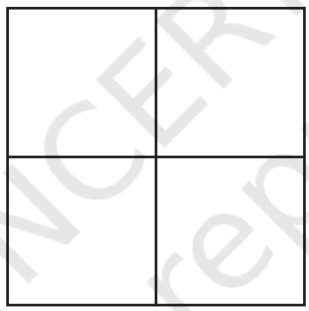
7 क्षेत्रफल

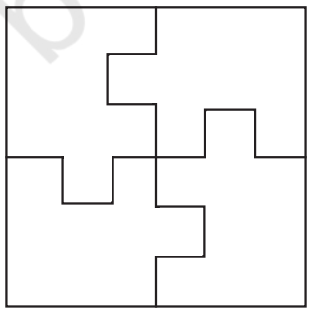
7.1 आयत और वर्ग

? आप एक वर्ग को समान क्षेत्रफल के 4 भागों में कितने विभिन्न प्रकारों से विभाजित कर सकते हैं?

वास्तव में ऐसी अनंत विधियों के विषय में विचार किया जा सकता है! आइए, विभाजन करने के एक प्रकार पर विचार करते हैं, जैसे—



अब प्रत्येक भाग को निम्नानुसार परिवर्तित कीजिए—



प्रत्येक भाग में क्षेत्रफल एक छोर से संपीड़ित है और दूसरे छोर से विस्तारित है। यदि संपीड़न और विस्तार दोनों का परिमाण समान है तो चारों भागों का क्षेत्रफल अब भी समान ही होगा!

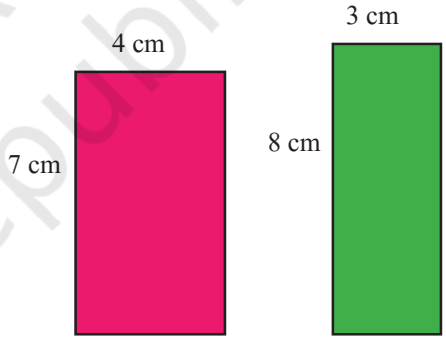
? एक वर्ग को समान क्षेत्रफल के 4 भागों में विभाजित करने की विभिन्न रचनात्मक विधियों के विषय में विचार कीजिए।

गणित चर्चा

© NCERT not to be republished

आपने रंगोली को कला रूप में देखा होगा, जिसमें विभिन्न आकृतियों के क्षेत्रों को रंगोली के रंगों का प्रयोग करके सौंदर्यपूर्ण ढंग से रंगा जाता है।

? यदि इन आयतों में समान रूप से रंग भरा जाता है तो कौन-से आयत को अधिक रंग की आवश्यकता होगी?



हम इसका उत्तर प्रत्येक आयत में व्यवस्थित किए जा सकने वाले उन वर्गों (इस स्थिति में 1 cm भुजा वाले वर्ग) की संख्या को गिनकर बता सकते हैं जो एक-दूसरे को आच्छादित न करते हों।

स्पष्ट रूप से 7 cm व 4 cm भुजाओं वाले आयत में $7 \times 4 = 28$ इकाई वर्ग होंगे और 8 cm व 3 cm भुजाओं वाले आयत $8 \times 3 = 24$ इकाई वर्ग होंगे।

अत: 7 cm और 4 cm भुजा की लंबाई वाले आयत को रंगने के लिए अधिक रंगों की आवश्यकता होगी।

स्मरण कीजिए कि हम किसी क्षेत्र का क्षेत्रफल, इकाई वर्गों की संख्या ज्ञात करके (जो कि एक भिन्न भी हो सकती है) मापते हैं जिनका क्षेत्रफल दिए गए क्षेत्र के समान होता है।

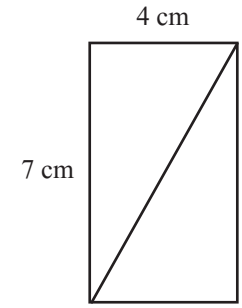
हमने देखा कि आयत में समाहित इकाई वर्गों की संख्या इसकी लंबाई और चौड़ाई के गुणनफल द्वारा दी जाती है—

आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

ऊपर दिए गए प्रश्न में दिए गए आयतों के क्षेत्रफल को सामान्यत: 28 cm^2 और 24 cm^2 अथवा 28 cm^2 और 24 cm^2 लिखा जाता है।

© NCERT not to be republished

? दिए गए आयत में प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल कितना है?



हमें ज्ञात है कि किसी आयत का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है। अत: प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल आयत के क्षेत्रफल का आधा होगा।

इकाई वर्गों के पदों में आधा क्षेत्रफल ठीक आधी संख्या में इकाई वर्गों को पूरित करता है।

अत: प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{1}{2} \times 7 \times 4 = 14\ cm^2$ है।

परिमाप, क्षेत्रफल का माप क्यों नहीं हो सकता है?

? हम क्षेत्रफल का माप निर्धारित करने के लिए इकाई वर्गों की संख्या की गणना क्यों करते हैं? क्या इसे ज्ञात करने के लिए हम किसी क्षेत्र के परिमाप का उपयोग नहीं कर सकते थे, जो इसकी सीमाओं की लंबाई होती है?

? यदि दो क्षेत्रों का परिमाप समान हो तो क्या हम यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते हैं कि उनका क्षेत्रफल समान है? अथवा यदि एक क्षेत्र का परिमाप दूसरे क्षेत्र से अधिक है तो क्या हम यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते हैं कि इसका क्षेत्रफल भी अधिक होगा?

किसी क्षेत्र का परिमाप इसके क्षेत्रफल का सूचक नहीं होता है। इसका कारण यह है कि क्षेत्रों के परिमाप समान परंतु उनके क्षेत्रफल भिन्न-भिन्न हो सकते हैं। इसके विपरीत क्षेत्रों के परिमाप भिन्न-भिन्न किंतु क्षेत्रफल समान हो सकते हैं। हम ऐसे दो क्षेत्र, क्षेत्र 1 और क्षेत्र 2 भी ज्ञात कर सकते हैं, जिनमें—

क्षेत्र 1 का परिमाप > क्षेत्र 2 का परिमाप, परंतु

क्षेत्र 1 का क्षेत्रफल < क्षेत्र 2 का क्षेत्रफल

? ऐसे दो आयतों को ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार के क्षेत्रों के उदाहरण हों। यदि आवश्यकता हो तो इसके लिए बिंदुकित जाल (ग्रिड) पेपर (इस पुस्तक के अंत में दिए गए हैं) का उपयोग कीजिए।

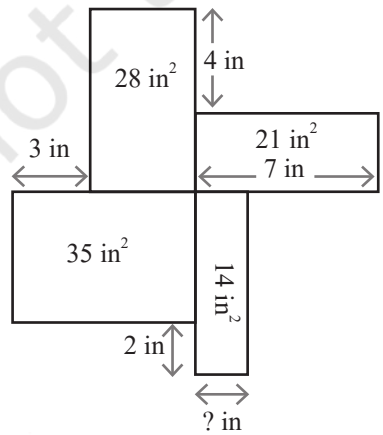
? अन्य आकारों के ऐसे दो क्षेत्रों के उदाहरण भी दीजिए जहाँ अधिक परिमाप वाले क्षेत्र का क्षेत्रफल कम हो! आपके उदाहरण में यह विशेषता स्पष्ट रूप से दिखाई देनी चाहिए।

गणित चर्चा

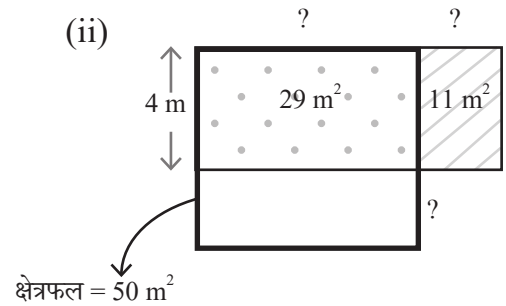
? आइए, पता लगाएँ

1. भुजाओं की अज्ञात लंबाई ज्ञात कीजिए।

(i)

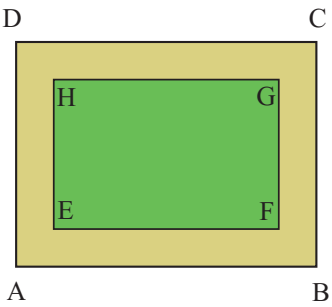


(ii)



© NCERT not to be republished

2. चित्र में आयताकार पार्क EFGH के चारों ओर बनाए गए मार्ग (छायांकित भाग) को दर्शाया गया है।



(i) इस मार्ग के क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए आपको कौन-से मापों की आवश्यकता है? मापी जाने वाली लंबाइयों को पहचानने के पश्चात आप इन मापों के लिए अपनी इच्छानुसार संभव मानों को निर्धारित कीजिए तथा मार्ग का क्षेत्रफल आपस में ज्ञात कीजिए। इस क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए सूत्र दीजिए।

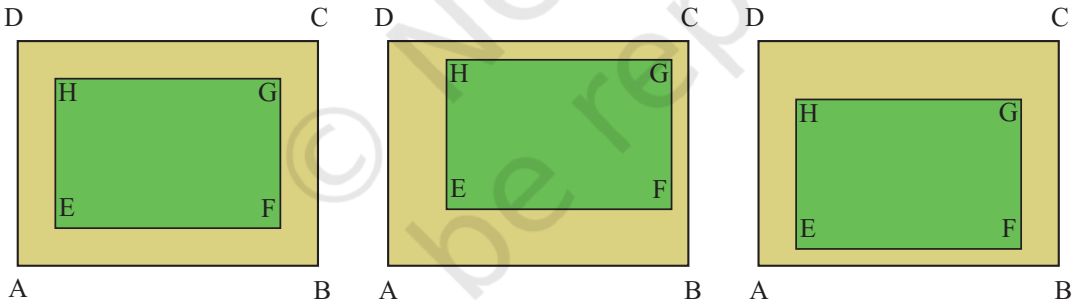
सूत्र का उदाहरण— *आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई*

[**संकेत**— EFGH, मार्ग और ABCD के क्षेत्रफल आपस में संबंधित हैं।]

(ii) यदि मार्ग की प्रत्येक भुजा की चौड़ाई दी गई हो तो क्या आप इसका क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं? यदि नहीं, तो आपको कौन-से अन्य मापों की आवश्यकता है? इन मापों को अपनी पसंद के मान दीजिए और मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। इन मापों का प्रयोग करते हुए इस क्षेत्रफल के लिए एक सूत्र दीजिए।

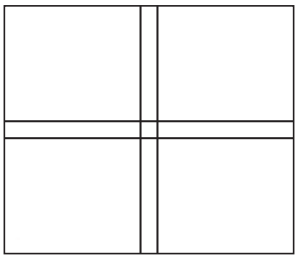
[**संकेत**— मार्ग को आयतों में विभाजित कीजिए]

(iii) जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है कि यदि बाहरी आयत ABCD को इस प्रकार स्थानांतरित किया जाए कि आंतरिक आयताकार पार्क EFGH उसके भीतर ही रहे, तो क्या मार्ग का क्षेत्रफल बदल जाएगा?



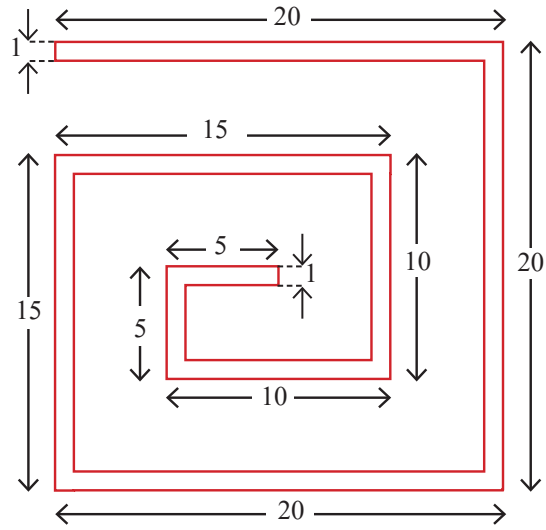
गणित चर्चा

3. चित्र में 14 m और 12 m भुजाओं वाला एक भूखंड, एक आवागमन मार्ग के साथ को दर्शा रहा है। बताइए कि इन आवागमन मार्ग के क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए आपको अन्य कौन-सी मापों की आवश्यकता है? मापी जाने वाली लंबाइयों को पहचानने के पश्चात आप इनके लिए अपनी इच्छानुसार संभव मान निर्धारित कीजिए और मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। आप अपने द्वारा चयनित मापों के आधार पर क्षेत्रफल के लिए सूत्र दीजिए।

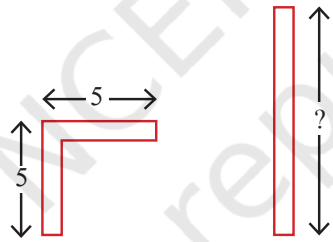


© NCERT not to be republished

4. चित्र में दर्शाई गई सर्पिलाकार नलिका का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। आरंभ से अंत तक नलिका की चौड़ाई एक समान है।

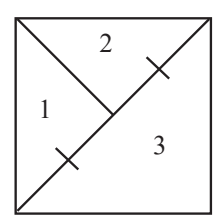


[**संकेत**— क्षेत्रफल ज्ञात करने की भिन्न-भिन्न विधियाँ हैं। इनमें से एक विधि नीचे दर्शाई गई है।]



सीधी नलिका की लंबाई क्या होनी चाहिए यदि इसका क्षेत्रफल बाईं ओर दी गई मुड़ी हुई नलिका के क्षेत्रफल के बराबर है।

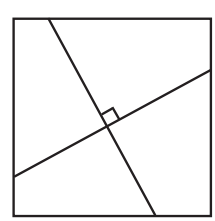
5. दिए गए चित्र में यदि वर्ग की भुजा की लंबाई दोगुनी कर दी जाए तो क्षेत्र 1, 2 और 3 के क्षेत्रफलों में कितनी वृद्धि होगी? इसका कारण दीजिए।



6. चित्र में दर्शाए अनुसार वर्ग के भीतर दो लंब रेखाएँ खींच कर वर्ग को 4 भागों में विभाजित कीजिए।

इन टुकड़ों को पुनर्व्यवस्थित करके एक बड़ा वर्ग बनाइए जिसके आंतरिक भाग में एक छिद्र हो!

गत्ता, मोटा चार्ट पेपर अथवा इसी प्रकार की किसी सामग्री से वर्ग बनाकर आप इस गतिविधि को करने का प्रयास कर सकते हैं।

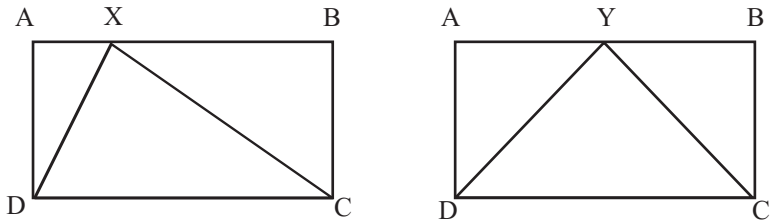


गणित चर्चा

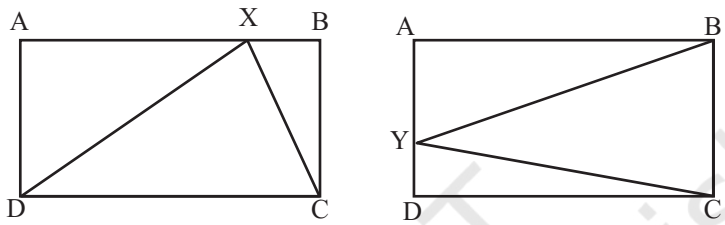
© NCERT not to be republished

त्रिभुज

? दिए गए चित्र में यदि दोनों आयत एक समान हैं तो किस त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिक होगा—ΔXDC अथवा ΔYDC?

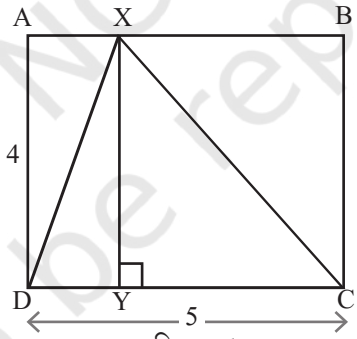


? दिए गए चित्र में यदि दोनों आयत एक समान हैं तो किस त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिक होगा—ΔXDC अथवा ΔYBC?



प्रत्येक स्थिति में X तथा Y से शीर्षलंब डालकर यह स्पष्ट हो जाता है कि प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल, आयत ABCD के क्षेत्रफल का ठीक आधा है।

? ΔXDC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

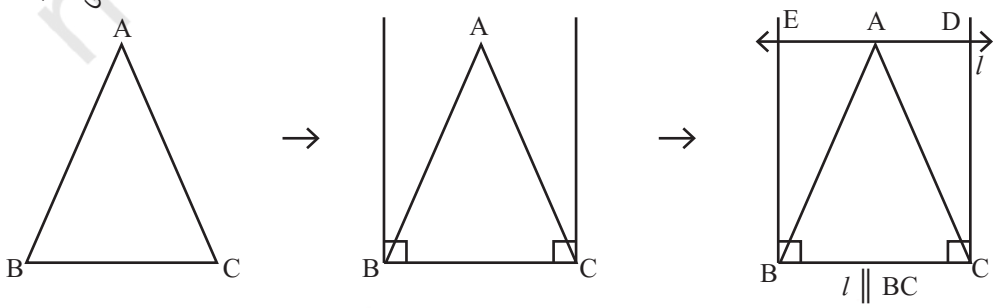


चित्र. 7.1

? किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें किन मापों की आवश्यकता है?

हमें बाह्य आयत की भुजाओं की लंबाई की आवश्यकता है, जैसा कि चित्र 7.1 में दर्शाया गया है।

? दिए गए त्रिभुज से हम बाह्य आयत किस प्रकार प्राप्त करेंगे?

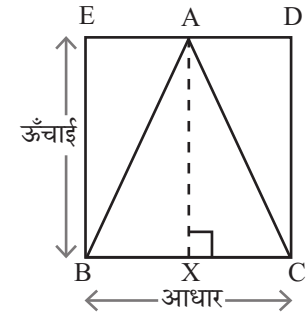


© NCERT not to be republished

BCDE एक आयत है (कैसे?)। आइए, इसकी भुजाओं की लंबाई को हम ऊँचाई और आधार के रूप में लेते हैं।

तब,

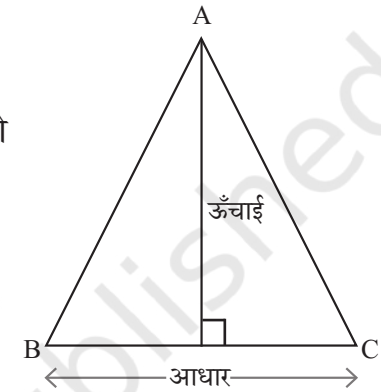
$$\text{क्षेत्रफल } (\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$



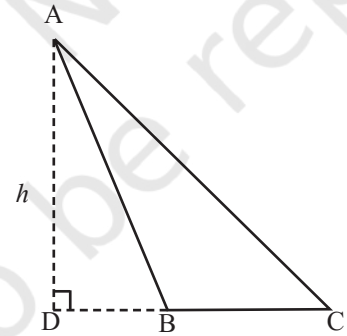
चूँकि BXAE एक आयत है (कैसे?) इसलिए आयत की ऊँचाई त्रिभुज की ऊँचाई के बराबर है।

इस प्रकार यदि त्रिभुज की ऊँचाई और आधार ज्ञात हो तो हम इसका क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं।

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$



? क्या यह सूत्र उस त्रिभुज पर भी लागू होगा जिसमें BC को आधार मानकर हम इसके चारों ओर आयत नहीं बना सकते हैं?



उपर्युक्त प्रश्न को समझने का एक प्रकार नीचे दिया गया है। ΔABC का क्षेत्रफल ΔADC और ΔADB के क्षेत्रफलों का अंतर है जिनमें से प्रत्येक को एक आयत में समाहित किया जा सकता है, जैसा कि चित्र 7.1 में दर्शाया गया है।

$$\text{क्षेत्रफल } (\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times h \times DC - \frac{1}{2} \times h \times DB$$

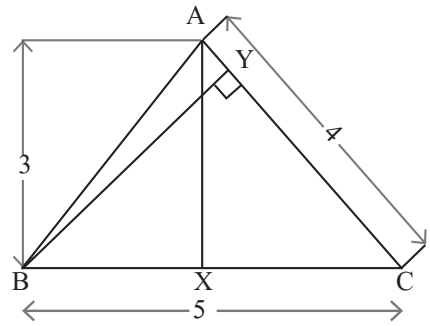
$$= \frac{1}{2} \times h\,(DC - DB)$$

$$= \frac{1}{2} \times h \times BC$$

इस प्रकार क्षेत्रफल का यह सूत्र सभी प्रकार के त्रिभुजों पर लागू होता है।

© NCERT not to be republished

क्षेत्रफल सूत्र के कुछ अनुप्रयोग



? BY की लंबाई ज्ञात कीजिए।

त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र का प्रयोग करके BY की लंबाई ज्ञात की जा सकती है।

ΔABC का क्षेत्रफल क्या है?

$$\text{क्षेत्रफल } (\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times AX \times BC = \frac{15}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$

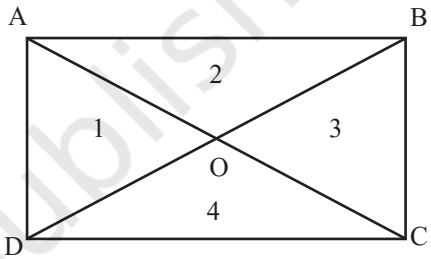
त्रिभुज के क्षेत्रफल को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है—

$$\text{क्षेत्रफल } (\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times BY \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times BY = 2BY$$

इस प्रकार

$$2\,BY = \frac{15}{2}$$

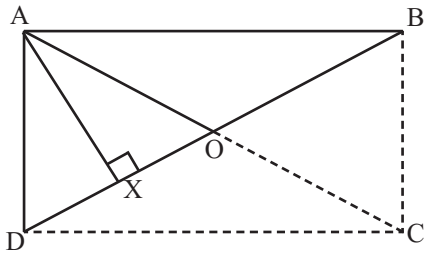
$$\text{अत: } BY = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ इकाई}$$



? क्या एक आयत के विकर्ण खींचने पर प्राप्त किए गए 4 त्रिभुजों (चित्र में क्षेत्रफल 1–4) के क्षेत्रफल समान होते हैं?

स्पष्ट रूप से त्रिभुज 1–4, चार सर्वांगसम त्रिभुज नहीं हैं।

इन त्रिभुजों के क्षेत्रफल की तुलना करने के लिए आइए, किन्हीं दो आसन्न त्रिभुजों, माना 1 और 2 पर विचार करते हैं।

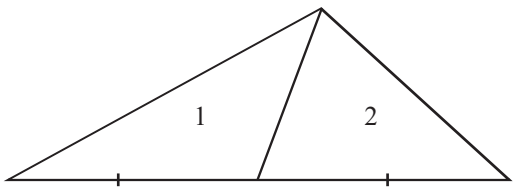


चूँकि त्रिभुज का क्षेत्रफल उसकी ऊँचाई और आधार पर निर्भर करता है, अत: आइए, हम प्रत्येक त्रिभुज के उपयुक्त ऊँचाई-आधार युग्मों पर विचार करते हैं। यदि OD और OB को आधार लिया जाए तो हम देखते हैं कि दोनों त्रिभुजों की ऊँचाई समान है!

हमारे पास OB = OD भी है, क्योंकि आयत के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते है। अत: त्रिभुज 1 और 2 के क्षेत्रफल समान हैं।

अत: इस तर्क से हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि सभी चार त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान है।

इस समस्या से हम निम्नांकित व्यापक कथन दे सकते हैं—

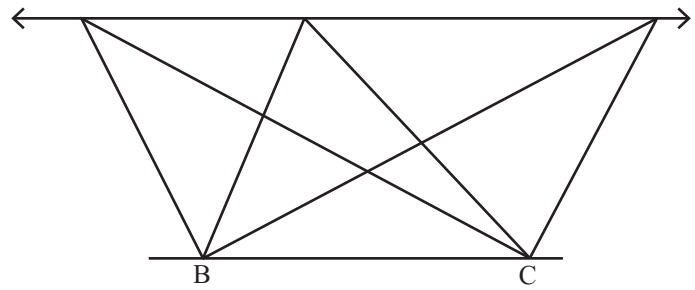


त्रिभुज 1 और 2 के क्षेत्रफल समान हैं क्योंकि उनकी ऊँचाई और आधार का माप समान है।

किसी त्रिभुज में एक शीर्ष को उसकी सम्मुख भुजा के मध्य बिंदु से जोड़ने वाली रेखा, त्रिभुज को समान क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है।

© NCERT not to be republished

समान आधार वाले तथा समांतर रेखाओं के मध्य स्थित त्रिभुज



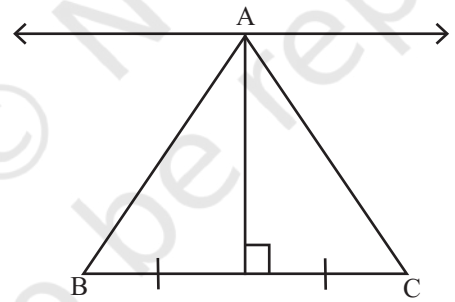
? रेखा $l \parallel BC$ है। उन विभिन्न त्रिभुजों पर विचार कीजिए जिनका आधार BC है और इनका तीसरा शीर्ष l पर कहीं भी स्थित है।

(i) इनमें से कौन-से त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिकतम है और कौन-से त्रिभुज का क्षेत्रफल न्यूनतम है?

(ii) इनमें से कौन-से त्रिभुज का परिमाप अधिकतम है और कौन-से त्रिभुज का परिमाप न्यूनतम है?

हम यहाँ केवल न्यूनतम परिमाप वाले त्रिभुज को ज्ञात करने की विधि दर्शाएँगे और अन्य प्रश्न आपके अभ्यास के लिए छोड़ देंगे।

अंतर्ज्ञान से ऐसा प्रतीत हो सकता है कि BC का लंब समद्विभाजक बनाकर न्यूनतम परिमाप वाला त्रिभुज प्राप्त किया जा सकता है।



परंतु हम यह किस प्रकार सिद्ध करेंगे कि सभी त्रिभुजों में इस त्रिभुज का परिमाप न्यूनतम है?

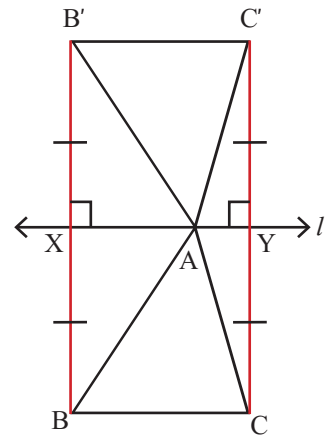
सर्वप्रथम, यह ध्यान दीजिए कि इन सभी त्रिभुजों में BC एक सर्वनिष्ठ भुजा है। अत: अन्य दो भुजाओं के योग पर विचार करना ही पर्याप्त है।

आइए, रेखा l की एक दर्पण के रूप में कल्पना करें। ऐसा करने से हमें इसके नीचे स्थित सभी बिंदुओं और रेखाओं का प्रतिबिंब प्राप्त होता है।

समतल दर्पण के गुणों का अध्ययन करते समय हमने प्रयोगात्मक रूप से अवलोकन किया कि दर्पण के पीछे बनने वाले प्रतिबिंब की दूरी दर्पण के सम्मुख स्थित वस्तु (जिससे प्रतिबिंब बनता है) के बराबर होती है। इस नियम का प्रयोग रेखा l के नीचे स्थित बिंदुओं के प्रतिबिंबों का स्थान निर्धारित करने के लिए किया जा सकता है।

© NCERT not to be republished

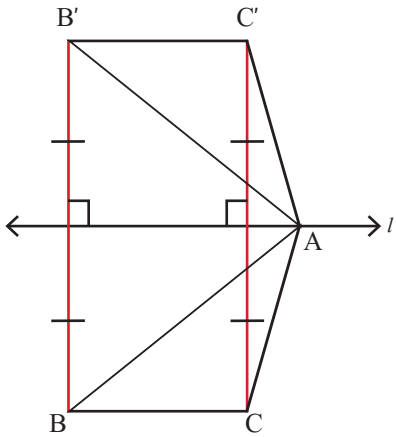
? हम AB और इसके प्रतिबिंब AB′ की लंबाइयों के विषय में क्या कह सकते हैं?



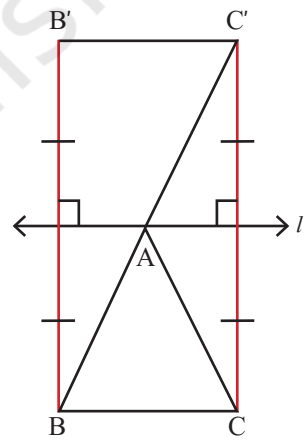
चूँकि $\Delta AXB \cong \Delta AXB'$, $AB = AB'$

इसी प्रकार, $AC = AC'$

अतः मार्ग $B \rightarrow A \rightarrow C$ की लंबाई मार्ग $B \rightarrow A \rightarrow C'$ की लंबाई के बराबर है।



यह सदैव सत्य है और इससे कोई अंतर नहीं पड़ता कि रेखा l पर बिंदु A कहाँ स्थित है।



अतः यथासंभव लघुतम दूरी $B \rightarrow A \rightarrow C$ देने वाले बिंदु A को ज्ञात करना, लघुतम दूरी $B \rightarrow A \rightarrow C'$ दूरी देने वाले बिंदु A को ज्ञात करने के समान है।

परंतु ऊपर दी गई बाद वाली समस्या का समाधान स्पष्ट है— सरल रेखा BC′ पर A का चयन कीजिए, चूँकि BC′, B से C′ तक यथासंभव लघुतम दूरी है।

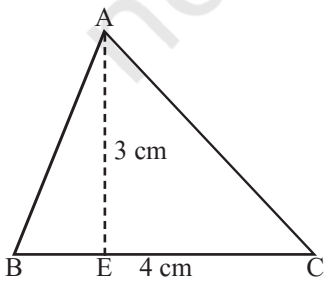
अतः त्रिभुज ΔABC का परिमाप न्यूनतम है।

? विश्लेषण कीजिए कि क्या बिंदु A, रेखाखंड BC के लंब समद्विभाजक पर स्थित है।

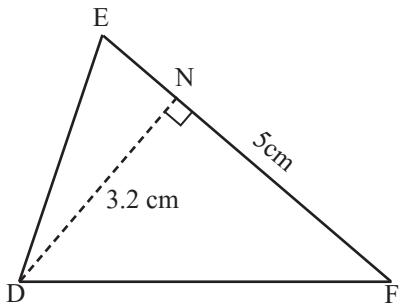
गणित चर्चा

? आइए, पता लगाएँ

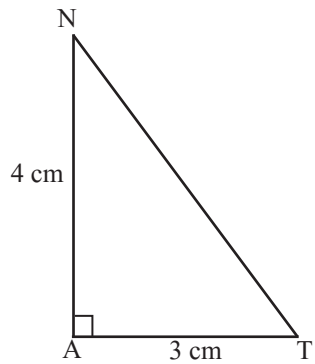
1. नीचे दिए गए त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



(i)



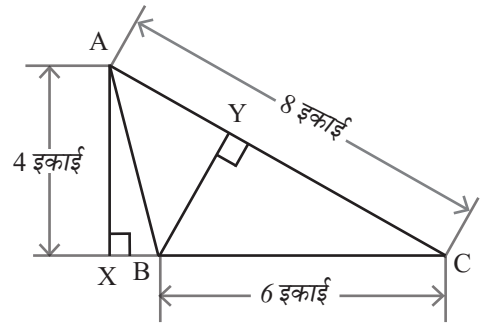
(ii)



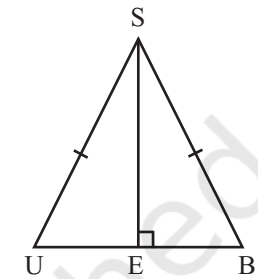
(iii)

© NCERT not to be republished

2. शीर्षलंब BY की लंबाई ज्ञात कीजिए।



3. ΔSUB का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि ज्ञात है कि यह समद्विबाहु त्रिभुज है। SE, UB पर लंब है और ΔSEB का क्षेत्रफल 24 वर्ग इकाई है।



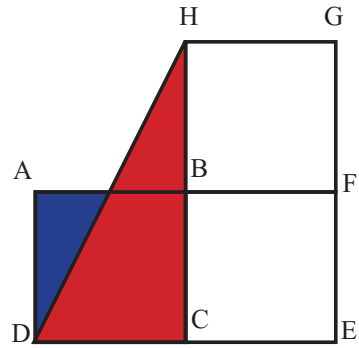
शुल्बसूत्र प्राचीन भारतीय ज्यामितीय ग्रंथ है जो वेदियों के निर्माण से संबंधित है। इसमें हमें क्षेत्रफल से संबंधित अनेक रोचक समस्याएँ देखने को मिलती हैं। वेदियों को बनाते समय उनका आकार और क्षेत्रफल निर्धारित नियमों के अनुरूप ही होना चाहिए। इससे ऐसी समस्याएँ उत्पन्न होती हैं जिनमें किसी दी गई आकृति को समान क्षेत्रफल वाली दूसरी आकृति के रूप में परिवर्तित करना पड़ता है। *शुल्बसूत्र* ऐसी अनेक समस्याओं का समाधान प्रदान करता है।

युक्लिड द्वारा लिखित पुस्तक *एलिमेंट्स* में ऐसे प्रश्न प्रस्तुत किए गए हैं और उनका समाधान भी दिया गया है।

नीचे इस प्रकार की दो समस्याएँ दी गई हैं।

4. [*शुल्बसूत्र*] एक आयत को समान क्षेत्रफल के त्रिभुज में परिवर्तित करने की विधि बताइए।
5. [*शुल्बसूत्र*] एक त्रिभुज को समान क्षेत्रफल के आयत में परिवर्तित करने की विधि बताइए।
6. ABCD, BCEF और BFGH एक समान वर्ग हैं।
   (i) यदि लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल 49 वर्ग इकाई है तो नीले क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा?
   (ii) इस आकृति के एक अन्य रूप में यदि नीले और लाल रंग से घिरा कुल क्षेत्रफल 180 वर्ग इकाई है तो प्रत्येक वर्ग का क्षेत्रफल कितना होगा?

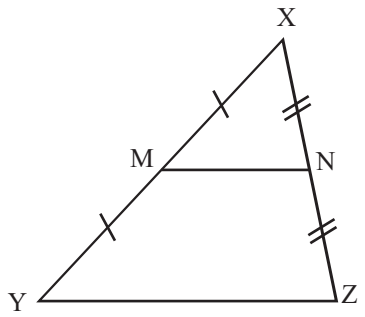
गणित चर्चा



© NCERT not to be republished

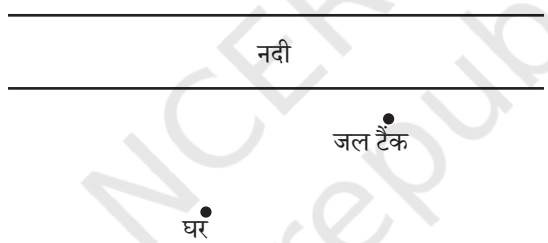
प्रयास कीजिए

7. यदि M और N क्रमश: XY और XZ के मध्य बिंदु हैं तो ΔXYZ के क्षेत्रफल का कितना अंश ΔXMN का क्षेत्रफल है? (**संकेत**— NY को मिलाइए)

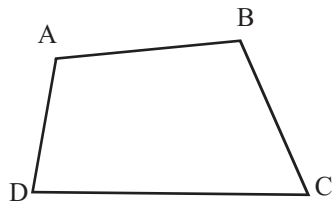


गणित चर्चा

8. गोपाल को अपने जल टैंक को भरने के लिए नदी से जल लेकर जाना है। इसके लिए वह अपने घर से चलना प्रारंभ करता है। बताइए कि सबसे छोटा मार्ग कौन-सा है जिसे वह अपने घर से नदी तक जाने के लिए और पुनः नदी से जल टैंक तक पहुँचने के लिए अपना सकता है? अपनी अभ्यास पुस्तिका में एक कच्चा मानचित्र बनाइए और सबसे छोटा मार्ग चिह्नित कीजिए।



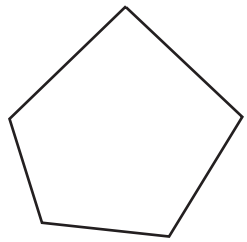
बहुभुज का क्षेत्रफल



? दाईं ओर दिए गए चतुर्भुज का क्षेत्रफल हम किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं? इसके लिए हमें कौन-से माप की आवश्यकता है?

यदि हम BD को मिलाते हैं तो चतुर्भुज ABCD दो त्रिभुजों में विभाजित हो जाएगा। इन दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करके हम ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं।

? हम दिए गए पंचभुज का क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं?



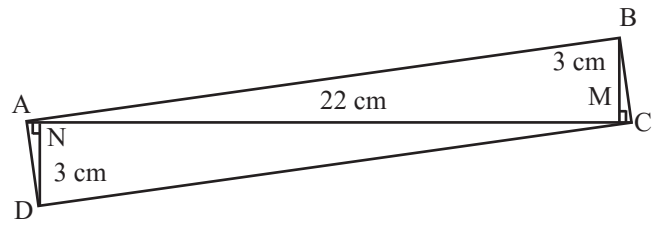
? क्या किसी भी बहुभुज को त्रिभुजों में विभाजित किया जा सकता है?

देखा जा सकता है कि किसी भी बहुभुज को त्रिभुजों में विभाजित किया जा सकता है। अतः यदि हमें किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना आता है तो हम किसी भी बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं।

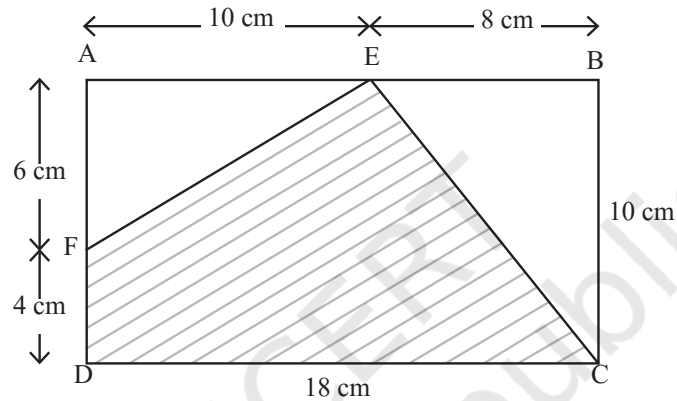
© NCERT not to be republished

आइए, पता लगाएँ

1. चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जहाँ AC = 22 cm, BM = 3 cm, DN = 3 cm हो। इसके साथ ही BM, AC पर लंब है और DN, AC पर लंब है।

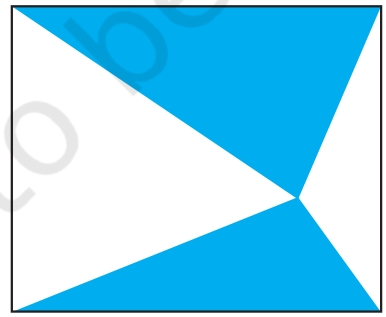


2. यदि ABCD एक आयत है तो छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



3. एक सम षट्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए आपको किन मापों की आवश्यकता होगी? गणित चर्चा

4. नीले क्षेत्र का क्षेत्रफल आयत के कुल क्षेत्रफल का कितना अंश है? गणित चर्चा



5. ऐसे चतुर्भुज को प्राप्त करने की विधि बताइए जिसका क्षेत्रफल दिए गए चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा हो। गणित चर्चा

समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज और समलंब चतुर्भुज के क्षेत्रफल ज्ञात करने के विशेष सूत्र व्युत्पन्न किए जा सकते हैं।

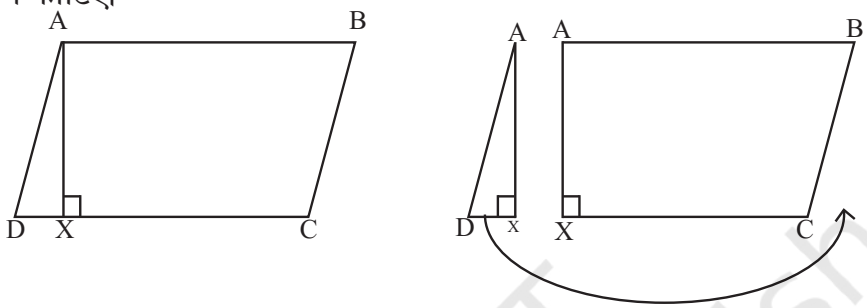
© NCERT not to be republished

समांतर चतुर्भुज

हम समांतर चतुर्भुज को समान क्षेत्रफल वाले आयत में परिवर्तित करके इसका क्षेत्रफल ज्ञात करने का विशेष सूत्र व्युत्पन्न कर सकते हैं।

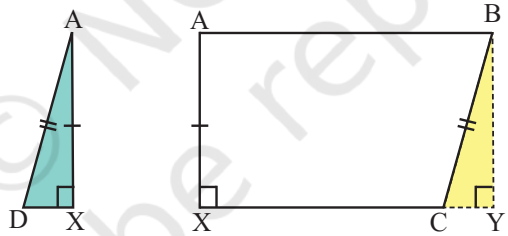
? एक समांतर चतुर्भुज को समान क्षेत्रफल वाले आयत में परिवर्तित करने की एक विधि बताइए। आप समांतर चतुर्भुज के एक कट-आउट का उपयोग करके ऐसा करने का प्रयत्न कर सकते हैं।

CD पर लंब AX की रचना कीजिए जिसे संक्षिप्त में AX ⊥ CD के रूप में दर्शाया जाता है। इसे समांतर चतुर्भुज की **ऊँचाई** कहते हैं। समांतर चतुर्भुज को ΔAXD और समलंब चतुर्भुज ABCX में काटिए।



? क्या ΔAXD व चतुर्भुज ABCX को चित्र में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित करके एक आयत बनाया जा सकता है?

यह जाँचने का एक सरल उपाय यह है कि उस त्रिभुज की पहचान की जाए जो ABCX को आयत के रूप में पूर्ण करता हो और इसके पश्चात यह जाँचा जाए कि क्या यह त्रिभुज, ΔAXD के सर्वांगसम है।



ध्यान दीजिए कि ∠X = 90° है और चूँकि AB || XC है, अत: ∠A = 90° होगा। हमें आयत बनाने के लिए एक अन्य समकोण की आवश्यकता है। (चौथे कोण का क्या होगा?)तीसरा समकोण प्राप्त करने के लिए XC को दाईं ओर बढ़ाइए इसके पश्चात XC पर एक लंब रेखा की रचना कीजिए जो B से होकर जाती हो। ΔBYC चतुर्भुज ABCX को एक आयत के रूप में पूर्ण करता है। क्या ΔAXD इस त्रिभुज के सर्वांगसम है?

BY = AX (चूँकि ABYX एक आयत है।)

∠BYC = ∠AXD = 90°

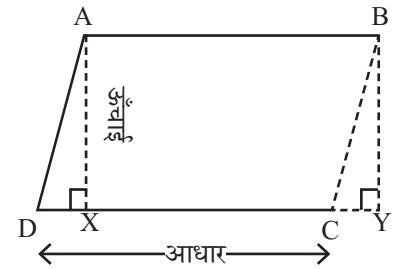
BC = AD (चूँकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।)

अत: RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध से ΔBYC ≅ ΔAXD है। इस प्रकार ΔBYC द्वारा घेरे गए क्षेत्र पर ΔAXD पूर्णतया व्यवस्थित हो जाएगा और यह समांतर चतुर्भुज को आयत में परिवर्तित कर देगा।

© NCERT not to be republished

किसी आकृति को टुकड़ों में काटना और समान क्षेत्रफल की भिन्न आकृति प्राप्त करने के लिए उन टुकड़ों को पुनर्व्यवस्थित करना **विच्छेदन** कहलाता है।

? हम किसी समांतर चतुर्भुज को आयत के रूप में विच्छेदित करके इसका क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं?



हम जानते हैं कि

समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = आयत ABYX का क्षेत्रफल

आयत ABYX का क्षेत्रफल = AX × XY

AX समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई है।

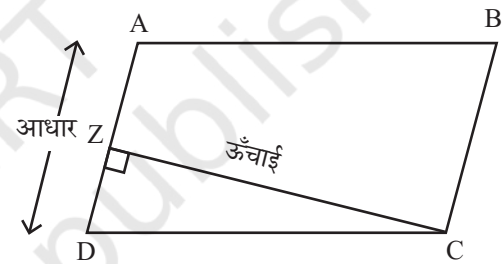
? क्या XY व DC के मध्य कोई संबंध है?

चूँकि DX = CY है, अत: हम उभयनिष्ठ भाग XC को DX व CY में जोड़कर DC = XY प्राप्त करते हैं। चूँकि DC समांतर चतुर्भुज का आधार है, अत: हमें प्राप्त होता है—

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

? क्या समांतर चतुर्भुज की अन्य भुजा को आधार मानकर एवं इसकी संगत ऊँचाई लेते हुए चतुर्भुज के क्षेत्रफल को निर्धारित किया जा सकता है?

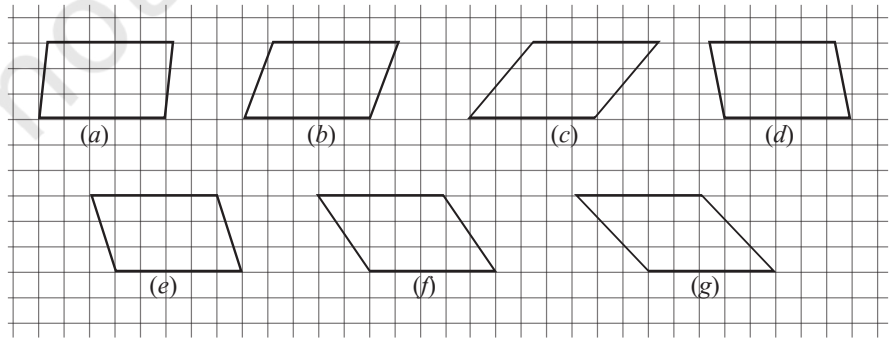
? क्या समांतर चतुर्भुज को CZ के अनुदिश काटकर उसके भागों को पुन: व्यवस्थित करके एक आयत बनाया जा सकता है?



यह देखा जा सकता है कि वास्तव में यह संभव है और इसलिए समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए किसी भी भुजा व इसकी संगत ऊँचाई को उपयोग किया जा सकता है।

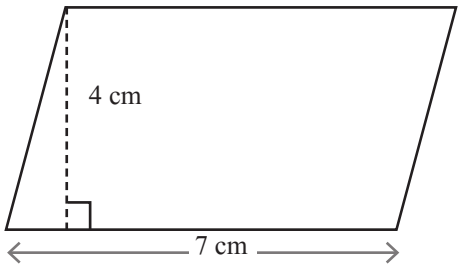
? आइए, पता लगाएँ

1. नीचे दिए गए चित्र में समांतर चतुर्भुजों का अवलोकन कीजिए।
   (i) इन सभी समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल के विषय में क्या कहा जा सकता है?
   (ii) इनके परिमापों के विषय में हम क्या कह सकते हैं? किस आकृति का परिमाप सर्वाधिक प्रतीत होता है और किस आकृति का परिमाप सबसे कम प्रतीत होता है?

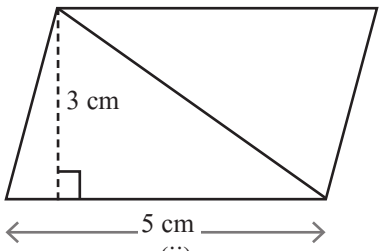


© NCERT not to be republished

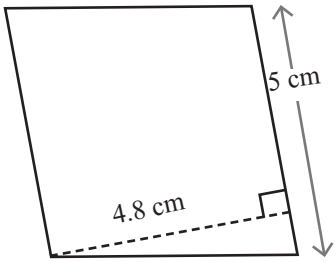
2. नीचे दिए गए समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



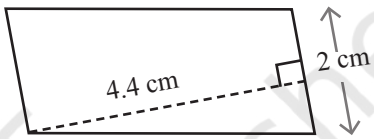
(i)



(ii)

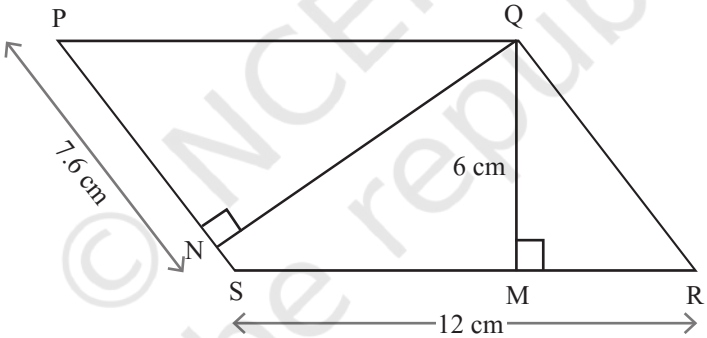


(iii)

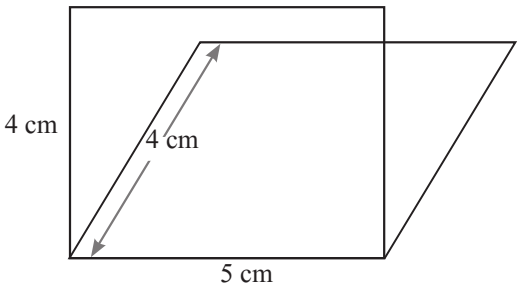


(iv)

3. QN ज्ञात कीजिए।



4. समान भुजाओं की लंबाई 5 cm और 4 cm वाले एक आयत और एक समांतर चतुर्भुज पर विचार कीजिए। इनमें से किस आकृति का क्षेत्रफल अधिक है? [**संकेत**—दोनों आकृतियों की रचना एक ही आधार पर करने की कल्पना कीजिए।]

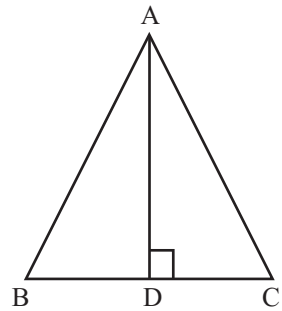


5. एक दिए गए त्रिभुज के क्षेत्रफल से दोगुना क्षेत्रफल वाले आयत को प्राप्त करने की एक विधि बताइए। इसके साथ ही आप किन भिन्न विधियों के विषय में सोच सकते हैं?

© NCERT not to be republished

6. [*शुल्बसूत्र*] दिए गए त्रिभुज के क्षेत्रफल के समान क्षेत्रफल वाला आयत प्राप्त करने की एक विधि बताइए।

7. [*शुल्बसूत्र*] एक समद्विबाहु त्रिभुज को सरल विधि से विच्छेदित करके एक आयत में परिवर्तित किया जा सकता है। क्या आप ज्ञात कर सकते हैं कि यह किस प्रकार किया जाए?



[**संकेत** — दर्शाइए कि त्रिभुज ΔADB और ΔADC को आयत के आधे भागों में बाँटा जा सकता है। ज्ञात कीजिए कि एक आयत प्राप्त करने के लिए इन्हें किस प्रकार संकलित किया जाना चाहिए। यदि आवश्यक हो तो कट-आउट्स का उपयोग कीजिए।]

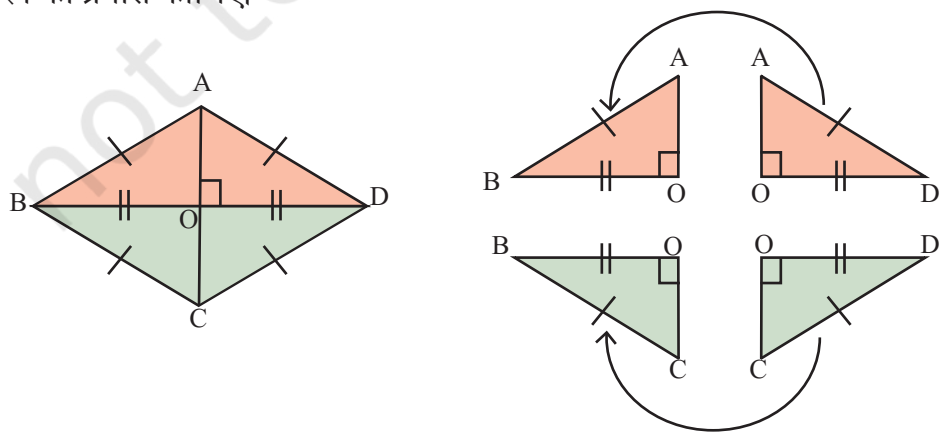
8. [*शुल्बसूत्र*] एक आयत को विच्छेदित करके एक समद्विबाहु त्रिभुज में परिवर्तन करने की एक विधि बताइए।

9. यदि एक समबाहु त्रिभुज एवं वर्ग की भुजा की लंबाई समान हो तो किसका क्षेत्रफल अधिक होगा? दो एक समान (सर्वांगसम) समबाहु त्रिभुजों का संयुक्त क्षेत्रफल अधिक होता है या इस त्रिभुज के समान भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल? तर्क दीजिए।

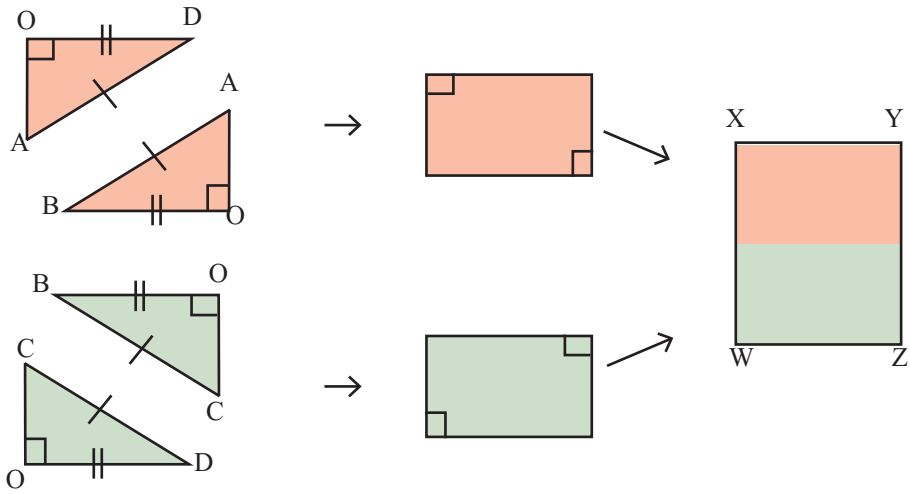
समचतुर्भुज

चूँकि समचतुर्भुज एक प्रकार का समांतर चतुर्भुज है, अत: समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र समचतुर्भुज के लिए भी लागू होता है। इसके पश्चात भी समचतुर्भुज के अतिरिक्त गुणों के कारण हमें एक अन्य विधि प्राप्त होती है जिससे समचतुर्भुज को विच्छेदन के द्वारा समान क्षेत्रफल वाले आयत में परिवर्तित किया जा सकता है। यह विधि *शुल्बसूत्र* में उल्लेखित है।

? इसे करने का प्रयास कीजिए।



© NCERT not to be republished



चूँकि ABCD एक समचतुर्भुज है। अत: इसकी सभी भुजाएँ समान लंबाई की हैं और विकर्ण एक-दूसरे के लंब समद्विभाजक हैं। अतः ΔABD और ΔCBD समद्विबाहु त्रिभुज हैं। इनमें से प्रत्येक त्रिभुज को समान क्षेत्रफल वाले आयत के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है और इसके पश्चात इन दो आयतों को जोड़कर एकल आयत बनाया जा सकता है। इस आयत, मान लीजिए WXYZ, का क्षेत्रफल, समचतुर्भुज ABCD के क्षेत्रफल के बराबर है।

? आयत WXYZ की भुजाओं की लंबाई क्या है?

विच्छेदन द्वारा हम देख सकते हैं कि

XW = विकर्ण AC की लंबाई और

WZ = अन्य विकर्ण BD की लंबाई का आधा

अतः

समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = आयत WXYZ का क्षेत्रफल

$$= XW \times WZ$$

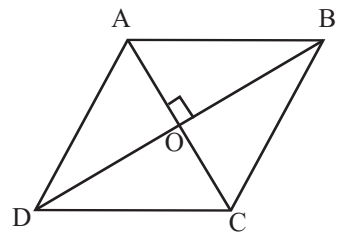
$$= AC \times \frac{BD}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times AC \times BD$$

अत:

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ *विकर्णों का गुणनफल*

? समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ΔADB व ΔCDB के क्षेत्रफलों को ज्ञात करके भी निर्धारित किया जा सकता है। इससे हमें कौन-सा सूत्र प्राप्त होता है?



चूँकि विकर्ण एक-दूसरे के लंबवत हैं, अत:

क्षेत्रफल $(\Delta ADB) = \frac{1}{2} \times AO \times BD$, और

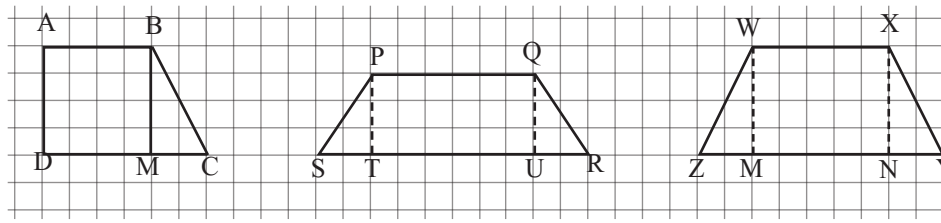
क्षेत्रफल $(\Delta CDB) = \frac{1}{2} \times CO \times BD$, और

समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = क्षेत्रफल (ΔADB) + क्षेत्रफल (ΔCDB)

? इस व्यंजक को सरलीकृत कीजिए जिससे यह प्रदर्शित हो कि हमें समचतुर्भुज के क्षेत्रफल का उसके विकर्णों के पदों में वही सूत्र प्राप्त होता है।

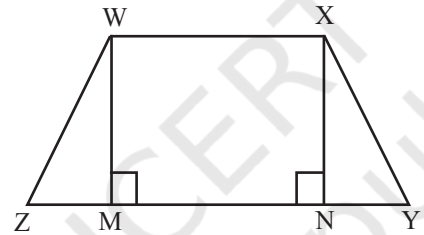
समलंब चतुर्भुज

? नीचे दिए गए समलंब चतुर्भुजों को ऐसी आकृतियों में विभाजित करके उनका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिनके क्षेत्रफल को परिकलित किया जा सके।



समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने की एक विधि यह है कि उसे एक आयत और एक त्रिभुज में विभाजित कर दिया जाए।

? एक समलंब चतुर्भुज WXYZ पर विचार कीजिए जिसमें WX || ZY है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



WM ⊥ ZY और XN ⊥ ZY की रचना कीजिए (WM व XN, ZY पर लंब है)।

? क्या WXNM एक आयत है?

∠MWX = ∠NXW = 90° है, चूँकि WX || ZY है और तिर्यकछेदी रेखा (WM व XN) के एक ही ओर के आंतरिक कोणों का योग 180° होता है। अत: WXNM एक आयत है।

हमें ज्ञात है

क्षेत्रफल (WXYZ) = क्षेत्रफल (ΔWMZ) + क्षेत्रफल (WXNM) + क्षेत्रफल (ΔXNY)

$$= \frac{1}{2} \times MZ \times WM + WX \times WM + \frac{1}{2} \times NY \times XN$$

आइए, समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें जिन लंबाइयों की आवश्यकता है उन्हें अक्षर संख्याओं से प्रदर्शित करते हैं। मान लीजिए MZ = x, WM = XN = h, WX = a, NY = y है।

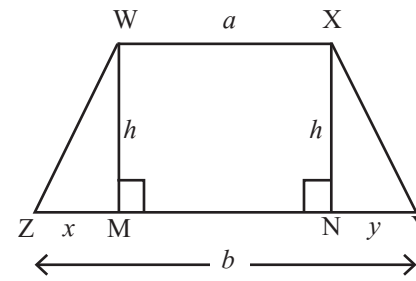
अत: हमें प्राप्त होता है

$$\text{क्षेत्रफल WXYZ} = \frac{1}{2} hx + ha + \frac{1}{2} hy$$

$$= h\left(\frac{1}{2} x + a + \frac{1}{2} y\right)$$

$$= h\left(\frac{x + y + 2a}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} h (x + y + 2a)$$



© NCERT not to be republished

हमने समांतर भुजाओं में से एक की लंबाई को a माना है। मान लीजिए अन्य समांतर भुजा की लंबाई b है।

क्या समलंब चतुर्भुज के क्षेत्रफल को a, b और h के पदों में व्यक्त किया जा सकता है?

क्षेत्रफल के व्यंजक में से $x + y$ को a तथा b से विस्थापित करने पर यह देखा जा सकता है कि $b = x + y + a$ है। दोनों ओर से a को घटाने पर हमें प्राप्त होता है—

$$x + y = b - a$$

इसका उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है—

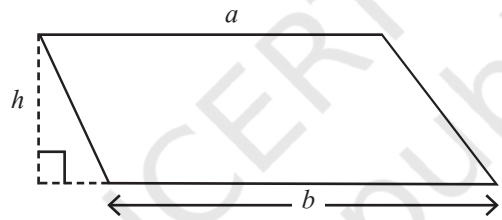
$$\text{क्षेत्रफल WXYZ} = \frac{1}{2} h\,(b - a + 2a)$$

$$= \frac{1}{2} h\,(a + b)$$

अत:

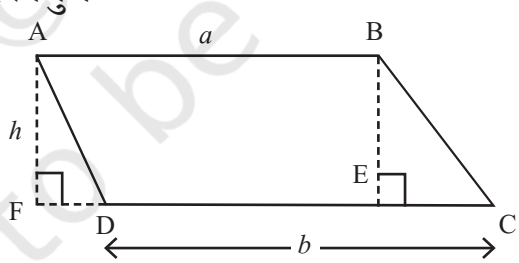
समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ *ऊँचाई* $\times$ *समांतर भुजाओं का योग*

? क्या यह सूत्र उस समलंब चतुर्भुज पर भी लागू होता है जो नीचे दिए गए चतुर्भुज के समान दिखाई देता है?



इसके लिए सूत्र तक पहुँचने की विभिन्न विधियाँ हैं जिन्हें नीचे चित्र द्वारा प्रदर्शित किया गया है। तर्कों को पूरा कीजिए।

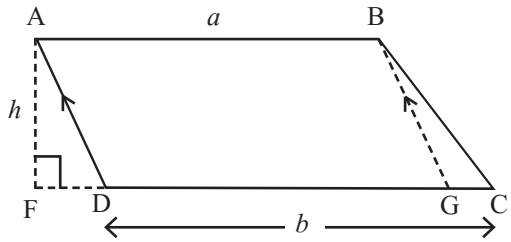
विधि 1— आयत और त्रिभुज



क्षेत्रफल ABCD = क्षेत्रफल ABED + क्षेत्रफल ΔBEC

क्षेत्रफल ABED = क्षेत्रफल ABEF – क्षेत्रफल ΔAFD

विधि 2— समांतर चतुर्भुज और त्रिभुज



BG ∥ AD खींचिए

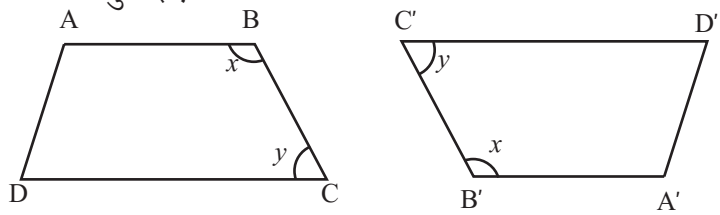
© NCERT not to be republished

गणित चर्चा

? क्या विधि 2 किसी भी प्रकार के समलंब चतुर्भुज के लिए उपयोगी होगी?

समलंब चतुर्भज के दो रूपों का उपयोग करके क्षेत्रफल ज्ञात करना

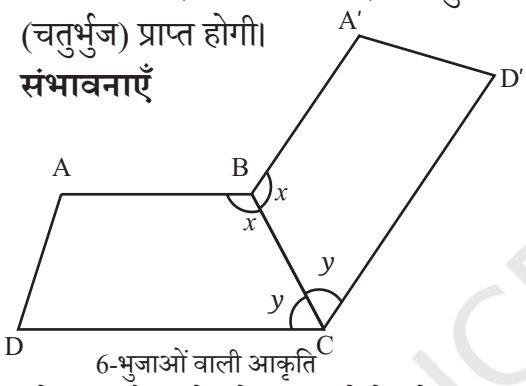
किसी समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने की एक अन्य रोचक विधि भी है। दिए गए समलंब चतुर्भुजों के दो रूपों पर विचार कीजिए जिनमें AB || CD है। चित्र में दर्शाए अनुसार चतुर्भुज के दूसरे रूप को घुमाइए।



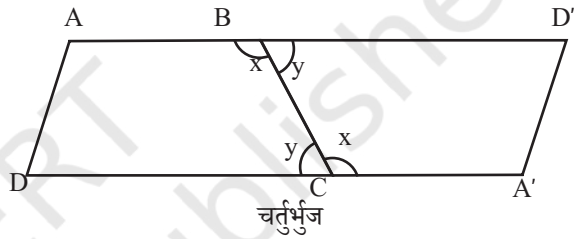
? यदि दोनों समलंब चतुर्भुजों को BC के अनुदिश मिला दिया जाए तो हमें कौन-सी आकृति प्राप्त होगी?

संभावनाएँ हैं कि या तो एक 6 भुजाओं वाली आकृति या एक 4 भुजाओं वाली आकृति (चतुर्भुज) प्राप्त होगी।

संभावनाएँ



6-भुजाओं वाली आकृति



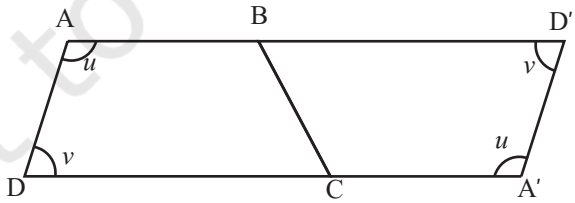
चर्तुर्भुज

कोण x और y के योगफल को देखते हुए हम पहली संभावना को निरस्त कर सकते हैं।

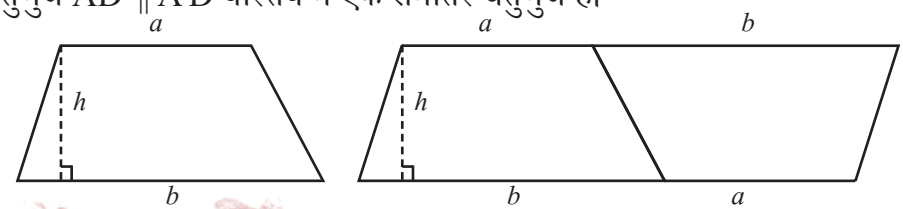
चूँकि AB || CD है, अत: हमारे पास $x + y = 180°$ है क्योंकि वे तिर्यक रेखा (BC) के एक ही ओर के आंतरिक कोण हैं। अत: ABD′ व A′CD सरल रेखाएँ हैं। अत: परिणामी आकृति एक चतुर्भुज है।

? बताइए कि यह किस प्रकार का चतुर्भुज है?

आइए, समलंब चतुर्भुज के अन्य दो कोणों को देखें।



हमारे पास $u + v = 180$ है। अत: AD || D′A′ है क्योंकि तिर्यक रेखा (A′D) के एक ही ओर के आंतरिक कोणों का योगफल 180° होता है। चूँकि हमें पहले से ही ज्ञात है कि AD′ || A′D है अत: चतुर्भुज AD′ || A′D वास्तव में एक समांतर चतुर्भुज है।

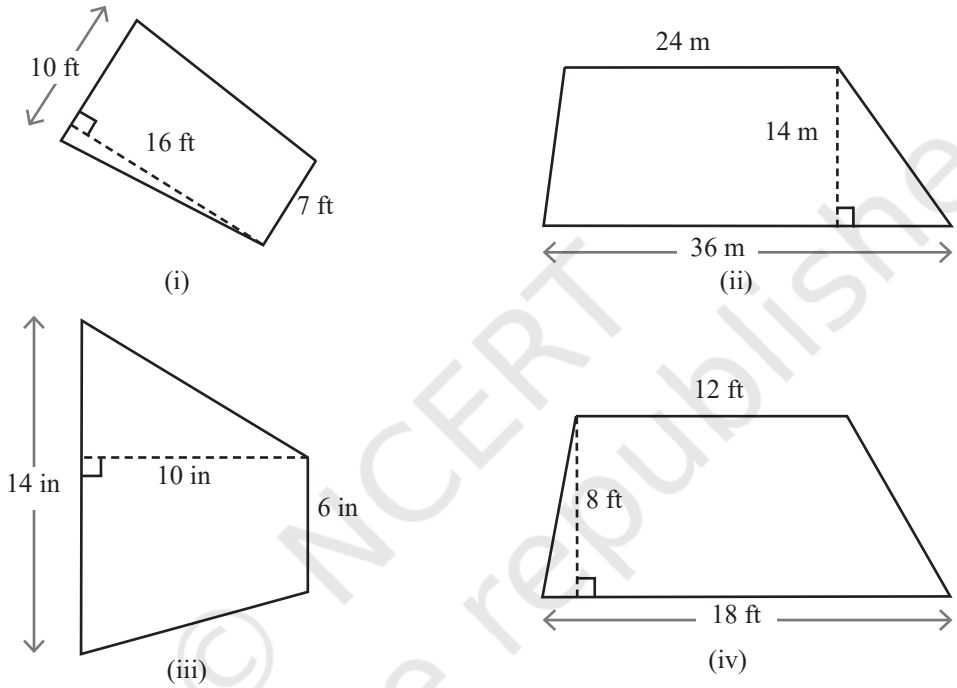


© NCERT not to be republished

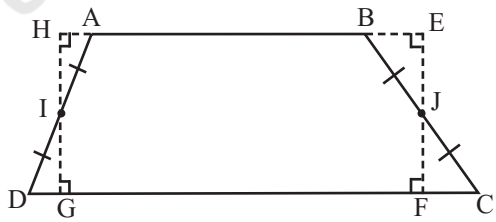
$$\text{समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल}$$
$$= \frac{1}{2} h(a + b)$$

आइए, पता लगाएँ

1. उस समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्ण 20 cm और 15 cm हैं।
2. विच्छेदन का उपयोग करते हुए किसी आयत को समान क्षेत्रफल वाले समचतुर्भुज में परिवर्तित करने की एक विधि बताइए।
3. नीचे दी गई आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



4. [*शूल्बसूत्र*] विच्छेदन का उपयोग करते हुए किसी समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज को आयत में परिवर्तित करने की एक विधि बताइए।
5. यहाँ समलंब चतुर्भुज ABCD को समान क्षेत्रफल वाले आयत EFGH में परिवर्तित करने की एक विधि बताइए।



बताइए कि दिए गए समलंब चतुर्भुज ABCD के लिए हम आयत EFGH के शीर्ष किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

[**संकेत** — यदि $\Delta AHI \cong \Delta DGI$ और $\Delta BEJ \cong \Delta CFJ$ हो तो समलंब चतुर्भुज और आयत के क्षेत्रफल समान होंगे।]

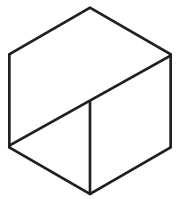
गणित चर्चा

© NCERT not to be republished

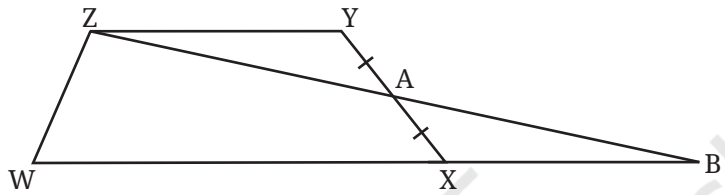
गणित चर्चा

6. एक समलंब चतुर्भुज को समान क्षेत्रफल वाले आयत में परिवर्तित करने की समझ का उपयोग करते हुए एवं इसके विपरीत एक आयत को समान क्षेत्रफल वाले समलंब चतुर्भुज में परिवर्तित करने की समझ का उपयोग करते हुए 144 cm^2 क्षेत्रफल वाले एक समलंब चतुर्भुज की रचना कीजिए।

7. एक समषट्भुज को चित्र में दर्शाए अनुसार एक समलंब चतुर्भुज, एक समबाहु त्रिभुज एवं एक समचतुर्भुज में विभाजित किया गया है। इन आकृतियों के क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।



8. ZYXW एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें ZY || WX है। A, XY का मध्यबिंदु है। दर्शाइए कि समलंब चतुर्भुज ZYXW का क्षेत्रफल ΔZWB के क्षेत्रफल के समान है।



वास्तविक जीवन में क्षेत्रफल

? आपके अनुसार एक A4 आकार के पत्रक का क्षेत्रफल कितना होगा? इस पत्रक की भुजाओं की लंबाई 21 cm और 29.7 cm है। अब इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

? आपके अनुसार एक टेबल, जिसे आप विद्यालय या घर में उपयोग करते हैं, उसकी ऊपरी सतह का क्षेत्रफल कितना होगा? संभवतः आप यह कल्पना करने का प्रयास कर सकते हैं कि आपकी टेबल पर कितने A4 आकार के पत्रक व्यवस्थित किए जा सकते हैं।

फर्नीचर, जैसे— टेबल व कुर्सी के आयामों को कभी-कभी इंच व फीट में मापा जाता है।

1 in = 2.54 cm

1 ft = 12 in

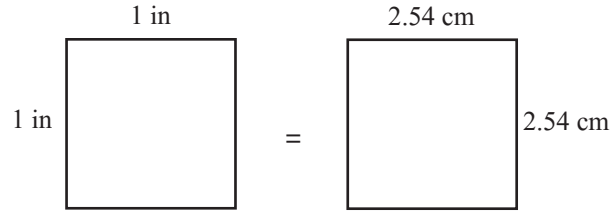
? नीचे दी गई लंबाइयों को सेंटीमीटर में व्यक्त कीजिए।

(i) 5 in (ii) 7.4 in

? नीचे दी गई लंबाइयों को इंच में व्यक्त कीजिए।

(i) 5.08 cm (ii) 11.43 cm

? 1 वर्ग इंच कितने cm^2 के समान होता है?



अत: 1 cm^2 = 2.54^2 cm^2 = 6.4516 cm^2

© NCERT not to be republished

? 10 वर्ग इंच कितने cm^2 के समान होता है?

$$10\ in^2 = 10 \times 6.4516\ cm^2 = 64.516\ cm^2$$

161.29 cm^2 को in^2 में परिवर्तित कीजिए।

प्रत्येक 6.4516 cm^2 एक in^2 के समान है।

$$\text{अत: } 161.29\ cm^2 = \frac{161.29}{6.4516}\ in^2$$

? भागफल की गणना कीजिए।

? आपके अनुसार आपकी कक्षा-कक्ष का क्षेत्रफल कितना है?

कक्षा-कक्ष, घर आदि के क्षेत्रफलों को सामान्यत: वर्ग फीट या वर्ग मीटर में मापा जाता है।

? 1 वर्ग फीट में कितना वर्ग इंच होता है?

? आपके अनुसार आपके विद्यालय का क्षेत्रफल कितना है? अनुमान लगाइए और वास्तविक आँकड़ों से इसकी तुलना कीजिए।

भूमि के अधिक बड़े क्षेत्रफलों को एकड़ में भी मापा जाता है।

$$1 \text{ एकड़} = 43{,}560\ ft^2$$

इन इकाइयों के अतिरिक्त भारत के विभिन्न क्षेत्रों में क्षेत्रफल को मापने के लिए विभिन्न क्षेत्रीय इकाइयों का उपयोग किया जाता है, जैसे— बीघा, गज, कट्ठा, धुर, सेंट, अंकणम आदि।

? आपके क्षेत्र में क्षेत्रफल मापने की क्षेत्रीय इकाई का पता लगाइए।

? आपके अनुसार आपके गाँव या कस्बा या शहर का क्षेत्रफल कितना है? अनुमान लगाइए और वास्तविक आँकड़ों से इसकी तुलना कीजिए।

बड़े क्षेत्रफलों को km^2 में मापा जाता है।

? एक km^2 कितने m^2 के समान होता है?

? आपका गाँव या कस्बा या शहर आपके विद्यालय से कितने गुना बड़ा है?

? अधिकतम क्षेत्रफल वाले शहर का पता लगाइए— (i) भारत में और (ii) विश्व में

? न्यूनतम क्षेत्रफल वाले शहर का पता लगाइए— (i) भारत में और (ii) विश्व में

सारांश

- *त्रिभुज का क्षेत्रफल* $= \frac{1}{2} \times$ *आधार* $\times$ *ऊँचाई*
- *किसी भी बहुभुज के क्षेत्रफल की गणना इसे त्रिभुजों में बाँटकर की जा सकती है।*
- *समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार* $\times$ *ऊँचाई*
- *समचतुर्भुज का क्षेत्रफल* $= \frac{1}{2} \times$ *विकर्णों का गुणनफल*
- *समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल* $= \frac{1}{2} \times$ *ऊँचाई* $\times$ *समांतर भुजाओं का योगफल*

© NCERT not to be republished

अधिगम सामग्री पत्रक

© NCERT not to be republished

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	

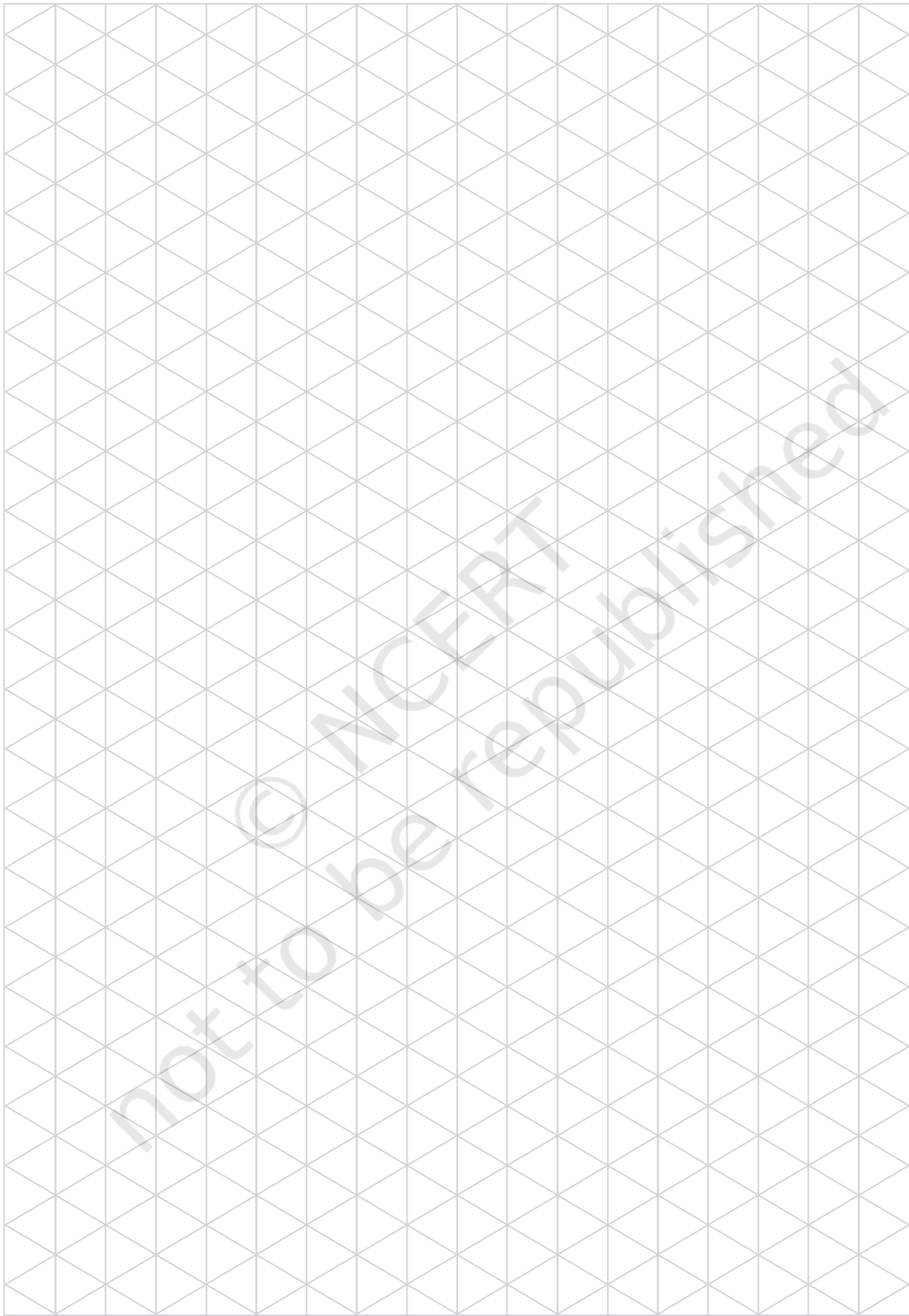
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	

© NCERT not to be republished

© NCERT
not to be republished

समदूरीक जाल



© NCERT not to be republished

© NCERT
not to be republished

© NCERT
not to be republished

© NCERT
not to be republished