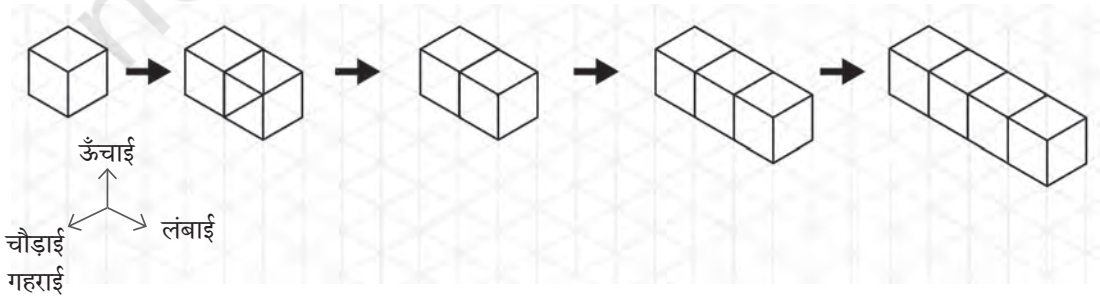


बिंदुकित जाल पर चित्रण करते समय दिए गए अक्ष के अनुदिश आप जितनी इकाइयाँ आगे बढ़ना चाहते हैं, उतने किनारे से किनारे मिलाकर बनाते जाते हैं।

उदाहरण के लिए, आप $1 \times 1 \times 1$ आयामी घन का चित्रांकन नीचे दिए अनुसार कर सकते हैं। आप $2 \times 2 \times 2$ आयामी घन का चित्रांकन किस प्रकार करेंगे? यदि यह ठोस वस्तु का दृश्यांकन करने में आपके लिए उपयोगी हो तो आप इसे छायाँकित भी कर सकते हैं।

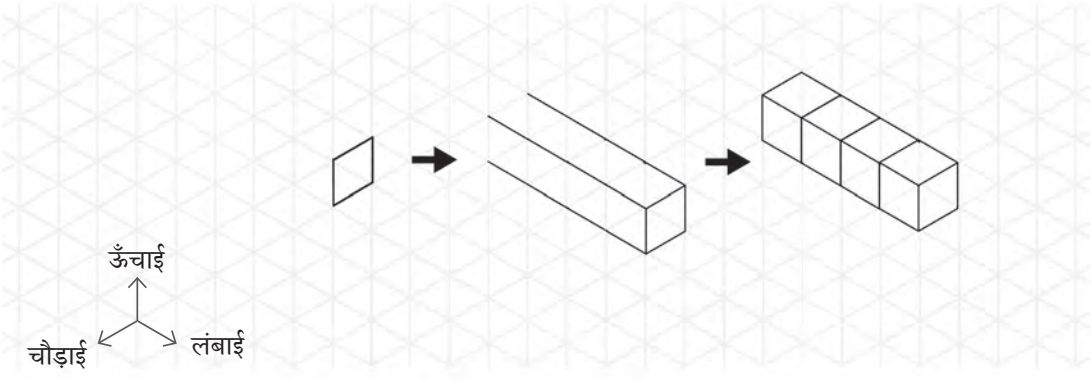
चित्र 4.8 में प्रथम टैट्रिस किनारों से परस्पर जुड़े हुए चार घनों की पंक्ति है। इस ठोस वस्तु के चित्रांकन के लिए आपको चार घनों की पंक्ति के किसी एक अभिविन्यास का चयन करना होगा।

आइए, इसे चौड़ाई अक्ष के अनुदिश चित्रित करते हैं। आप इसे घन से घन जोड़कर भी बना सकते हैं परंतु इस स्थिति में आपको घनों को जोड़ने पर छिप जाने वाली रेखाओं को मिटाने की आवश्यकता होगी। (यदि आपके पास रबड़ नहीं है तो पहले आप हल्की रेखाएँ बना सकते हैं और इसके पश्चात में दृश्यमान रेखाओं को गहरा कर सकते हैं।)

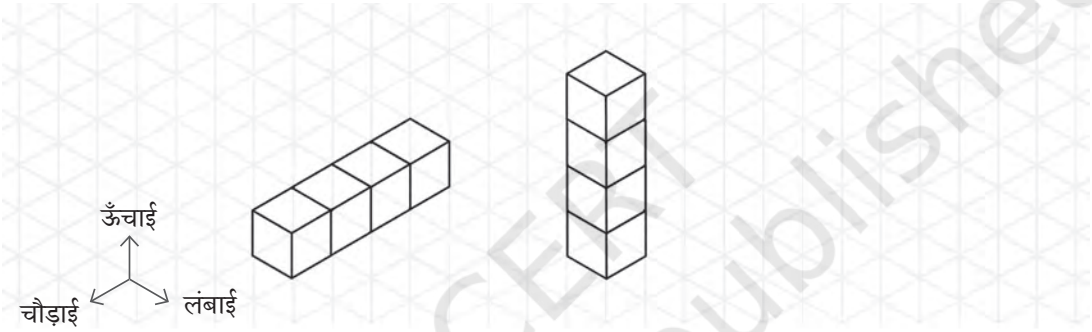


© NCERT not to be republished

आप किनारों को निरंतर गिनते हुए इसे एक साथ भी बना सकते हैं—



इसी प्रकार आप ऊँचाई अक्ष अथवा लंबाई अक्ष के अनुदिश अभिविन्यासित आकृतियों का भी चित्रण कर सकते हैं।



आपके चित्रांकन में समदूरीक पृष्ठ पर ऊर्ध्वाधर दिशा में बढ़ना ठोस की ऊँचाई अक्ष के अनुदिश बढ़ने के अनुरूप है। इसी प्रकार कागज पर \ अथवा / के अनुदिश आगे बढ़ना ठोस की क्रमश: लंबाई अथवा चौड़ाई (गहराई) अक्ष के अनुदिश आगे बढ़ने के अनुरूप है।

? समदूरीक पृष्ठ पर दिशाओं और ठोस के अक्षों के मध्य का संबंध ठोस की आकृति को समझाने में इतना प्रभावी क्यों है?

हम पूर्व में ही देख चुके हैं कि समांतर रेखाओं का प्रक्षेपण समांतर रेखाएँ ही होती हैं। ज्यामिति का यह तथ्य सुनिश्चित करता है कि किसी ठोस वस्तु या पदार्थ में समांतर किनारों के तीन समूह (ऊँचाई, लंबाई तथा चौड़ाई के संगत) समदूरीक पृष्ठ पर समांतर किनारों के तीन समूहों — |, / , तथा \ के रूप में प्रक्षेपित होते हैं। इसके अतिरिक्त प्रक्षेपण का समदूरीक व्यवहार पुष्टि करता है कि तीन अक्षों के अनुदिश इकाई दूरियों का प्रक्षेपण समान होता है।

क्या आप समदूरीक पृष्ठ पर अन्य टैट्रिस आकृतियों का चित्रण कर सकते हैं?

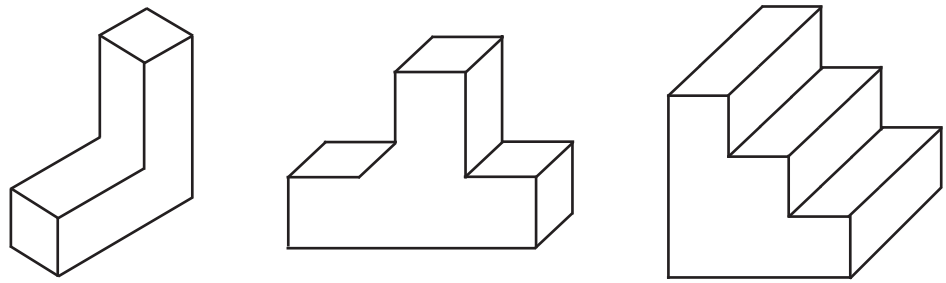
? आइए, पता लगाएँ

गणित चर्चा

1. चित्र 4.8 में दर्शाए गए 5 प्रकारों के अतिरिक्त क्या चार घनों को उनके फलकों के अनुदिश चिपकाने के कुछ अन्य प्रकार भी हैं? क्या आप इन कल्पनाओं के साथ-ही इनका चित्रांकन भी कर सकते हैं?

© NCERT not to be republished

2. नीचे दी गई आकृतियों को समदूरीक ग्रिड पर बनाइए।



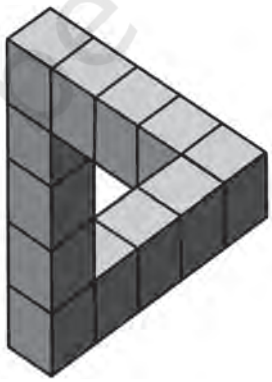
[**संकेत**— यह ध्यान रखने योग्य है कि ऊँचाई के अनुदिश चित्रित किया जाने वाला किनारा नीचे से ऊपर की ओर जाता है अथवा ऊपर से नीचे की ओर जाता है। इसी के अनुसार ग्रिड पर या तो ऊँचाई अक्ष की दिशा में या उसके विपरीत दिशा में रेखाखंड बनाइए।]

3. इस गेंद के मार्ग में क्या कुछ विशेष है? समदूरीक पृष्ठ पर इसकी पुन: रचना कीजिए।

गणित चर्चा

[**संकेत** — इस चित्र के उस भाग पर ध्यान दीजिए जो भौतिक रूप से बनाने योग्य है और उसके तीन प्राथमिक अक्षों की पहचान कीजिए।]

4. दिए गए त्रिभुज का अवलोकन कीजिए।



(i) क्या वास्तविक घनों से इस प्रतिरूप की रचना करना संभव होगा? बताइए इस असंभव त्रिभुज के अग्र, ऊर्ध्व और पार्श्व रूप कैसे हैं?

(ii) समदूरीक पेपर पर इसकी पुन: रचना कीजिए।

(iii) बताइए यहाँ भ्रम की स्थिति क्यों बनती है?

गणित चर्चा

© NCERT not to be republished

सारांश

- खंडक (Fractals) प्रकृति तथा कलाओं में मिलने वाली स्व-समरूप ज्यामितीय रचनाएँ हैं।
- सिएरपिंस्की चटाई, सिएरपिंस्की गास्केट और कोच हिमकण गणितीय खंडक के कुछ उदाहरण हैं। इन्हें कुछ ज्यामितीय संक्रियाओं को पुन:-पुन: दोहराकर प्राप्त किया जा सकता है जो खंडक बनाने वाली आकृतियों का अनुक्रम बनाते हैं।
- घनाभ, चतुष्फलक, बेलन, शंकु, प्रिज्म, पिरामिड और अष्टफलक कुछ ऐसे ठोस हैं जिन्हें उपयुक्त **जाल** को मोड़कर बनाया जा सकता है।
- एक घनाभ की सतह पर दो बिंदुओं के मध्य सबसे छोटा मार्ग, घनाभ के उपयुक्त जाल का उपयोग करके प्राप्त किया जा सकता है।
- किसी भी ठोस वस्तु को समतल सतह पर प्रदर्शित करने के लिए उसके समतल सतह पर **प्रक्षेपण** का उपयोग किया जा सकता है। सामान्यत: इसके लिए हम वस्तु के **अग्र दृश्य** (**ऊर्ध्वाधर तल** पर प्रक्षेपण), **ऊर्ध्व दृश्य** (**क्षैतिज तल** पर प्रक्षेपण) और **पार्श्व दृश्य** (**पार्श्व तल** पर प्रक्षेपण) का प्रयोग करते हैं।
- एक घन को इस प्रकार घुमाया जा सकता है कि प्रक्षेपण में उसके सभी किनारों की लंबाई समान हो। इस प्रक्षेपण को **समदूरीक प्रक्षेपण** कहा जाता है। विभिन्न ठोस वस्तुओं के समदूरीक प्रक्षेपणों का चित्रांकन समदूरीक बिंदुकित जाल पेपर का उपयोग करके किया जा सकता है।

© NCERT not to be republished